

545.950  
Studia

21  
1986

9  
b

# Scientiarum Mathematicarum Hungarica

EDITOR-IN-CHIEF

A. HAJNAL

DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF

E. T. SCHMIDT

EDITORIAL BOARD

P. BOD, E. CSÁKI, Á. CSÁSZÁR, I. CSISZÁR, Á. ELBERT

L. FEJES TÓTH, G. HALÁSZ, I. JUHÁSZ, G. KATONA

O. STEINFELD, J. SZABADOS, D. SZÁSZ

E. SZEMERÉDI, G. TUSNÁDY, I. VINCZE, R. WIEGANDT

VOLUME 21  
NUMBERS 1—2

1986



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

# STUDIA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM HUNGARICA

A QUARTERLY OF THE HUNGARIAN  
ACADEMY OF SCIENCES

---

*Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* publishes original papers on mathematics mainly in English, but also in German, French and Russian.

*Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* is published in yearly volumes of four issues (mostly double numbers published semiannually) by

AKADÉMIAI KIADÓ

Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences  
H-1054 Budapest, Alkotmány u. 21.

Manuscripts and editorial correspondence should be addressed to

J. Merza  
Managing Editor  
P.O. Box 127  
H-1364 Budapest

*Subscription information*

Orders should be addressed to

KULTURA Foreign Trading Company  
P.O. Box 149  
H-1389 Budapest

or to its representatives abroad.



315.930

# Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica

Editor-in-Chief

A. Hajnal

Deputy Editor-in-Chief

E. T. Schmidt

Editorial Board

P. Bod, E. Csáki, Á. Császár, I. Csiszár, Á. Elbert, L. Fejes Tóth  
G. Halász, I. Juhász, G. Katona, O. Steinfeld, J. Szabados, D. Szász  
E. Szemerédi, G. Tusnády, I. Vincze, R. Wiegandt

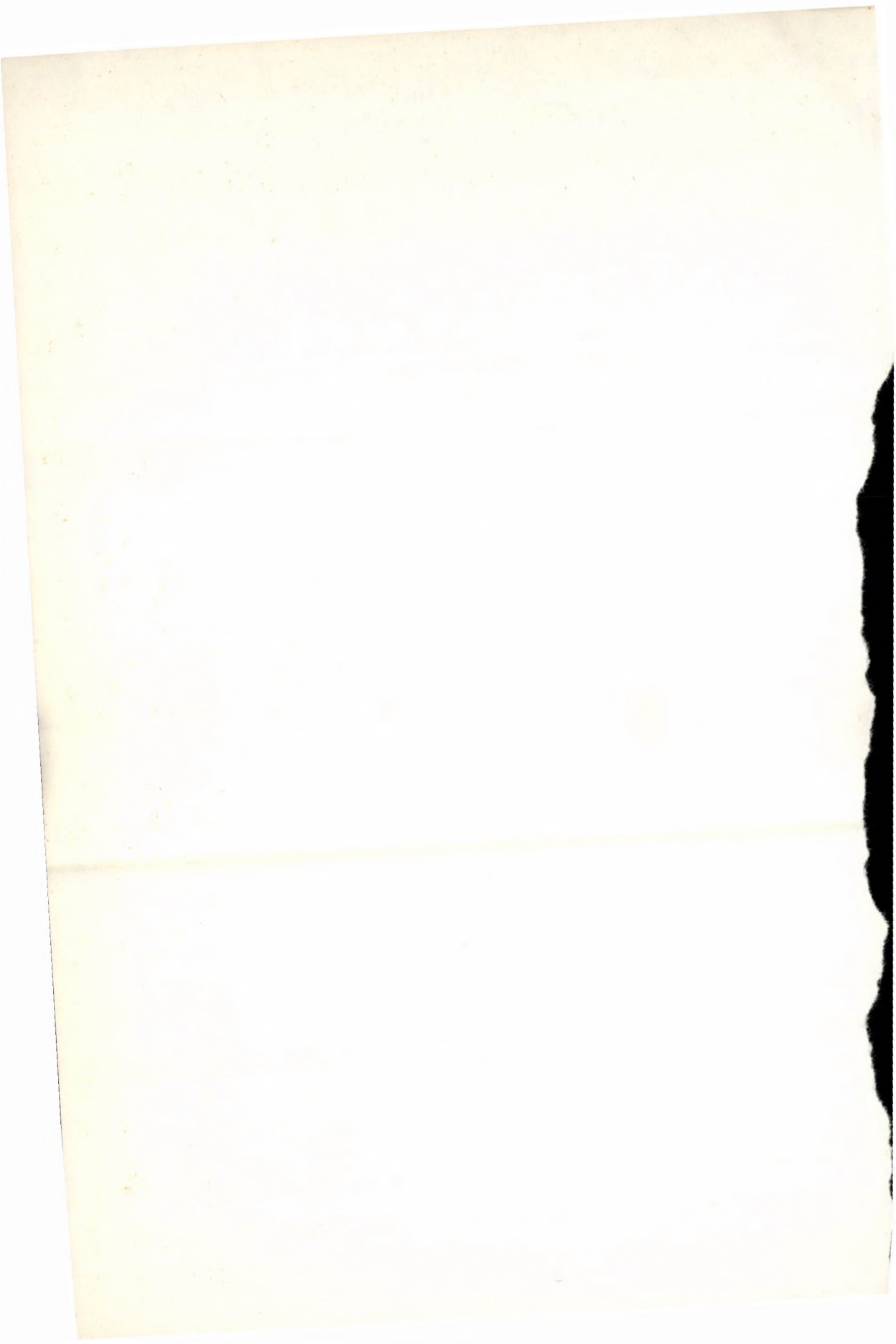
Volume 21



Akadémiai Kiadó, Budapest

1986

AKADÉMIA  
KÖNYVTÁRA





## CONTENTS

<i>Alpár, L.</i> , On the change of variable of absolutely convergent power and Laurent series on the unit circle .....	59
<i>Bambah, R. P., Dumir, V. C. and Hans-Gill, R. J.</i> , On an analogue of a problem of Mordell. . .	135
<i>Bezdek, A. and Bezdek, K.</i> , Enclosing a set by sets .....	409
<i>Bezdek, A. and Bezdek, K.</i> , When is it possible to translate a convex polyhedron in an other one? .....	337
<i>Bezdek, A., Bezdek, K. and Böröczky, K.</i> , On compact packings .....	343
<i>Bezdek, K. and Bezdek, A.</i> , Enclosing a set by sets .....	409
<i>Bezdek, K. and Bezdek, A.</i> , When is it possible to translate a convex polyhedron in an other one? .....	337
<i>Bezdek K., Bezdek, A. and Böröczky, K.</i> , On compact packings .....	343
<i>Blind, G.</i> , Optimale Zerlegungen eines konvexen Bereichs in konvexe Bereiche. ....	387
<i>Blind, G. and Blind, R.</i> , Ein Kreisüberdeckungsproblem .....	35
<i>Blind, R.</i> , Die minimale Anzahl der $j$ -Seiten ( $d-3 \leq j \leq d-1$ ) von $d$ -Polytopen ohne dreieckige 2-Seiten .....	359
<i>Blind, R. and Blind, G.</i> , Ein Kreisüberdeckungsproblem .....	35
<i>Böhm, J.</i> , Zum isoperimetrischen Problem bei Simplexen in $r$ -dimensionalen Räumen konstanter Krümmung .....	267
<i>Böröczky, K.</i> , Closest packing and loosest covering of the space with balls .....	79
<i>Böröczky, K., Bezdek, A. and Bezdek, K.</i> , On compact packings .....	343
<i>Chakerian, G. D. and Filliman, P.</i> , The measures of the projections of a cube .....	103
<i>Csóka, G.</i> , Three theorems on the minimal vectors of perfect lattices .....	283
<i>Danzer, L.</i> , Zur Lösung des Gallaischen Problems über Kreisscheiben in der euklidischen Ebene .....	111
<i>Debrunner, H. E.</i> , Tiling three-space with handlebodies .....	201
<i>Dumir, V. C., Bambah, R. P. and Hans-Gill, R. J.</i> , On an analogue of a problem of Mordell .....	135
<i>Filliman, P. and Chakerian, G. D.</i> , The measures of the projections of a cube .....	103
<i>Florian, A.</i> , Packing and covering with convex discs .....	251
<i>Gritzmann, P. and Wills, J. M.</i> , Finite packing and covering .....	149
<i>Groemer, H.</i> , Multiple packings and coverings .....	189
<i>Gruber, P. M.</i> , Typical convex bodies have surprisingly few neighbours in densest lattice packings .....	163
<i>Grünbaum, B. and Shephard, G. C.</i> , Circular disk patterns on a sphere .....	303
<i>Hans-Gill, R. J., Bambah, R. P. and Dumir, V. C.</i> , On an analogue of a problem of Mordell. .	135
<i>Hárs, L.</i> , The Tammes problem for $n=10$ .....	439
<i>Hertel, E.</i> , Disjunkte Pflasterungen konvexer Körper .....	379
<i>Horváth, J.</i> , Über die Enge von Zylinderpackungen und die Lockerheit von Zylinderüberdeckungen im $n$ -dimensionalen euklidischen Raum .....	219
<i>Jucovič, E. and Švec, S.</i> , On generalized neighbour packings of domains in the euclidean plane .....	347
<i>Kaiser, H.</i> , Zum Problem der Zerlegbarkeit von Simplexen in Orthoscheme. ....	227
<i>Klee, V.</i> , Do infinite-dimensional Banach spaces admit nice tilings? .....	415
<i>Klee, V.</i> , Facet-centroids and volume minimization .....	143
<i>Leichtweiss, K.</i> , Über eine Formel Blaschkes zur Affinoberfläche .....	453
<i>Linhart, J.</i> , Extremaleigenschaften der regulären 3-Zonotope .....	181
<i>Mani-Levitka, P.</i> , Random Steiner symmetrizations .....	373
<i>Müller, H. R.</i> , Eine Kennzeichnung der Schraubenbewegungen des euklidischen Raumes .....	329
<i>Paldsti, I.</i> , A construction for arrangements of lines with vertices of large multiplicity .....	67
<i>Pottmann, H. and Röschel, O.</i> , Globale Eigenschaften ebener isotroper Zwangsläufe .....	207
<i>Röschel, O. and Pottmann, H.</i> , Globale Eigenschaften ebener isotroper Zwangsläufe .....	207
<i>Sachs, H.</i> , No more than nine unit balls can touch a closed unit hemisphere .....	203
<i>Schneider, R.</i> , Affine-invariant approximation by convex polytopes .....	401
<i>Seidel, J. J.</i> , On the volume of a hyperbolic simplex .....	243

<i>Švec, S. and Jucovič, E.</i> , On generalized neighbour packings of domains in the euclidean plane	347
<i>Shephard, G. C. and Grünbaum, B.</i> , Circular disk patterns on a sphere	303
<i>Szabó, S.</i> , Packing and covering of discrete space by certain spheres	429
<i>Szenthe, J.</i> , Some isometric actions with orthogonally transversal submanifolds on Riemannian symmetric spaces	175
<i>Temesvári, Á. H.</i> , Über die lockere doppelgitterförmige 2-fache Überdeckung der Ebene mit Einheitskreisen	293
<i>Vermes, I.</i> , Über eine geometrische Ungleichung bezüglich der Dichte der regulären Ausfüllungen der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche	29
<i>Wegner, G.</i> , Über endliche Kreispackungen in der Ebene	1
<i>Wernicke, B.</i> , Möbiusebenen in spiegelungsgeometrischer Darstellung	363
<i>Wilker, J. B.</i> , Inversive geometry and the Hopf fibration	91
<i>Wills, J. M. and Gritzmann, P.</i> , Finite packing and covering	149

## ÜBER ENDLICHE KREISPACKUNGEN IN DER EBENE

GERD WEGNER

*Professor László Fejes Tóth zum 70. Geburtstag gewidmet*

### 1. Einführung

Schon 1910 wurde von A. Thue [10] bewiesen, daß für die Dichte  $\delta$  eines Systems kongruenter, nicht übereinandergreifender Kreise  $\delta \leq \frac{\pi}{\sqrt{12}}$  gilt und dabei das Gleichheitszeichen nur erreicht wird für die unendliche gitterförmige Kreispackung, bei der jeder Kreis 6 Nachbarkreise berührt. Über die naheliegende Frage, endlich viele kongruente Kreise möglichst ökonomisch zu packen, sind dagegen nur partielle Ergebnisse bekannt. Von den verschiedenen Möglichkeiten, den Begriff „ökonomisch packen“ zu präzisieren, ist die folgende die nächstliegende:

Eine gegebene Anzahl  $n$  kongruenter Kreise ist so zu packen, daß die Fläche ihrer konvexen Hülle minimal wird.

L. Fejes Tóth vermutete in [2], daß hierfür ein solcher Ausschnitt der dichtesten gitterförmigen Kreispackung zu nehmen ist, der in seiner Gestalt einem regulären Sechseck so ähnlich wie möglich ist. Wir werden zeigen, daß jedenfalls für solche Zahlen  $n$  die gewisse Darstellungsbedingungen erfüllen (121 ist die kleinste Zahl, die diese Bedingungen nicht erfüllt), als optimale Packungen nur sechseckförmige Ausschnitte der dichtesten gitterförmigen Kreispackung auftreten ( $\rightarrow$  Satz 4.4) und daß sich dabei die Gestalt dieses Sechsecks nicht allzuweit von der des regulären entfernen kann ( $\rightarrow$  Satz 4.6). Wir führen dazu für Kreisfamilien die  $P$ -Hülle ein, die im allgemeinen etwas kleiner ausfällt als die konvexe Hülle; das entsprechende Optimalitätsproblem für die  $P$ -Hülle können wir vollständig lösen.

### 2. Die Peripherie von Kreisfamilien

Im folgenden bezeichnet  $\mathcal{G}$  stets eine endliche Menge von Translaten der Einheitskreisscheibe  $B := \{x | x \in E^2 \text{ und } |x| \leq 1\}$ , also  $\mathcal{G} = \{x_1 + B, \dots, x_n + B\}$  mit paarweise verschiedenen Punkten  $x_1, \dots, x_n \in E^2$ . Unser Hauptinteresse gilt *Packungen*, das sind Familien, deren Mitglieder paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben.

Ein Kreis  $K_0 = y_0 + B$  heiße *Außenkreis* zu einer Punktmenge  $M \subseteq E^2$  — im Falle  $M = \bigcup_{K \in \mathcal{G}} K$  sprechen wir kurz von einem Außenkreis zu  $\mathcal{G}$  —, wenn es eine stetige, unbeschränkte Kurve  $y: [0, \infty) \rightarrow E^2$  gibt derart, daß  $y(0) = y_0$  ist und

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A45; Secondary 52A10.

*Key words and phrases*, Circle packing, convex hull, extremum problem.



$M \cap \bigcup_{t \geq 0} \text{int}(y(t) + B) = \emptyset$  gilt. Ist  $M$  beschränkt, was im Falle einer endlichen Kreisfamilie stets zutrifft, so gibt es also ein  $t_0$  derart, daß sich  $y(t_0) + B$  von  $M$  durch eine Gerade separieren läßt.

Bezeichnet  $\mathcal{A}(M)$  die Gesamtheit aller Außenkreise zu  $M$ , so nennen wir  $E^2 \setminus \bigcup_{K \in \mathcal{A}(M)} \text{int} K$  die  $A$ -Hülle  $A(M)$  von  $M$ ; im Falle von  $M = \bigcup_{K \in \mathcal{G}} K$  schreiben wir auch  $\mathcal{A}(\mathcal{G})$  statt  $\mathcal{A}(M)$  und ebenso  $A(\mathcal{G})$  statt  $A(M)$ <sup>1</sup>.  $A(M)$  ist also das kleinste,  $M$  umfassende  $a$ -Gebiet im Sinne von Heppes und Molnár [7].  $M$  bzw.  $\mathcal{G}$  heißt  $A$ -zusammenhängend, wenn  $A(M)$  zusammenhängend ist.

Nun nennen wir ein Mitglied  $K$  von  $\mathcal{G}$  *peripher*, wenn es einen Außenkreis zu  $\mathcal{G}$  gibt, der  $K$  berührt. Die *Peripherie*  $\mathcal{P}(\mathcal{G})$  von  $\mathcal{G}$  ist die Gesamtheit der peripheren Kreise von  $\mathcal{G}$ . Zwei periphere Kreise  $K_1$  und  $K_2$  von  $\mathcal{G}$  heißen *benachbart*, wenn sie zur selben Zusammenhangskomponente von  $A(\mathcal{G})$  gehören und ein Außenkreis  $K_0$  existiert, welcher  $K_1$  und  $K_2$  derart berührt, daß die Berührungspunkte auf dem Rand von  $K_0$  einen Kreisbogen der Länge  $< \pi$  begrenzen, der kein weiteres Mitglied von  $\mathcal{G}$  berührt. Die Mittelpunkte der peripheren Kreise nehmen wir als Ecken, die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte benachbarter peripherer Kreise als Kanten eines ebenen Graphen, den wir *Peripheriegraph*  $G(\mathcal{G})$  von  $\mathcal{G}$  nennen. Die Abbildung 1 zeigt eine Kreispackung und den zugehörigen Peripheriegraphen.

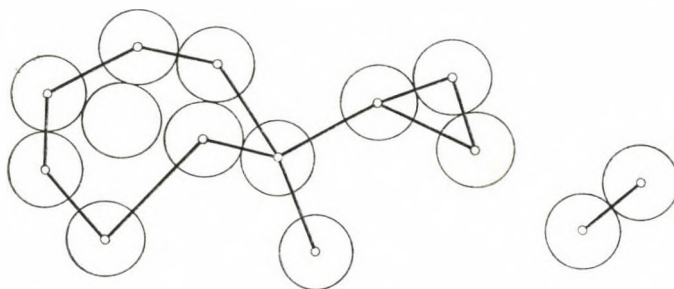


Abb. 1

$C(\mathcal{G})$  bezeichne die aus  $G$  und den von  $G$  begrenzten, beschränkten Gebieten bestehende Punktmenge, und  $c(\mathcal{G})$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $G$ , die zugleich die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $A(\mathcal{G})$  ist. Jede Kante von  $G$  besitzt zwei Ufer, wobei wir die zu  $E^2 \setminus C(\mathcal{G})$  gehörenden als äußere Ufer von  $G$  bezeichnen und mit  $p(\mathcal{G})$  deren Anzahl. Im Falle der Abbildung 1 ist  $p(\mathcal{G}) = 16$ .

<sup>1</sup> Ist  $h$  ein für Punkt Mengen definierter Operator und  $\mathcal{F}$  eine Familie von Mengen, so schreiben wir statt  $h(\bigcup_{M \in \mathcal{F}} M)$  kurz  $h(\mathcal{F})$ .

### 3. Die $P$ -Hülle

Die im folgenden definierte  $P$ -Hülle  $P(\mathcal{G})$  von  $\mathcal{G}$  unterscheidet sich von der konvexen Hülle  $\text{conv}(\mathcal{G})$  dadurch, daß der Randverlauf von  $P(\mathcal{G})$  durch sämtliche peripheren Kreise von  $\mathcal{G}$  bestimmt wird, nicht nur durch die exponierten. Hierin liegt der Sinne für die Einführung der  $P$ -Hülle; die Wegnahme eines einzelnen peripheren Kreises von einer Familie ändert deren  $P$ -Hülle in der Regel nur lokal.

Für jedes Paar benachbarter peripherer Kreise  $K_1 = x_1 + B$ ,  $K_2 = x_2 + B$  wird die folgende Konstruktion durchgeführt. Sei  $K'$  ein beide Kreise berührender Außenkreis und  $K'_1$  [bzw.  $K'_2$ ] derjenige der beiden gemeinsamen Berührkreise von  $K'$  und  $K_1$  [bzw.  $K_2$ ], dessen Mittelpunkt von  $x_2$  [bzw.  $x_1$ ] den kleineren Abstand hat.  $H$  sei diejenige der von der Geraden durch  $x_1$  und  $x_2$  begrenzten Halbebenen, die den Mittelpunkt von  $K'$  enthält. Nun sei

$$U(K_1, K_2) := \begin{cases} \text{conv}(K_1 \cup K_2) & \text{für } |x_1 - x_2| \leq 2 \\ H \cap [\text{conv}(K_1 \cup K'_1) \cup \text{conv}(K_2 \cup K'_2)] & \text{für } 2 \leq |x_1 - x_2| < 4 \end{cases}$$

und  $V(K_1, K_2)$  die durch

$$V(K_1, K_2) := U(K_1, K_2) \cup (x_1 + x_2 - U(K_1, K_2))$$

gebildete Symmetrisierung. Abbildung 2 zeigt diese Konstruktion für den Fall  $\sqrt{12} < |x_1 - x_2| < 4$  (der nur eintreten kann, falls ein Ufer der von  $x_1$  und  $x_2$  definierten Kante ein inneres Ufer ist).

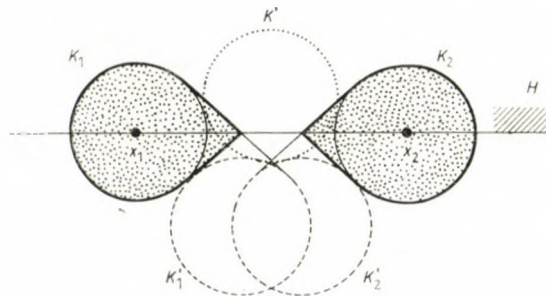


Abb. 2

Wir setzen außerdem  $V(K_1, K_2) := K_1 \cup K_2$  für nicht benachbarte, periphere Kreise und für  $K_1 = K_2$ . Dann wird die  $P$ -Hülle von  $\mathcal{G}$  definiert durch

$$P(\mathcal{G}) := A\left(\bigcup_{K_1, K_2 \in \mathcal{G}} V(K_1, K_2)\right).$$

Abbildung 3 zeigt die  $P$ -Hülle zu der in Abbildung 1 dargestellten Kreispackung. Für die  $P$ -Hülle gilt

$$(1) \quad \bigcup_{K \in \mathcal{G}} K \subseteq P(\mathcal{G}) \subseteq \text{conv}(\mathcal{G})$$

mit Gleichheit auf der rechten Seite genau dann, wenn der Peripheriegraph von  $\mathcal{G}$  zusammenhängend ist, alle Kanten die Länge 2 haben und  $\text{conv } G(\mathcal{G}) = C(\mathcal{G})$  gilt.

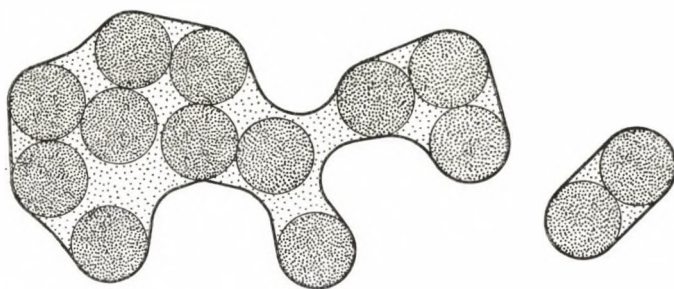


Abb. 3

Außerdem ist die  $P$ -Hülle in dem Sinne monoton, daß mit  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}'$  auch  $P(\mathcal{G}) \subseteq P(\mathcal{G}')$  gilt. Man beachte, daß im Gegensatz zur konvexen Hülle für einen Einheitskreis  $K$  aus  $K \subseteq P(\mathcal{G})$  nicht notwendig  $P(\mathcal{G} \cup \{K\}) = P(\mathcal{G})$  folgt, vielmehr kann  $P(\mathcal{G} \cup \{K\})$  größer ausfallen als  $P(\mathcal{G})$ .

#### 4. Ergebnisse

Die Vermutung von L. Fejes Tóth findet eine erste Stütze in einem Satz von Groemer [5]. Zur Formulierung führen wir folgende Bezeichnungen ein. Eine Kreispackung  $\mathcal{G}$  nennen wir *gesättigt*, wenn jeder Einheitskreis das Innere eines Mitgliedes von  $\mathcal{G}$  oder eines Außenkreises von  $\mathcal{G}$  trifft.  $\mathcal{G}$  heiße *Gitterpackung*, wenn  $\mathcal{G}$  eine Teilmenge einer dichtesten, gitterförmigen Kreispackung ist, die gesättigt und  $A$ -zusammenhängend ist. Insbesondere ist dann der Peripheriegraph von  $\mathcal{G}$  zusammenhängend und alle Kanten haben die Länge 2. Eine Gitterpackung wird schließlich *Groemerpackung* genannt, wenn zudem  $\text{conv } C(\mathcal{G}) = C(\mathcal{G})$  ist. Die Groemerpackungen sind, kurz gesagt, die „sechseckförmigen“ Ausschnitte der dichtesten gitterförmigen Packung, wobei die Bezeichnung „sechseckförmig“ die Ausartungsfälle, im Extremfall zu einer linearen Kette von Kreisen, einschließen soll.

**SATZ 4.1 (Groemer).** *Sind in einen konvexen Bereich  $M$  vom Flächeninhalt  $F$  und Umfang  $U$   $n$  Einheitskreise gepackt, so ist*

$$(2) \quad F \geq (n-1)2\sqrt{3} + (2-\sqrt{3})\frac{U}{2} + \pi(\sqrt{3}-1)$$

*und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn die Kreise eine Groemerpackung  $\mathcal{G}$  bilden und  $M = \text{conv } \mathcal{G}$  ist.*

Dieses Ergebnis wurde in anderer Form unabhängig von N. Oler [9] bewiesen, welches dann vereinfacht und verallgemeinert wurde von J. H. Folkman—R. L. Graham [3] und von R. L. Graham—H. S. Witsenhausen—H. J. Zassenhaus [4]; vgl. auch Molnár [8]. Wir benötigen ein hiermit eng verwandtes Resultat, wofür wir in Abschnitt 5 einen unabhängigen Beweis geben werden:

**SATZ 4.2.** *Sei  $\mathcal{C} \subseteq E^2$  ein ebener, simplizialer Komplex mit  $n$  Ecken, dessen sämtliche Kanten mindestens die Länge 2 haben. Für  $v \in \text{vert } \mathcal{C}$  (die Eckenmenge*



von  $\mathcal{C}$ ) setzen wir  $z(v)=0$ , wenn  $v$  eine innere Ecke oder eine isolierte Ecke ist, und  $z(v)=k$ , wenn  $v$  mit  $2k$  äußeren Ufern von Kanten von  $\mathcal{C}$  inzident ist<sup>2</sup>, und definieren  $p(\mathcal{C}) := \sum_{v \in \text{vert } \mathcal{C}} z(v)$ . Ferner sei  $\chi(\mathcal{C})$  die Eulercharakteristik und  $F(\mathcal{C})$  die Fläche von  $\mathcal{C}$ . Sind die Innenwinkel der zu  $\mathcal{C}$  gehörenden 2-Simplexe (Dreiecke) sämtlich kleiner als  $\frac{2}{3}\pi$ , so gilt

$$(3) \quad F(\mathcal{C}) \cong (n - \chi(\mathcal{C}))2\sqrt{3} - p(\mathcal{C})\sqrt{3}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn sämtliche 2-Simplexe von  $\mathcal{C}$  gleichseitige Dreiecke der Kantenlänge 2 sind.

Wir kommen nun zu unserem Hauptergebnis. Es liefert die bestmögliche Unterschranke für die Fläche der  $P$ -Hülle einer Packung von  $n$  Einheitskreisen.

**HAUPTSATZ 4.3.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zu  $n$  werden nichtnegative, ganze Zahlen  $a, b, c$  sukzessive maximal so bestimmt, daß

$$(4) \quad n = 1 + 6 \binom{a}{2} + ab + c$$

ist (also  $0 \leq b < 6$  und  $0 \leq c < a$ ). Sei ferner

$$p_0(n) := 6(a-1) + b + 1 - \delta_{0, b+c}^3$$

und

$$F_0(n) := (n-1)2\sqrt{3} + p_0(n)(2-\sqrt{3}) + \pi.$$

Dann gilt für jede  $A$ -zusammenhängende Packung  $\mathcal{G}$  aus  $n$  Einheitskreisen

$$(FP(\mathcal{G})) \cong F_0(n).$$

Das Gleichheitszeichen wird für jedes  $n$  angenommen und zwar nur von geeigneten Gitterpackungen; dabei gilt dann  $p(\mathcal{G}) = p_0(n)$ .

Zum ursprünglichen Problem über die konvexe Hülle folgt auf Grund von (1) hieraus sofort:

**KOROLLAR 4.4.** Für jede Packung  $\mathcal{G}$  aus  $n$  Einheitskreisen gilt

$$F(\text{conv } \mathcal{G}) \cong F_0(n)$$

und Gleichheit kann nur eintreten für geeignete Groemerpackung (nämlich solchen mit  $p(\mathcal{G}) = p_0(n)$ ).

Danach bleibt offen, ob es zu gegebenem  $n$  überhaupt eine Groemerpackung gibt, die das Gleichheitszeichen erreicht. Das ist bei gegebenem  $n$  leicht feststellbar und es zeigt sich, daß  $n=121$  die kleinste Ausnahme ist. Es kann auch mehrere solche Groemerpackungen geben: Abbildung 4 zeigt zwei Groemerpackungen und eine weitere Gitterpackung zu  $n=18$ , für die  $F(P(\mathcal{G})) = F_0(n)$  ist.

<sup>2</sup> Man kann  $z(v)$  auch definieren als  $z(v) = \chi(\text{link}(v, \mathcal{C}))$ .

<sup>3</sup>  $p_0(n)$  kann nach H. Harborth [6] in Verbindung mit [11] auch geschrieben werden als  $\{\sqrt{12n-3}-3\}$ , wobei  $\{x\}$  die kleinste ganze Zahl  $\geq x$  bezeichnet.

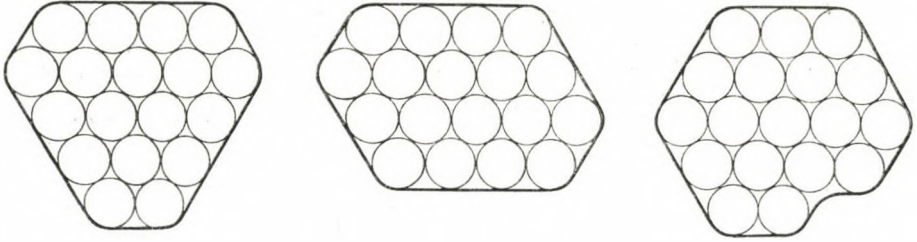


Abb. 4

Für Groemerpackungen ist Minimalität von  $F(\text{conv } \mathcal{G})$  gleichbedeutend mit Minimalität von  $p(\mathcal{G})$  und damit mit der Minimalität des Umfangs von  $\text{conv } \mathcal{G}$ :

BEMERKUNG 4.5. Für jede Groemerpackung  $\mathcal{G}$  aus  $n > 1$  Kreisen gilt

$$p(\mathcal{G}) \cong p_0(n)$$

und  $p(\mathcal{G}) = p_0(n)$  ist äquivalent mit  $F(\text{conv } \mathcal{G}) = F_0(n)$ .

Die Peripherie einer Groemerpackung  $\mathcal{G}$  besteht aus 6 linearen Kreisketten, deren Kreisanzahlen  $p_1, \dots, p_6$ , in zyklischer Reihenfolge gezählt, wir als *Randsequenz* von  $\mathcal{G}$  bezeichnen. Die Randsequenz einer Groemerpackung ist also nur bis auf zyklische Vertauschung eindeutig definiert und es gilt

$$\sum_{i=1}^6 p_i = 6 + p(\mathcal{G}).$$

SATZ 4.6. Für die Randsequenz einer Groemerpackung minimaler Fläche gilt mit  $a, b, c$  aus (4)

$$\begin{aligned} p_i &= a & \text{falls } b=c=0 \\ \frac{a-1}{2} \cong p_i &\cong 2a-c+2 & \text{sonst} \end{aligned} \quad (\text{für } i=1, \dots, 6).$$

Dieser Satz liefert die Eindeutigkeit der optimalen Groemerpackungen für  $n = 6 \binom{a}{2} + 1$  ( $a \in \mathbb{N}$ ) in Gestalt der regulärsechseckigen Anordnung und zeigt, daß sich die Gestalt auch allgemein nicht allzu weit vom regulären Sechseck entfernen kann. Mit Hilfe der Randsequenz läßt sich die Frage, für welche Zahlen  $n$  Groemerpackungen mit  $p(\mathcal{G}) = p_0(n)$  existieren, als rein zahlentheoretisches Problem formulieren: Eine solche Groemerpackung existiert genau dann, wenn es zu  $n$  natürliche Zahlen  $p_1, p_2, p_3, p_4$  gibt mit

$$n = (p_1 + p_2 - 1)(p_3 + p_4 - 1) - \binom{p_1}{2} - \binom{p_1}{2},$$

$$p_0(n) = p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4 - 6.$$

Wir kommen auf dieses Problem in einer späteren Arbeit zurück.

### 5. Beweis von Satz 4.2

Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Anzahl  $f$  der 2-Simplexe von  $\mathcal{C}$ .

Im Falle  $f=0$  ist natürlich  $F(\mathcal{C})=0$ . Außerdem ist hier  $p(\mathcal{C})$  gleich der doppelten Anzahl  $e$  der Kanten von  $\mathcal{C}$ , so daß wegen  $\chi(\mathcal{C})=n-e+f$  auch die rechte Seite von (3) verschwindet. Nun sei  $f>0$  und  $\mathcal{C}$  ein ebener Komplex mit  $f$  2-Simplexen, der die Voraussetzungen von Satz 4.2 erfüllt.  $\mathcal{C}$  besitzt mindestens eine Kante mit einem äußeren Ufer und einem inneren Ufer. Wir entfernen diese Kante und das von ihr berandete 2-Simplex<sup>4</sup>. Der so entstandene Komplex  $\mathcal{C}'$  hat  $f-1$  2-Simplexe und dieselben Ecken wie  $\mathcal{C}$  und somit gilt nach Induktionsannahme

$$F(\mathcal{C}') \cong (n - \chi(\mathcal{C}')) 2\sqrt{3} - p(\mathcal{C}') \sqrt{3}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn alle 2-Simplexe von  $\mathcal{C}'$  gleichseitige Dreiecke der Kantenlänge 2 sind. Nun ist  $p(\mathcal{C}')=p(\mathcal{C})+1$ ,  $\chi(\mathcal{C}')=\chi(\mathcal{C})$  und  $F(\mathcal{C}')=F(\mathcal{C})-\Delta$ , wo  $\Delta$  die Fläche des entfernten Dreiecks bezeichnet. Auf Grund der Voraussetzungen über  $\mathcal{C}$  ist  $\Delta \cong \sqrt{3}$  mit Gleichheit genau dann, wenn das Dreieck ein gleichseitiges Dreieck der Kantenlänge 2 ist, und damit folgt die Behauptung.

### 6. Zur Arithmetik von $p_0(n)$ und $F_0(n)$

Geometrisch läßt sich  $p_0(n)$  wie folgt charakterisieren. Werden im regulären Dreiecksgitter die Ecken numeriert, indem man mit irgendeiner Ecke beginnt und spiralenförmig fortschreitet (siehe Abb. 5), so hat der aus gleichseitigen Dreiecken

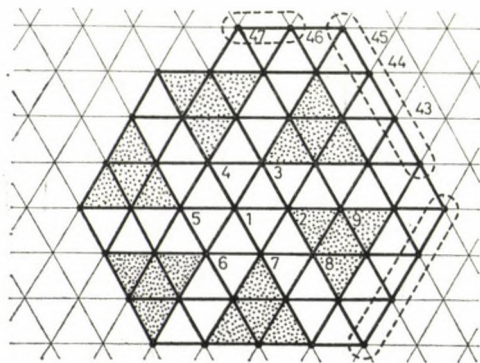


Abb. 5

bestehende ebene Komplex, der von den Ecken  $1, \dots, n$  aufgespannt wird, gerade  $p_0(n)$  Randecken (falls  $n>1$ ). Dies erklärt zugleich die auf den ersten Blick merkwürdig erscheinende Darstellung (4) von  $n$ , denn die  $n-1$  numerierten Ecken

<sup>4</sup> Diese Methode ist in der PL-Topologie als simpliziales Collapsing bekannt.



2, ...,  $n$  lassen sich in naheliegender Weise zu 6 Dreiecken mit je  $\binom{a}{2}$  Ecken, zu  $b$  Randstrecken mit je  $a$  Ecken und zu einer Randstrecke mit  $c$  Ecken zusammenfassen (vgl. Abb. 5 für  $n=47$ ).

LEMMA. Seien  $n, n_1, n_2$  natürliche Zahlen  $>1$  und sei  $r < p_0(n)$ . Dann gilt

$$(5) \quad p_0(n) \leq p_0(n+1) \leq p_0(n) + 1,$$

$$(6) \quad p_0(n) - 6 \leq p_0(n-r),$$

$$(7) \quad p_0(n_1 + n_2) \leq p_0(n_1) + p_0(n_2).$$

Falls  $n_1, n_2 \geq 3$  und nicht beide gleich 3 sind, steht in (7)  $\Leftarrow$ .

BEWEIS. 1. Fallunterscheidung zeigt, daß  $p_0(n+1) = p_0(n) + 1$  genau dann gilt, wenn bei der Darstellung (4) von  $n$   $b=c=0$  oder  $c=a-1$ ,  $0 \leq b \leq 4$  gilt und in allen anderen Fällen ist  $p_0(n+1) = p_0(n)$ .

2. Da somit  $p_0(n)$  monoton wachsend ist, genügt es, (6) für  $r = p_0(n) - 1$  zu beweisen. Zudem kann  $n \geq 8$  angenommen werden, denn  $p_0(k)$  ist für jedes  $k$  aus  $\mathbb{N}$  nichtnegativ, wogegen für  $n < 8$  die linke Seite von (6)  $\leq 0$  wird. Dann ist  $a \geq 2$  in der Darstellung (4) von  $n$  und man erhält

$$p_0(n - p_0(n) + 1) = \begin{cases} p_0(n) - 5 & \text{falls } b = c = 0 \text{ oder } c = a - 1, \quad 0 \leq b \leq 4 \\ p_0(n) - 6 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. Sei  $n_1 \leq n_2$ . Für  $2 \leq k \leq 6$  ist  $p_0(k) = k$ , andererseits gilt  $p_0(l+k) \leq p_0(l) + k$  für alle  $l, k \in \mathbb{N}$ ; daher ist (7) für  $2 \leq n_1 \leq 6$  jedenfalls richtig. Sei also  $6 < n_1 \leq n_2$ . In der Darstellung (4) von  $n_i$

$$n_i = 1 + 6 \binom{a_i}{2} + a_i b_i + c_i \quad (i = 1, 2)$$

ist dann  $a_i \geq 2$ . Überlassen wir die endlich vielen Fälle mit  $n_2 < 19$  der Verifikation, so dürfen wir  $a_2 \geq 3$  annehmen und erhalten wegen  $\binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} \leq \binom{a_1 + a_2 - 1}{2} - 2$  und  $b_1 + b_2 \leq 10$

$$n_1 + n_2 \leq 1 + 6 \binom{a_1 + a_2 - 1}{2} + (a_1 + a_2 - 1)(b_1 + b_2) + c_1 + c_2,$$

woraus nach Definition von  $p_0$  die Ungleichung (7) folgt.

Aus diesem Lemma ergeben sich für die Funktion  $F_0(n)$  die folgenden Ungleichungen:

FOLGERUNG. Seien  $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  und sei  $s < p_0(n)$ . Dann gilt

$$(8) \quad F_0(n) - 6(2 + \sqrt{3}) - (s-6)2\sqrt{3} \leq F_0(n-s)$$

$$(9) \quad F_0(n_1 + n_2) \leq F_0(n_1) + F_0(n_2) + 2\sqrt{3} - \pi.$$

Hierbei steht das Kleinerzeichen, wenn  $n_1, n_2 \equiv 3$  und nicht beide gleich 3 sind. Läßt man für  $n_i$  auch 1 zu, so gilt

$$(9a) \quad F_0(n_1 + n_2) \leq F_0(n_1) + F_0(n_2) + 4 - \pi.$$

Das Wachstumsverhalten von  $F_0(n)$  wird entsprechend demjenigen von  $p_0(n)$  gegeben durch

$$(10) \quad F_0(n+1) = \begin{cases} F_0(n) + 2 + \sqrt{3} & \text{falls } b = c = 0 \text{ oder } c = a - 1, \quad 0 \leq b \leq 4 \\ F_0(n) + 2\sqrt{3} & \text{sonst,} \end{cases}$$

für  $n \geq 1$ , wobei  $a, b, c$  die gemäß (4) zu  $n$  gehörenden Zahlen sind.

## 7. Beweis des Hauptsatzes

Wir führen den Beweis durch Induktion nach  $n$ . Der Fall  $n=2$ , den wir dabei zunächst betrachten, dient sowohl als Induktionsanfang wie auch als Grundlage für spätere Flächenabschätzungen bei  $P$ -Hüllen. Die wichtigste Fallunterscheidung ist dann die nach  $p(\mathcal{G}) \equiv p_0(n)$  und  $p(\mathcal{G}) < p_0(n)$ , wobei sich der erstgenannte Fall ohne weiteres mit 4.2 erledigen läßt.

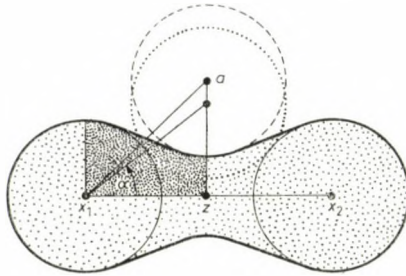


Abb. 6

7.1. Der Fall  $n=2$ . Eine Familie  $\mathcal{G}$  aus zwei Kreisen  $x_1 + B$  und  $x_2 + B$  ist genau dann  $A$ -zusammenhängend, wenn  $|x_1 - x_2| \leq 2\sqrt{3}$  ist. Mit  $\alpha := \arccos \frac{|x_1 - x_2|}{4}$  (vgl. Abb. 6) und der Hilfsfunktion

$$(11) \quad f(\alpha) := \begin{cases} \frac{4 \cos \alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)} \left(1 - \cos \alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\right) & \text{für } \frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} \\ 4 \cos \alpha & \text{für } \frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

gilt für die Fläche der  $P$ -Hülle von  $\mathcal{G}$

$$F(P(\mathcal{G})) = \pi + 2f(\alpha).$$

Im Falle  $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$  ist nämlich der in Abbildung 6 stark schattierte Flächenanteil gleich der Fläche des Dreiecks  $\text{conv}\{x_1, z, a\}$ , woraus sich mit etwas Trigonometrie die angegebene Formel ergibt. Der andere Fall ist ohnehin trivial.

Für Packungen ist  $2 \leq |x_1 - x_2| \leq 2\sqrt{3}$  bzw.  $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ . In diesem Intervall kann man  $f$  abschätzen durch

$$(12) \quad f(\alpha) \geq \sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) \left( 3 - \frac{6\alpha}{\pi} \right)$$

mit Gleichheit genau an den Intervallgrenzen.  $f$  nimmt demnach für  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  sein absolutes Minimum an. Insbesondere gilt also für eine  $A$ -zusammenhängende Packung aus zwei Kreisen

$$F(P(\mathcal{G})) \geq \pi + 4 = F_0(2)$$

mit Gleichheit nur für  $|x_1 - x_2| = 2$ .

**HILFSSATZ.** Für die Funktion  $h(\delta) := 2 \sin \delta - f\left(\frac{\pi - \delta}{2}\right)$  gilt

$$(13) \quad h(\delta) \geq \frac{3\delta}{\pi} (\sqrt{3} - 2) \quad \text{für} \quad 0 \leq \delta \leq \frac{2\pi}{3}$$

mit Gleichheit genau für  $\delta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ .

**BEWEIS.** 1. Für  $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{3}$  ist  $h(\delta) = 2 \sin \delta - 4 \sin \frac{\delta}{2}$ . Für  $\delta = 0$  und  $\delta = \frac{\pi}{3}$  tritt in (13) Gleichheit ein, für  $0 < \delta < \frac{\pi}{3}$  ist

$$h''(\delta) = -2 \sin \delta + \sin \frac{\delta}{2} < 0;$$

$h$  ist also konkav in diesem Bereich und damit gilt die Behauptung.

2. Für  $\frac{\pi}{3} \leq \delta \leq \frac{2\pi}{3}$  ist

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi - \delta}{2}\right) &= \frac{4 \sin \frac{\delta}{2}}{\cos\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} \left[ 1 - \sin \frac{\delta}{2} \sin\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \right] = \\ &= \frac{(4 - 2\sqrt{3}) \sin \frac{\delta}{2}}{\cos\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} + 2 \sin \delta. \end{aligned}$$



Somit bleibt noch

$$\frac{2 \sin \frac{\delta}{2}}{\cos \left( \frac{\delta}{2} - \frac{\pi}{6} \right)} \equiv \frac{3\delta}{\pi}$$

zu zeigen (beachte  $\sqrt{3}-2 < 0$ ). Dies ist wegen

$$\frac{2 \sin \frac{\delta}{2}}{\cos \left( \frac{\delta}{2} - \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{2 \sin \frac{\delta}{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{3} \cos \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\delta}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3} \cot \frac{\delta}{2} + 1}$$

äquivalent mit

$$\frac{2\pi}{3} \equiv \varepsilon + \varepsilon \sqrt{3} \cot \varepsilon \quad \text{für} \quad \frac{\pi}{6} \equiv \varepsilon \equiv \frac{\pi}{3}.$$

An den Intervallgrenzen gilt Gleichheit und da für die Funktion  $k(\varepsilon) := \varepsilon + \varepsilon \sqrt{3} \cot \varepsilon$  für  $\frac{\pi}{6} \equiv \varepsilon \equiv \frac{\pi}{3}$

$$k''(\varepsilon) = \frac{2\sqrt{3}}{\sin^2 \varepsilon} (\varepsilon \cot \varepsilon - 1) < 0$$

gilt (wegen  $\varepsilon \cot \varepsilon \equiv \frac{\pi}{6} \sqrt{3} < 1$ ), ist damit die Ungleichung bewiesen.

**7.2. Bezeichnungen im Fall  $n > 2$ .** Sei nun  $\mathcal{G}$  eine  $A$ -zusammenhängende Packung von  $n$  Einheitskreisen und  $n > 2$ . Dem äußeren Ufer des Peripheriegraphen  $G(\mathcal{G})$  im mathematisch positiven Sinne folgend numerieren wir die peripheren Kreise von  $\mathcal{G}$  und deren Mittelpunkte von 1 bis  $p$  (wobei  $p = p(\mathcal{G})$ ); Artikulationspunkte von  $G(\mathcal{G})$  werden dabei mehrfach numeriert. Seien also  $K_1 = x_1 + B, \dots, K_p = x_p + B$  die peripheren Kreise von  $\mathcal{G}$  und  $u_i := \text{conv} \{x_i, x_{i+1}\}$  (mit  $x_{p+1} := x_1$ ) seien die Kanten von  $G(\mathcal{G})$  (dabei treten Brücken zweifach auf).  $A_i$  bezeichne den gemeinsamen Außenkreis von  $K_i$  und  $K_{i+1}$  mit dem Mittelpunkt  $y_i$ . Schließlich führen wir noch folgende Winkelbezeichnungen ein:

$$\alpha_i := \angle x_{i+1} x_i y_i, \quad \beta_i := \angle x_{i-1} x_i y_{i-1}, \quad \gamma_i := \angle y_i x_i y_{i-1}$$

(vgl. hierzu Abb. 7). Es gilt dann  $\alpha_i = \beta_{i+1}$  und  $v_i := \alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi$  ist der Außennormalenwinkel von  $G(\mathcal{G})$  bei  $x_i$ , der negativ wird, wenn  $x_i$  eine einspringende Ecke ist. Für diese Winkel hat man die folgenden Beschränkungen:

$$(14) \quad \begin{aligned} 0 < \alpha_i, \quad \beta_i &\leq \frac{\pi}{3}, \\ 0 &\leq \gamma_i \leq \frac{5}{3} \pi, \\ -\frac{2}{3} \pi < v_i &\leq \pi, \end{aligned}$$

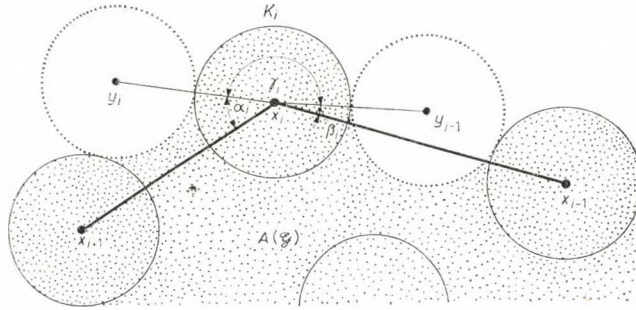


Abb. 7

und wenn  $x_i$  keine Ecke von  $G(\mathcal{G})$  ist — diese ist durch  $v_i = \pi$  charakterisiert —; dann hat man  $v_i < \frac{5}{6} \pi$ . Außerdem gilt

$$(15) \quad \sum_{i=1}^p v_i = 2\pi.$$

**7.3. Kreisbogenmengen.** Der Beweis unseres Satzes beruht wesentlich darauf, den Flächenbeitrag eines Teils der Peripherie zur  $P$ -Hülle einer Kreispackung abzuschätzen. Um diese Abschätzung so vornehmen zu können, daß sie nur von der Lage der benachbarten peripheren Kreise, nicht aber von inneren Kreisen abhängt, betrachten wir Kreisbogenmengen: Unter einer *Kreisbogenmenge* wollen wir eine zusammenhängende, kompakte Punktmenge verstehen, deren Rand glatt ist und aus endlich vielen Kreisbogenstücken vom Radius 1 besteht. Eine Kreisbogenmenge ist entweder selbst eine Kreisscheibe oder sie enthält mindestens eine Einheitskreisscheibe, bzw. genauer: Treten im Rand überhaupt konkave Kreisbögen auf, so gibt es im Rand auch mindestens zwei konvexe Kreisbögen, deren zugehörige Kreise ganz in der Kreisbogenmenge liegen.

Für solche Kreisbogenmengen ist in natürlicher Weise auch die  $P$ -Hülle definiert: Für je zwei konvexe Randkreisbögen, zu denen ein gemeinsamer, berührender Außenkreis existiert, führe man die in Abschnitt 3 beschriebene Konstruktion durch und bilde dann die  $A$ -Hülle.

Nun sei  $\mathcal{G}$  eine Kreispackung und  $\mathcal{J}$  eine Teilmenge der Peripherie von  $\mathcal{G}$  derart, daß  $\mathcal{G} \setminus \mathcal{J}$  nicht leer ist und  $\mathcal{J}$  keinen Kreis von  $\mathcal{G}$  enthält, dessen Mittelpunkt ein Artikulationspunkt von  $G(\mathcal{G})$  ist. Sei  $I$  die Menge aller Indices  $i \in \{1, \dots, p\}$ , sodaß  $K_i$  und  $K_{i+1}$  beide zu  $\mathcal{J}$  gehören, und  $J$  die Menge aller  $i$  mit  $K_i \in \mathcal{J}$ , deren periphere Nachbarn beide nicht zu  $\mathcal{J}$  gehören. Dann sei  $M(\mathcal{G}, \mathcal{J})$  die eindeutig bestimmte maximale Kreisbogenmenge in der Menge

$$\text{cl} \left[ \text{int } A(\mathcal{G}) \setminus \left( \bigcup_{i \in I} \text{int } A(K_i \cup K_{i+1}) \cup \bigcup_{i \in J} \text{int } K_i \right) \right],$$

wobei  $\text{int } X$  das Innere und  $\text{cl } X$  die abgeschlossene Hülle von  $X$  bezeichnet.  $M(\mathcal{G}, \mathcal{J})$  enthält  $\mathcal{G} \setminus \mathcal{J}$ , hat mit  $\bigcup_{K \in \mathcal{J} \cup \mathcal{M}(\mathcal{G})} K$  nur Randpunkte gemeinsam und ist als Kreisbogenmenge maximal mit dieser Eigenschaft. Ferner gilt  $P(\mathcal{G} \setminus \mathcal{J}) \subseteq P(M(\mathcal{G}, \mathcal{J}))$ .

Abbildung 8 zeigt  $M(\mathcal{G}, \mathcal{J})$  schattiert für eine Kreispackung  $\mathcal{G}$ , wobei  $\mathcal{G}$  aus den durchgezogenen Kreisen besteht (punktierte Kreise sind Außenkreise, wie in den anderen Abbildungen auch) und  $\mathcal{J}$  aus allen Kreisen der Peripherie, deren Mittelpunkte durch dicke Punkte markiert sind.

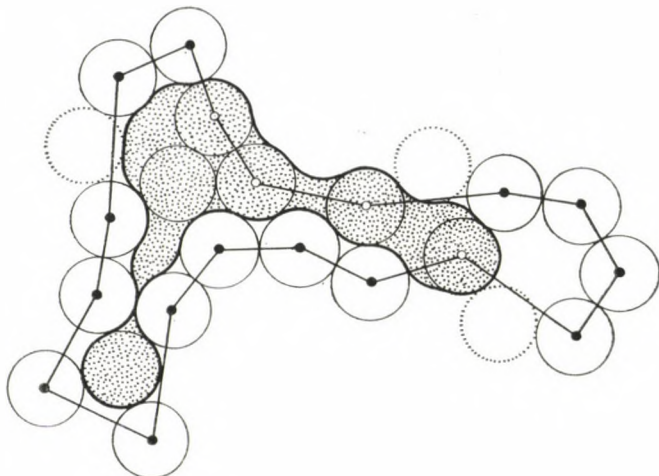


Abb. 8

**7.4. Zerlegbare Familien.** Eine Kreispackung  $\mathcal{G}$ , deren  $P$ -Hülle minimale Fläche hat, läßt sich im Falle  $n > 2$  nicht zerlegen in zwei Teilfamilien  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  mit  $P(\mathcal{G}_1) \cap P(\mathcal{G}_2) = \emptyset$ . Dies folgt mit (9a) (wo Gleichheit nur bei  $n_1 = n_2 = 1$  eintritt) aus folgender allgemeineren Aussage über Kreisbogenmengen:

**LEMMA.** Sind  $M, M_1, \dots, M_k$  ( $k \geq 2$ ) Kreisbogenmengen mit  $M_1 \cup \dots \cup M_k \subseteq M$  und  $P(M_i) \cap P(M_k) = \emptyset$  für alle  $i \neq k$ , so gilt

$$(16) \quad F(P(M)) \geq F(P(M_1)) + \dots + F(P(M_k)) + (k-1)(4-\pi).$$

**BEWEIS.** Dies folgt induktiv und es genügt, sich den Fall  $k=2$  anzusehen. Dazu dürfen wir annehmen, daß die Kreisbogenmenge  $M$  minimal ist mit der Eigenschaft  $M_1 \cup M_2 \subseteq M$ .

**Fall 1.**  $M_1$  und  $M_2$  besitzen ein Paar gemeinsamer Außenkreise mit dem Mittelpunktsabstand  $> 2\sqrt{3}$ . Sei  $K$  einer dieser Außenkreise. Dazu gibt es Kreise  $K_1$  und  $K_2$  derart, daß das von allen drei Kreisen gebildete Kreisbogendreieck ganz in der Menge  $P(M) \setminus (P(M_1) \cup P(M_2))$  liegt. Wenn nicht sowieso die in Abb. 9a schattierte Fläche mit dem Inhalt  $2 - \frac{\pi}{2}$  ganz in dieser Menge liegt, so werden jedenfalls die möglicherweise durch  $P(M_1)$  oder  $P(M_2)$  abgeschnittenen Spitzen durch  $P(M)$  wieder ausgeglichen. Das entsprechende Flächenstück, das dem zweiten gemeinsamen Außenkreis von  $M_1$  und  $M_2$  zuzuordnen ist, ist wegen der Abstandsbedingung zu ersterem disjunkt.

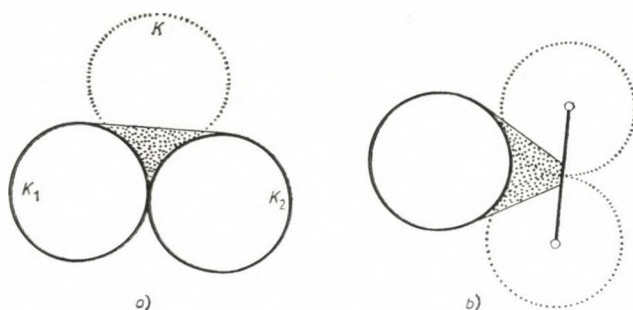


Abb. 9

*Fall 2.* Gibt es zu  $M_1$  und  $M_2$  ein Paar gemeinsamer Außenkreise mit Mittelpunktsabstand  $\leq 2\sqrt{3}$  oder gar keine gemeinsamen Außenkreise, so können wir, wie in Abb. 9b angedeutet, jeder der Mengen  $M_1$  und  $M_2$  einen Flächenanteil von  $P(M) \setminus (P(M_1) \cup P(M_2))$  des Inhalts  $2 - \frac{\pi}{2}$  zuordnen, wobei man ähnliche Argumente verwendet wie im Fall 1.

**7.5. Flächenbeitrag einzelner peripherer Kreise.** Periphere Kreise, die aus der Packung „herausragen“, leisten zur  $P$ -Hülle einen großen Flächenbeitrag. Diesen Beitrag wollen wir hier abschätzen.

**LEMMA.** Sei  $\mathcal{G}$  eine Packung aus  $n$  Kreisen,  $n > 2$ , und sei  $K_i$  ein peripherer Kreis von  $\mathcal{G}$  mit  $\gamma_i \geq \frac{2}{3}\pi$ . Dann gilt

$$(17) \quad F_i := F(P(\mathcal{G}) \setminus P(M(\mathcal{G}, \{K_i\}))) \geq 2\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) \left( \frac{3\gamma_i}{\pi} - 2 \right).$$

**BEWEIS.** *Fall 1.*  $x_i$  ist eine Endecke des Peripheriegraphen. Dann ist  $\nu_i = \pi$ ,  $\gamma_i \geq \frac{4}{3}\pi$  und  $K_{i-1} = K_{i+1}$ . Hier kann man  $F_i$  nach unten abschätzen durch

$$F_i \geq F(P(\{K_i, K_{i-1}\}) \setminus K_{i-1}),$$

denn die im allgemeinen in  $P(\{K_i, K_{i-1}\}) \setminus K_{i-1}$  enthaltenen Flächenanteile von  $M(\mathcal{G}, \{K_i\})$  (das sind „Zwickel“, begrenzt von  $K_{i-1}$  und Tangenten an  $K_{i-1}$ , in Abb. 10 schraffiert) sind höchstens kleiner als die nicht in  $P(\{K_i, K_{i-1}\})$  enthaltenen Zwickel von  $P(\mathcal{G}) \setminus P(M(\mathcal{G}, \{K_i\}))$  (in Abb. 10 schattiert), die bei der Bildung der  $A$ -Hülle entstehen. Dieses „Zwickelargument“ (Z) wird im folgenden noch mehrmals benutzt. Somit ist  $F_i \geq 2f(\alpha_i)$  und mit  $|2\pi - 2\alpha_i = \gamma_i$  und  $\gamma_i \geq \frac{4}{3}\pi$  folgt nach (12) die Behauptung.

*Fall 2.*  $x_i$  ist keine Endecke, aber  $\gamma_i \geq \frac{4}{3}\pi$ . Nach Definition von  $M(\mathcal{G}, \{K_i\})$  erhält man hier für  $F_i$  dieselbe Abschätzung wie im Fall 1.



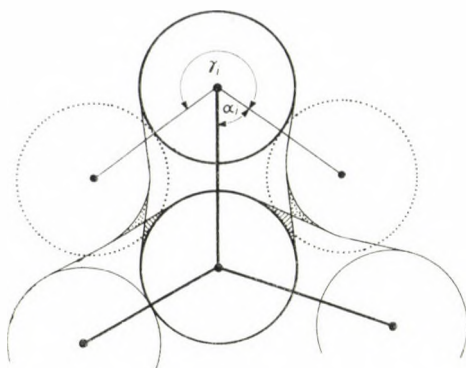


Abb. 10

Fall 3.  $\frac{2}{3}\pi \equiv \gamma_i < \frac{4}{3}\pi$  (und daher  $x_i$  keine Endecke).  $F_i$  kann hier unabhängig von der tatsächlichen Lage der beiden peripheren Nachbarn von  $K_i$  (die aber jedenfalls Berührkreise der durch den Winkel  $\gamma_i$  in ihrer gegenseitigen Lage fixierten Außenkreise sind) abgeschätzt werden durch die in Abbildung 11 schattierte Fläche,

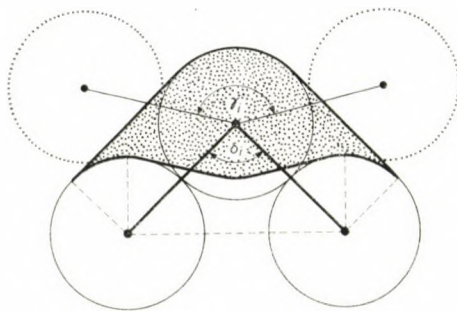


Abb. 11

wobei wieder vom Argument (Z) Gebrauch gemacht wird. Mit  $\delta_i := \frac{4}{3}\pi - \gamma_i$  gilt demnach

$$F_i \cong 4 + 2 \sin \delta_i - f\left(\frac{\pi - \delta_i}{2}\right)$$

und mit (13) folgt hieraus die Behauptung.

Wir nennen einen peripheren Kreis  $K_i$  einer Kreispackung  $\mathcal{G}$  *exponiert*, wenn  $\gamma_i > \pi$  ist. Nach (17) gilt für einen exponierten Kreis  $F_i > 2 + \sqrt{3}$ . Daher gilt:

**KOROLLAR.** Eine Kreispackung  $\mathcal{G}$  aus mehr als zwei Kreisen, deren P-Hülle zusammenhängend ist und minimale Fläche hat, kann keine exponierten Kreise enthalten.

Denn enthält  $\mathcal{G}$  einen exponierten Kreis  $K_i$ , so folgt

$$F(P(\mathcal{G})) > F(P(M(\mathcal{G}, \{K_i\}))) + 2 + \sqrt{3} \cong F_0(n) + 2 + \sqrt{3}$$

und zwar mit (16) und (9a) auch dann, wenn  $\mathcal{G} \setminus \{K_i\}$  nicht  $A$ -zusammenhängend ist. Für  $n \cong 2$  ist aber  $F_0(n+1) \cong F_0(n) + 2 + \sqrt{3}$ .

Dies erledigt insbesondere den Fall  $n=3$  unseres Hauptsatzes 4.3: Eine  $A$ -zusammenhängende Packung aus drei Kreisen, die sich nicht paarweise berühren, enthält wenigstens einen exponierten Kreis.

7.6. Der Fall  $p(\mathcal{G}) \cong p(n)$ ,  $n > 3$ . Sei  $\mathcal{G}$  eine  $A$ -zusammenhängende Kreispackung aus  $n > 3$  Kreisen mit  $p = p(\mathcal{G}) \cong p_0(n)$ . Wir dürfen annehmen, daß  $\mathcal{G}$  gesättigt ist und keine exponierten Kreise enthält.

Die Menge  $C = C(\mathcal{G})$  besitzt eine Triangulierung  $\mathcal{C}$  mit den Mittelpunkten der Kreise aus  $\mathcal{G}$  als Ecken derart, daß kein Dreieckswinkel  $\cong \frac{2}{3}\pi$  auftritt. Eine solche erhält man aus dem in  $C$  liegenden Teil des Dualkomplexes des Voronoï-komplexes von  $\mathcal{G}$ , indem man etwaige 4-Ecke und 5-Ecke ( $n$ -Ecke mit  $n > 5$  können bei gesättigten Packungen nicht auftreten) durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt. Wäre bei diesem Komplex etwa  $\text{conv}\{a, b, c\}$  ein Dreieck mit  $\angle acb \cong \frac{2}{3}\pi$ , so könnte zunächst die lange Dreiecksseite  $\text{conv}\{a, b\}$  keine Randkante von  $\mathcal{C}$  sein (da sonst  $c+B$  ein peripheres Mitglied von  $\mathcal{G}$  wäre und  $\text{conv}\{a, b, c\}$  gar nicht in  $C$  liegen würde); ist sie aber eine innere Kante, so hätte der gemeinsame Berührungskreis von  $a+B$ ,  $b+B$  und  $c+B$  einen Radius  $\cong 1$  und sein Inneres träge kein Mitglied von  $\mathcal{G}$  (andernfalls wäre  $\text{conv}\{a, b\}$  keine Kante von  $\mathcal{C}$ ), d.h.  $\mathcal{G}$  wäre nicht gesättigt.

a) Sei zunächst  $|x_i - x_{i+1}| \cong 2\sqrt{3}$  für alle  $i$ . Dann gilt  $C \subseteq P(\mathcal{G})$ . Für die Abschätzung der Fläche von  $C$  gilt Satz 4.2. Zur Abschätzung der Fläche von  $R := P(\mathcal{G}) \setminus C$  zerlegen wir diese Menge in Flächenstücke, die den Ufern  $u_i$  und den Ecken  $x_i$  zugeordnet werden können. Erstere haben eine Fläche von  $f(\alpha_i)$ , letztere sind Kreissektoren der Fläche  $\frac{1}{2}|v_i|$ . Im Falle  $v_i < 0$  tritt bei ersteren eine Überschneidung auf (siehe Abb. 12) und zwar um einen Kreissektor eben der Fläche

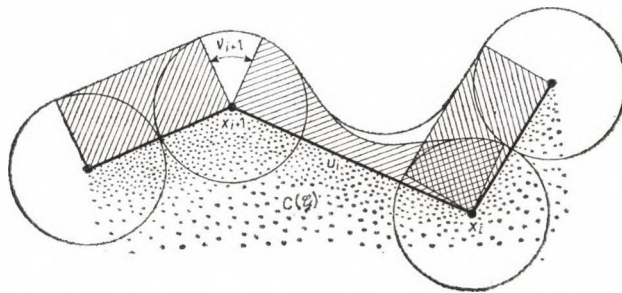


Abb. 12

$\frac{1}{2} |v_i|$ ; die Zwickel können nach dem Argument (Z) (siehe 7.5) wieder unberücksichtigt bleiben. Somit gilt

$$F(R) \cong \sum_{i=1}^p \left( f(\alpha_i) + \frac{1}{2} v_i \right)$$

und mit  $f(\alpha_i) \cong 2$  und (15) folgt daraus

$$F(R) \cong 2p + \pi.$$

Für  $F(C)$  gilt die Abschätzung (3), d.h.

$$F(C) \cong (n-1) 2\sqrt{3} - p\sqrt{3}.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$F(P(\mathcal{G})) \cong (n-1) 2\sqrt{3} + (2-\sqrt{3})p + \pi,$$

mithin  $F(P(\mathcal{G})) \cong F_0(n)$  wegen  $p \cong p_0(n)$  nach Fallvoraussetzung und Gleichheit kann nur für Gitterpackungen eintreten.

b) Falls Kanten der Länge  $> 2\sqrt{3}$  in  $G(\mathcal{G})$  existieren, so können jedenfalls nicht zwei solcher Kanten zu einem Simplex von  $\mathcal{G}$  gehören, da sonst  $\mathcal{G}$  einen exponierten Kreis hätte. Jeder solchen Kante kann man also umkehrbar eindeutig das angrenzende Simplex von  $\mathcal{G}$  zuordnen. Dieses Simplex (das bei hinreichend kleinem  $\alpha_i$  nicht ganz in  $P(\mathcal{G})$  liegt) hat mindestens die Fläche des Dreiecks  $\text{conv}\{x_{i+1}, x_i, z\}$  (siehe Abb. 13) und wird zusammen mit dem der Kante  $u_i$  zuzurechnenden Randan-

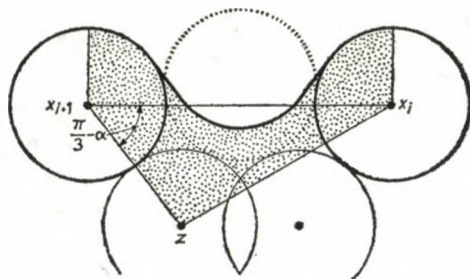


Abb. 13

teil abgeschätzt durch

$$F_i \cong 4 + 4 \left( \cos \alpha_i - \cos \left( \frac{\pi}{3} - \alpha_i \right) \right) \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi}{6} + \alpha_i \right) \right).$$

Nach den gleichen Argumenten wie oben unter a) ist nämlich  $F$  mindestens gleich der Summe der Flächen der Rechtecke mit der Höhe 1 und den Basislinien  $\text{conv}\{x_{i+1}, z\}$ ,  $\text{conv}\{w, x_i\}$  und  $\text{conv}\{z, w\}$  — letztere hat die Länge  $4 \cos \alpha - 4 \cos \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right)$  — abzüglich der Fläche des Dreiecks  $\text{conv}\{z, w, x\}$ . Hieraus folgt

$$F_i \cong 4 > 2 + \sqrt{3},$$

denn für  $0 \leq \alpha_i \leq \frac{\pi}{6}$  sind  $\cos \alpha_i - \cos \left( \frac{\pi}{3} - \alpha_i \right)$  und  $1 - \cos \left( \frac{\pi}{6} + \alpha_i \right)$  beide  $\geq 0$ .

Treten also  $k$  solche Kanten auf, so ist wegen der separaten Behandlung dieser Kanten und der angrenzenden Dreiecke von  $\mathcal{G}$  bei der obigen Abschätzung von  $F(C)$  zunächst  $k\sqrt{3}$  abzuziehen und bei  $F(R)$  ist  $2k$  abzuziehen, andererseits ist dann  $k(2 + \sqrt{3})$  wieder hinzuzurechnen und wir erhalten die alte Abschätzung, wobei hier Gleichheit nicht eintreten kann.

**7.7. Artikulationen des Peripheriegraphen.** Wir betrachten nun den Fall, daß der Peripheriegraph von  $\mathcal{G}$  einen Artikulationspunkt enthält, jedoch keine Endecken (dieser Fall ist in 7.5 erledigt). Unter Verdoppelung des zu dem Artikulationspunkt gehörenden Kreises zerlegen wir  $\mathcal{G}$ , wie in Abbildung 14 angedeutet, in zwei Teil-

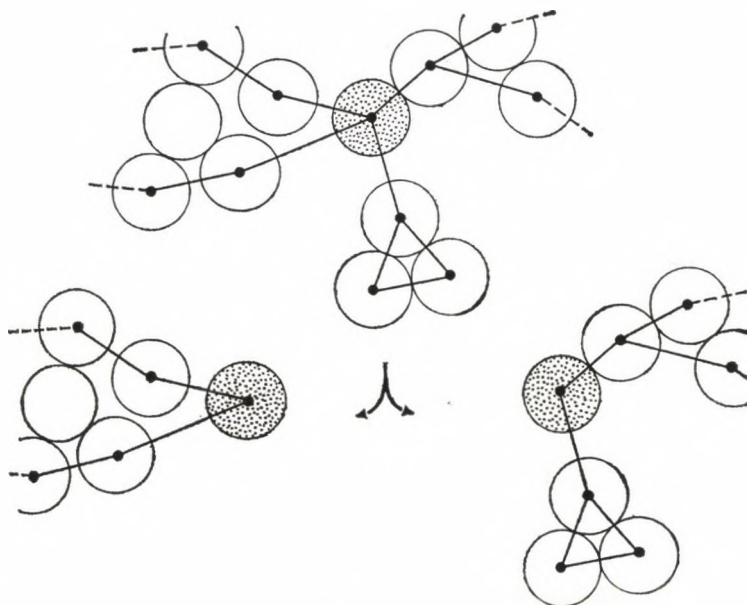


Abb. 14

familien  $\mathcal{G}_i$  ( $i=1, 2$ ) mit  $n_i$  Kreisen, wobei  $n+1=n_1+n_2$  ist und  $n_i \geq 3$ , da  $G(\mathcal{G})$  keine Endecke enthält. Unter Beachtung des Arguments (Z) folgt

$$(18) \quad F(P(\mathcal{G})) \cong F(P(\mathcal{G}_1)) + F(P(\mathcal{G}_2)) - \pi.$$

Mit Induktionsannahme und (9) erhält man hieraus

$$F(P(\mathcal{G})) \cong F_0(n_1) + F_0(n_2) - \pi \cong F_0(n_1 + n_2) - 2\sqrt{3} \cong F_0(n).$$

Dabei gilt stets  $F(P(\mathcal{G})) > F_0(n)$ , auch im Falle  $n_1=n_2=3$ , da dann  $F_0(6) - F_0(5) = 2 + \sqrt{3} > 2\sqrt{3}$  ist. Im Hinblick auf spätere Flächenabschätzungen bemerken wir noch, daß man einen Kreis  $K$  einer  $A$ -zusammenhängenden Familie  $\mathcal{G}$  schon dann als Artikulation betrachten kann, wenn sich  $\mathcal{G}$  in zwei Teilfamilien  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  mit



$\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \{K\}$  zerlegen läßt derart, daß  $P(\mathcal{G}_1) \cap P(\mathcal{G}_2)$  nur aus  $K$  mit zwei ange-setzten Zwickeln (vgl. 7.5) besteht und die zu den Zwickeln gehörenden Kreisbögen von  $K$  die Bogenlänge  $\frac{\pi}{2}$  nicht überschreiten. Auch in diesem Falle gilt die Ab-schätzung (18).

7.8. *Randketten.* Im allgemeinen besitzt eine Kreispackung keine exponierten Kreise, mit deren Hilfe ein einschrittiger Induktionsschluß zum Beweis unseres Hauptsatzes möglich ist (vgl. 7.5). Es müssen dann ganze Ketten peripherer Kreise entfernt werden, unter Umständen alle. Der Kennzeichnung geeigneter Ketten dient dieser Abschnitt.

Sei  $\mathcal{G}$  eine  $A$ -zusammenhängende Kreispackung; gemäß 7.7 nehmen wir ferner an, daß der Peripheriegraph von  $\mathcal{G}$  keine Artikulationen besitzt.  $G(\mathcal{G})$  ist also ein Polygon.

Jedem peripheren Kreis ordnen wir nun noch folgende Winkel zu (für die Grundbezeichnungen vergleiche 7.2):

$$\xi_i := 2\pi - \gamma_i - 2 \max\left(\frac{\pi}{6}, \alpha_i\right),$$

$$\eta_i := 2\pi - \gamma_i - 2 \max\left(\frac{\pi}{6}, \beta_i\right),$$

$$\varepsilon_i := \gamma_i + \xi_i + \eta_i - 2\pi = 2\pi - \gamma_i - 2 \max\left(\frac{\pi}{6}, \alpha_i\right) - 2 \max\left(\frac{\pi}{6}, \beta_i\right).$$

Abbildung 15 erläutert die Bedeutung der Winkel. Im Falle  $\alpha_i \leq \frac{\pi}{6}$ ,  $\beta_i \leq \frac{\pi}{6}$  ist  $\varepsilon_i = \delta_i$  (siehe 7.5).

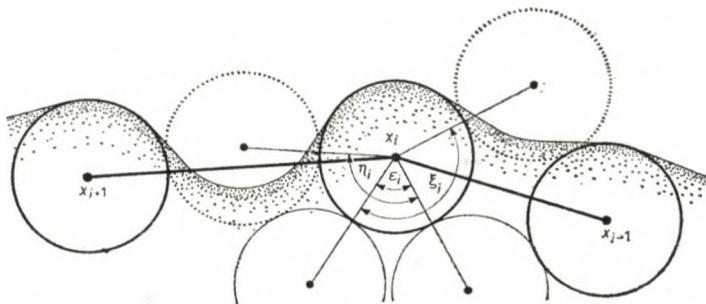


Abb. 15

Nun führen wir im Peripheriegraphen  $G(\mathcal{G})$  eine Eckenfärbung durch nach folgenden Vorschriften:

- (F1) Ist  $\varepsilon_i > \frac{2}{3}\pi$  (und damit  $\xi_i > \pi$  und  $\eta_i > \pi$ ), so wird  $x_i$  rot gefärbt.
- (F2) Ist  $\xi_i > \pi$  und  $x_{i-1}$  rot gefärbt, so wird auch  $x_i$  rot gefärbt.
- (F3) Ist  $\eta_i > \pi$  und  $x_{i+1}$  rot gefärbt, so wird auch  $x_i$  rot gefärbt.

- (F4) Ist  $\delta_i > \frac{2}{3}\pi$ , sind  $|x_{i-1} - x_i|$  und  $|x_i - x_{i+1}|$  beide  $\leq 2\sqrt{3}$  und sind  $x_{i-1}$  und  $x_{i+1}$  beide rot gefärbt, so wird auch  $x_i$  rot gefärbt.

Läßt sich keine weitere Ecke mehr rot färben, so werden alle übrigen Ecken schwarz gefärbt; entsprechend nennen wir die zugehörigen Kreise rot bzw. schwarz und  $\mathcal{S}$  bezeichne die Menge der schwarzen Kreise. Mit dieser Menge  $\mathcal{S}$  bilden wir nun die in Abschnitt 7.3 beschriebene Kreisbogenmenge  $M(\mathcal{G}, \mathcal{S})$  und nennen einen schwarzen Kreis *abstehend*, wenn er  $M(\mathcal{G}, \mathcal{S})$  nicht trifft. Übrigens werden bei Anwendung des Markierungsprozesses auf die in Abbildung 8 wiedergegebene Kreisfamilie genau die durch kleine, leere Kreise gekennzeichneten Ecken rot gefärbt.

Schließlich färben wir noch Kanten rot bzw. schwarz nach folgenden Vorschriften:

- (F5) Haben beide Ecken einer Kante der Länge  $\leq 2\sqrt{3}$  dieselbe Farbe, so erhält auch die Kante diese Farbe.
- (F6) Sind beide Ecken einer Kante der Länge  $> 2\sqrt{3}$  schwarz und berührt der gemeinsame Außenkreis der betreffenden Kreise  $M(\mathcal{G}, \mathcal{S})$  nicht, so sei auch diese Kante schwarz.

Der in (F6) beschriebene Fall kann nur dann eintreten, wenn wenigstens einer der beiden Kreise abstehend ist. — Unter roten Ketten verstehen wir nun Sequenzen aufeinanderfolgender roter Ecken des Peripheriegraphen, die durch rote Kanten verbunden sind; analog sind schwarze Ketten definiert. Eine Kette kann auch aus einer einzelnen Ecke bestehen. Ist  $\varepsilon \leq \frac{2}{3}\pi$  für jedes  $i$ , so sind alle Ecken schwarz; der Peripheriegraph ist dann insgesamt schwarz oder er besteht aus einer oder mehreren schwarzen Ketten, deren Endecken durch ungefärbte Kanten miteinander verbunden sind. Im allgemeinen zerfällt der Peripheriegraph in maximale schwarze und rote Ketten; dabei enthält jede maximale rote Kette mindestens eine gemäß (F1) gefärbte Ecke. Ist  $S = (x_{k+1}, \dots, x_{k+r})$  eine Kette des Peripheriegraphen, so setzen wir

$$\begin{aligned} v(S) &:= v_{k+1} + \dots + v_{k+r}, \\ \alpha(S) &:= \alpha_{k+r} \quad \text{und} \quad \beta(S) := \beta_{k+1} \quad \text{sowie} \\ \gamma(S) &:= \pi + v(S) - \alpha(S) - \beta(S). \end{aligned}$$

LEMMA. Für jede maximale rote Kette  $S$  gilt

$$v(S) < -\left| \frac{\pi}{6} - \beta(S) \right| - \left| \frac{\pi}{6} - \alpha(S) \right|.$$

BEWEIS. Eine maximale rote Kette läßt sich zerlegen in Teilketten, die je eine gemäß (F1) gefärbte Ecke enthalten, von der ausgehend die Teilketten nach den Vorschriften (F2) und (F3) gefärbt werden können, und die direkt durch eine rote Kante oder durch eine gemäß (F4) gefärbte Ecke verbunden sind. Zunächst betrachten wir solche Teilketten und beweisen hierfür die Behauptung durch Induktion nach ihrer Länge  $r$ .

Im Falle  $r=1$  ist diese Ecke  $x_i$  gemäß (F1) gefärbt, also  $\varepsilon_i > \frac{2}{3}\pi$ , und die Behauptung folgt sofort aus

$$\varepsilon_i + \max\left\{\alpha_i, \frac{\pi}{3} - \alpha_i\right\} + \max\left\{\beta_i, \frac{\pi}{3} - \beta_i\right\} = \pi - v_i.$$

Ist  $(x_{k+1}, \dots, x_{k+r}) = S$  eine rote Kette und kann etwa  $x_{k+r}$  von  $x_{k+r-1}$  aus rot gefärbt werden, so ist  $\xi_{k+r} > \pi$  sowie  $\beta_{k+r} \equiv \frac{\pi}{6}$  und damit

$$\begin{aligned} v_{k+r} &= \pi - \xi_{k+r} + \beta_{k+r} - \max\left\{\frac{\pi}{3} - \alpha_{k+r}, \alpha_{k+r}\right\} < \\ &< \beta_{k+r} - \frac{\pi}{6} + \min\left\{\alpha_{k+r} - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} - \alpha_{k+r}\right\}. \end{aligned}$$

Mit der Induktionsannahme für  $S' = (x_{k+1}, \dots, x_{k+r-1})$  folgt wegen  $\alpha(S') = \alpha_{k+r-1} = \beta_{k+r}$  die Behauptung für  $S$ .

Gilt das Lemma für zwei Teilketten  $S_1$  und  $S_2$ , die durch eine Kante verbunden sind, so natürlich auch für die aus  $S_1$  und  $S_2$  gebildete ganze Kette. Bleibt noch der Fall zu betrachten, daß  $S_1$  und  $S_2$  über eine Ecke  $x_i$  gemäß Färbungsvorschrift (F4) verbunden sind. Dann ist  $\alpha(S_1) = \beta_i$  und  $\alpha_i = \beta(S_2)$  und es folgt

$$\begin{aligned} v(S) &= v(S_1) + v_i + v(S_2) < \\ &< -\left|\frac{\pi}{6} - \beta(S_1)\right| + \frac{\pi}{6} - \alpha(S_1) + v_i + \frac{\pi}{6} - \beta(S_2) - \left|\frac{\pi}{6} - \alpha(S_2)\right| = \\ &= -\left|\frac{\pi}{6} - \beta(S)\right| + \frac{2}{3}\pi - \delta_i - \left|\frac{\pi}{6} - \alpha(S)\right| < \\ &< -\left|\frac{\pi}{6} - \beta(S)\right| - \left|\frac{\pi}{6} - \alpha(S)\right|. \end{aligned}$$

Auf Grund des Lemmas ist also  $v(S) < 0$  für jede maximale rote Kette, was wegen  $\sum_{i=1}^p v = 2\pi$  die Existenz schwarzer Ketten sichert. Die maximalen schwarzen Ketten bzw. die zugehörigen Kreise bezeichnen wir nun als *Randketten*. Unter Umständen ist dies die gesamte Peripherie. Es gilt somit:

FOLGERUNG. Sind  $S_1, \dots, S_k$  die sämtlichen Randketten von  $\mathcal{G}$ , so gilt

$$(19) \quad v(S_1) + \dots + v(S_k) \equiv 2\pi.$$

Gleichheit kann nur dann eintreten, wenn keine roten Ketten existieren.

7.9. Der Fall  $p(\mathcal{G}) < p_0(n)$ . Wir kommen nun zum Abschluß des Beweises von 4.3. Im Hinblick auf frühere Abschnitte dürfen wir annehmen, daß die Kreispackung

$A$ -zusammenhängend ist und der Peripheriegraph keine Artikulationen besitzt; außerdem sei  $p(\mathcal{G}) < p_0(n)$ . Um gewisse Sonderfälle leichter ausschalten zu können, nehmen wir ferner an, daß  $P(\mathcal{G})$  minimale Fläche hat.  $\mathcal{J}$  sei die Gesamtheit aller Kreise, die zu Randketten gehören und  $s$  bezeichne ihre Anzahl. — Es ist nun die Fläche von  $P(\mathcal{G}) \setminus P(M(\mathcal{G}, \mathcal{J}))$  abzuschätzen und dazu betrachten wir zunächst einzelne Ketten:

LEMMA. Ist  $\mathcal{K} = (K_1, \dots, K_r)$  eine Randkette, so gilt

$$(20) \quad F(P(\mathcal{G}) \setminus P(M(\mathcal{G}, \mathcal{K}))) \geq 2r\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) \frac{3}{\pi} \left( \gamma(\mathcal{K}) - \frac{2}{3} \pi \right).$$

BEWEIS. Zunächst eine Vorbemerkung zur Begrenzung der Kette bei  $K_1$  (entsprechendes gilt für das Kettenende bei  $K_r$ ). Ist  $|x_1 - x_0| \leq 2\sqrt{3}$ , so ist der Peripherevorgänger  $K_0$  gemäß (F5) rot. Sei nun  $|x_1 - x_0| > 2\sqrt{3}$ . Wir betrachten den vor  $K_1$  letzten konvexen Kreisbogen  $K'_0$  von  $M(\mathcal{G}, \mathcal{K})$  mit dem Mittelpunkt  $x'_0$ . Ist  $K_0$  schwarz, so trifft der gemeinsame Außenkreis  $K_a$  von  $K_0$  und  $K_1$  den Kreisbogen  $K'_0$  gemäß (F6) und es ist  $|x_1 - x'_0| \leq 2\sqrt{3}$ . Ist  $K_0$  rot, so gilt ebenfalls  $|x_1 - x'_0| \leq 2\sqrt{3}$ : Im Falle  $|x_1 - x'_0| > 2\sqrt{3}$  enthält nämlich  $\mathcal{K}$  einen (von  $K_1$  aus gerechnet) ersten Kreis  $K_m$ , der  $K'_0$  berührt, und  $K_1, \dots, K_{m-1}$  sind abstehend. Unter den Kreisen  $K_2, \dots, K_{m-1}$  gibt es dann mindestens einen (betrachte denjenigen, der minimalen Abstand von  $K_a$  hat), der im verallgemeinerten Sinne (vgl. 7.7) als Artikulation betrachtet werden kann, im Widerspruch zur angenommenen Minimalität von  $F(P(\mathcal{G}))$ . Wenn wir also im zweiten Falle den vor  $K_1$  letzten konvexen Kreisbogen von  $M(\mathcal{G}, \mathcal{K})$  ebenfalls als einen Kreisbogen der Peripherie von  $\mathcal{G}$  betrachten, so hat  $K_1$  in jedem Falle einen roten Vorgänger im Mittelpunktsabstand  $\leq 2\sqrt{3}$ . Man beachte, daß die Hinzunahme dieses Kreises als Peripheriekreis auch die Färbung von  $K_1$  nicht ändert.

1. Sei  $r=1$ . Zufolge der Flächenminimalität von  $P(\mathcal{G})$  kann gemäß Vorbemerkung angenommen werden, daß  $K_1$  zwei rote Peripherienachbarn im Abstand  $\leq 2\sqrt{3}$  hat und daher ist gemäß (F4)  $\delta_1 \leq \frac{2}{3}\pi$ , also  $\gamma_1 \geq \frac{2}{3}\pi$  und damit folgt die Behauptung aus 7.5.

2. Sei nun  $r > 1$  und es sei angenommen, daß  $\mathcal{K}$  keine abstehenden Kreise enthält. Dann gilt  $\varepsilon_j \geq 0$  für  $j=2, \dots, r-1$  und  $\xi_1, \eta_r \geq \frac{\pi}{3}$ . In diesem Fall zerlegen wir  $P(\mathcal{G}) \setminus P(M(\mathcal{G}, \mathcal{K}))$  in Flächenanteile, die den einzelnen Kreisen zugeordnet werden können. Diese Anteile werden durch die Mittellote der Strecken  $u_i$  gegeneinander abgegrenzt, wobei jedoch der im Falle  $v_i < 0$  durch die  $A$ -Hülle definierte Kreiswinkel ganz dem Flächenstück des  $i$ -ten Kreises zuzurechnen ist (vgl. Abb. 16).

a) Beitrag eines mittleren Kreises der Kette: Es ist also  $0 \leq \varepsilon_i \leq \frac{2}{3}\pi$ ,  $\alpha_i \geq \frac{\pi}{6}$



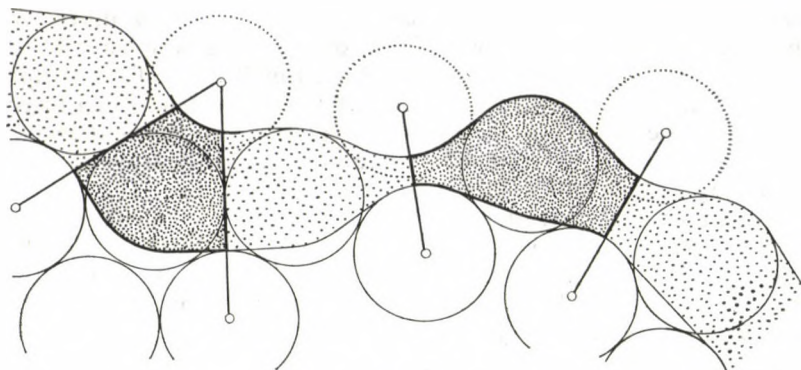


Abb. 16

und  $\beta_i \cong \frac{\pi}{6}$  und wir erhalten als Flächenanteil

$$F_i = \frac{1}{2}f(\alpha_i) + \frac{1}{2}f(\beta_i) + \sin 2\alpha_i + \sin 2\beta_i + 2 \sin \varepsilon_i - f\left(\frac{\pi - \varepsilon_i}{2}\right).$$

Mit (12), (13) und  $\sin 2\alpha_i + \sin 2\beta_i \cong 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$  erhalten wir die Abschätzung

$$F_i \cong 2\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) \frac{3v_i}{\pi}.$$

b) Beitrag des ersten Kreises: Der Winkel  $\sigma_1 := \xi_1 - \frac{\pi}{3}$  ist nach Fallvoraussetzung  $\cong 0$ ; außerdem ist  $\sigma_1 \cong \frac{2}{3}\pi$  wegen (F2). Der Flächenbeitrag

$$F_1 \cong 2 + \frac{1}{2}f(\alpha_1) + 2 \sin 2\alpha_1 + 2 \sin \sigma_1 - f\left(\frac{\pi - \sigma_1}{2}\right)$$

läßt sich dann wie bei a) mit (12) und (13) abschätzen durch

$$F_1 \cong 2\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) \frac{3}{\pi} \left( v_1 + \left( \frac{\pi}{6} - \beta_1 \right) \right).$$

c) Analog zu b) erhält man als Beitrag des letzten Kreises

$$F_r \cong 2\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) \frac{3}{\pi} \left( v_r + \left( \frac{\pi}{6} - \alpha_r \right) \right).$$

Summierung der Beiträge unter a), b) und c) ergibt die Behauptung für diesen Fall 2.

3. Es bleibt im Falle  $r > 1$  zu zeigen, daß die Flächenabschätzung auch beim Auftreten abstehender Kreise gilt. Dies geschieht durch Induktion nach der Anzahl der abstehenden Kreise in der Peripherie und wir untersuchen dazu die Wirkung

der sukzessiven Wegnahme solcher Kreise. Entsteht  $\mathcal{G}'$  aus  $\mathcal{G}$  durch Wegnahme eines abstehenden Kreises  $K_j$ , so wird in  $\mathcal{G}'$  die Färbung peripherer Kreise von  $\mathcal{G}$  beibehalten, jedoch werden die relevanten Winkel in Bezug auf die Peripherie von  $\mathcal{G}'$  (die zum Teil aus Kreisbogen von  $M(\mathcal{G}, \mathcal{K})$  bestehen kann) neu berechnet. Es ändern sich nur die Winkel der peripheren Nachbarn von  $K_j$  und zwar ist  $v'_i \equiv v_i$  und  $\varepsilon'_i \equiv \varepsilon_i$  für  $i=j-1, j+1$ . (Insbesondere wäre ein in  $\mathcal{G}$  schwarzer Kreis auch bei Neufärbung bezüglich  $\mathcal{G}'$  wieder schwarz zu färben.)

Wir bemerken zunächst: Ist  $K_j$  abstehend und sind die Nachbarn in der Randkette nicht abstehend, so gilt offensichtlich  $\varepsilon_j < 0$ . Sind mehrere aufeinanderfolgende Kreise der Randkette abstehend, so kommt entweder  $\mathcal{G}$  von vornherein nicht als Kandidat für minimale  $P$ -Hülle in Betracht, oder aber man kann diese Kreise so sukzessive wegnehmen, daß für jeden der Kreise in Bezug auf die Restfamilie  $\varepsilon < 0$  gilt, er jedoch nicht Endkreis oder gar isolierter Kreis ist. Um dies einzusehen, seien nun  $K_j, \dots, K_m$  ( $j < m$ ) abstehende Kreise einer Kette.  $K_{j-1}$  und  $K_{m+1}$  sind also schwarz (und zur Kette gehörend) oder rot. Sie können nicht beide rot sein, andernfalls wäre  $\mathcal{G}$  zerlegbar im Sinne von 7.4 oder  $K_j, \dots, K_m$  wären nicht alle abstehend. Ist einer von beiden rot, etwa  $K_{m+1}$ , so trifft aus denselben Gründen ein Kreisbogen von  $M(\mathcal{G}, \mathcal{K})$   $K_1$  und den gemeinsamen Außenkreis von  $K_m$  und  $K_{m+1}$  und nach Vereinbarung kann dieser statt  $K_{m+1}$  als Nachfolger von  $K_m$  betrachtet werden; dann ist  $|x_{m+1} - x_{j-1}| = 2$ . In jedem Falle gilt  $|x_{m+1} - x_{j-1}| < 4$ .  $K_{j-1}$  und  $K_{m+1}$  besitzen also gemeinsame Berührungskreise und  $K$  sei derjenige, der näher bei  $K_j$  und  $K_m$  liegt. int  $K$  trifft Kreise aus  $\{K_j, \dots, K_m\}$  oder Außenkreise von  $\mathcal{G}$ , andernfalls müßte  $K$  zu  $M(\mathcal{G}, \mathcal{K})$  gehören.

Trifft int  $K$  Kreise aus  $\{K_j, \dots, K_m\}$ , so bezeichne  $K^{(m+1-j)}$  nun denjenigen, dessen Mittelpunkt dem Mittelpunkt von  $K$  am nächsten liegt. Ist  $K^{(m+1-j)} \neq K_j$ , so führt man nun dieselben Überlegungen mit  $K_{j-1}, K^{(m+1-j)}$  an Stelle von  $K_{j-1}, K_{m+1}$  durch, und falls zudem  $K^{(m+1-j)} \neq K_m$  ist, auch mit  $K^{(m+1-j)}, K_{m+1}$ . Dies liefert eine Numerierung  $K^{(1)}, \dots, K^{(m+1-j)}$  der abstehenden Kreise von der verlangten Art.

Den Fall, daß  $K$  nur Außenkreise von  $\mathcal{G}$  trifft (wobei es genügt, die Außenkreise von Paaren aus  $\{K_{j-1}, \dots, K_{m+1}\}$  zu betrachten), können wir wegen der vorausgesetzten Minimalität von  $\mathcal{G}$  weitgehend sofort ausschalten: Träfe  $K$  zwei solche Kreise, etwa die Außenkreise zu  $K_{k-1}, K_k$  und  $K_{l-1}, K_l$  ( $j \leq k < l \leq m$ ), so ließe sich  $\mathcal{G}$  zerlegen in  $\mathcal{G}' := \{K_k, \dots, K_{l-1}\}$  und  $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}'$  mit  $P(\mathcal{G}') \cap P(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}') = \emptyset$  im Widerspruch zu 7.4. Bleibt der Fall zu betrachten, daß int  $K$  von genau einem Außenkreis  $K_a$ , etwa zum Paar  $K_l, K_{l+1}$  gehörend, getroffen wird. Ist einer der beiden Kreise  $K_{j-1}$  und  $K_{m+1}$  rot, etwa  $K_{m+1}$ , so ist  $l=m$ . Dann ist  $K_{j-1}$  im verallgemeinerten Sinne Artikulationskreis (vgl. 7.7), d.h. dieser Fall kann bei einer Familie mit minimaler  $P$ -Hülle nicht eintreten. Seien also nun  $K_{j-1}$  und  $K_{m+1}$  beide schwarz. Ist  $|x_{j-1} - x_{m+1}| \leq 2\sqrt{3}$  oder  $l \neq j-1, m$  und  $K_a$  näher bei  $K_{j-1}$  als bei  $K_{m+1}$ , so kann wieder  $K_{j-1}$  als Artikulation im verallgemeinerten Sinne betrachtet werden. Nun bleibt nur noch der Fall  $|x_{j-1} - x_{m+1}| > 2\sqrt{3}$  mit  $l=m$  oder  $l=j-1$  zu betrachten; sei etwa  $l=j-1$ . Wir rollen  $K$  an  $K_{j-1}$  von  $K_{m+1}$  weg so lange, bis dieser neue Kreis  $K'$  einen Kreis aus  $\{K_j, \dots, K_m\}$  berührt (dies muß nicht  $K_j$  oder  $K_m$  sein). In diesem Fall nehmen wir einen solchen Kreis als  $K^{(m+1-j)}$ ; berührt  $K'$  zwei Kreise aus  $\{K_j, \dots, K_m\}$ , so ist der zweite als  $K^{(m-j)}$  zu nehmen und für diesen gilt dann  $\varepsilon=0$ , d.h. er ist bezüglich der Restfamilie eigentlich kein abstehen-

der Kreis, jedoch gilt die nachfolgende Flächenabschätzung auch noch für diesen Grenzfall.

Nun ist noch der Flächenbeitrag eines abstehenden Kreises bei dieser sukzessiven Wegnahme abzuschätzen.

Fall 1.  $K_j$  ist ein mittlerer Kreis der Randkette  $\mathcal{K}$  von  $\mathcal{G}$ . Wegen  $\varepsilon_j < 0$  ist  $\gamma_j > \frac{2}{3}\pi$  und somit nach 7.5

$$F(P(\mathcal{G}) \setminus P(M(\mathcal{G}, \{K_j\}))) \cong 2\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) \frac{3}{\pi} \left( \gamma_j - \frac{2}{3}\pi \right) \cong 2\sqrt{3}.$$

Ist auch  $\mathcal{K}' := \mathcal{K} \setminus \{K_j\}$  bezüglich  $\mathcal{G}'$  wieder Randkette, so gilt  $\gamma'(\mathcal{K}) = \gamma(\mathcal{K})$  und die Behauptung folgt sofort aus der Induktionsannahme.

Zerfällt dagegen  $\mathcal{K}$  in zwei Ketten  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  (dies kann nur im Falle  $|x_{j-1} - x_{j+1}| > 2\sqrt{3}$  eintreten),  $\mathcal{K}_1$  mit letztem Kreis  $K_{j-1}$  und  $\mathcal{K}_2$  mit erstem Kreis  $K_{j+1}$ , so lassen sich die Flächenbeiträge von  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  zu  $P(\mathcal{G} \setminus \{K_j\})$  gemeinsam abschätzen durch

$$2(r-1)\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) \frac{3}{\pi} \left( \gamma'(\mathcal{K}_1) + \gamma(\mathcal{K}_2) - \frac{4}{3}\pi \right)$$

nach Induktionsannahme. Zwischen den Winkeln in  $\mathcal{G}'$  und denen in  $\mathcal{G}$  bestehen die Beziehungen

$$v'(\mathcal{K}_1) + v'(\mathcal{K}_2) + v_j = v(\mathcal{K}) + v'_{j-1} - v_{j-1} + v'_{j+1} - v_{j+1},$$

$$\alpha'(\mathcal{K}_1) = \alpha'_{j-1} \quad \text{und} \quad \alpha'(\mathcal{K}_2) = \alpha(\mathcal{K}),$$

$$\beta'(\mathcal{K}_1) = \beta(\mathcal{K}) \quad \text{und} \quad \beta'(\mathcal{K}_2) = \beta'_{j+1}$$

und wegen  $\gamma_j = \pi + v_j - \alpha_j - \beta_j$  erhält man für die Flächenabschätzung insgesamt

$$F(P(\mathcal{G}) \setminus P(M(\mathcal{G}, \mathcal{K}))) \cong 2r\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) \frac{3}{\pi} \left( \gamma(\mathcal{K}) - \frac{2}{3}\pi + \lambda \right)$$

mit  $\lambda = \frac{2}{3}\pi + v'_{j-1} - v_{j-1} + v'_{j+1} - v_{j+1} - \alpha_j - \beta_j - \alpha'_{j-1} - \beta'_{j+1}$  und es bleibt  $\lambda \geq 0$  zu zeigen. Tatsächlich gilt

$$\frac{\pi}{3} + v'_{j+1} - v_{j+1} \cong \alpha_j + \beta'_{j+1} \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{3} + v'_{j-1} - v_{j-1} \cong \alpha'_{j-1} + \beta_j.$$

Es genügt, etwa die erste Ungleichung zu betrachten. Wegen  $\alpha_j \leq \frac{\pi}{3}$  ist sie im Falle  $\beta'_{j+1} \leq v'_{j+1} - v_{j+1}$  trivial. Sei daher  $\beta'_{j+1} > v'_{j+1} - v_{j+1}$ . Bezeichnet  $\tilde{K}$  den Vorgänger von  $K_{j+1}$  in der Kreisbogenperipherie von  $M(\mathcal{G}, \{K_j\})$  (beachte, daß  $\tilde{K}$  kein Kreis aus  $\mathcal{G}$  zu sein braucht), so bemerken wir, daß  $v'_{j+1} - v_{j+1} - \beta'_{j+1}$  und  $\alpha_j$  invariant bleiben, wenn  $\tilde{K}$  ersetzt wird durch einen Kreis, der ebenfalls mit  $K_j$  und  $K_{j+1}$  keine inneren Punkte gemeinsam hat und mit  $K_{j+1}$  denselben gemeinsamen Berührungskreis hat wie  $\tilde{K}$ . Wir können daher ohne Einschränkung annehmen, daß  $\tilde{K}$   $K_{j+1}$  berührt. Dann ist  $\beta'_{j+1} = \frac{\pi}{3}$  und es gilt ersichtlich  $v'_{j+1} - v_{j+1} \geq \alpha_j$  (vgl. Abb. 17).

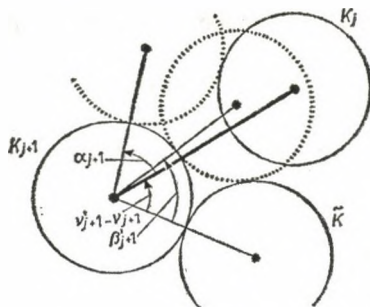


Abb. 17

Fall 2. Der wegzunehmende, abstehende Kreis ist der letzte Kreis  $K_r$  der Randkette  $\mathcal{K}$ . Vereinbarungsgemäß ist dann  $K_{r+1}$  rot (möglicherweise ein nicht zu  $\mathcal{G}$  gehörender Kreisbogen von  $M(\mathcal{G}, \mathcal{J})$ ) und als Abschätzung für den Flächenbeitrag von  $K_r$  zu  $P(\mathcal{G})$  und den von  $\mathcal{K}'$  zu  $P(\mathcal{G}')$  erhalten wir mit 7.5 und Induktionsannahme

$$2r\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) \frac{3}{\pi} \left( \gamma(\mathcal{K}) - \frac{2}{3} \pi + \lambda \right)$$

mit

$$\lambda = \frac{\pi}{3} - \beta_j + \nu'_{j-1} - \nu_{j-1} - \alpha'_{j-1} \geq 0.$$

Analog erledigt sich der Fall, daß es sich um den ersten Kreis der Randkette handelt.

FOLGERUNG.

$$(22) \quad F(P(\mathcal{G}) \setminus P(M(\mathcal{G}, \mathcal{J}))) \geq 2s\sqrt{3} + 6(2 - \sqrt{3}).$$

Dies folgt mit Hilfe von (19) aus dem vorausgehenden Lemma und zwar auch in dem Fall, daß die gesamte Peripherie eine einzige zyklische Randkette bildet. In diesem Fall hat man nur Beiträge mittlerer Kreise (Beweisteil 2a des Lemmas) und eventuell solcher abstehender Kreise, deren Wegnahme nicht zur Zerlegung der Randkette an dieser Stelle führt.

Um den Beweis von 4.3 abzuschließen, ist noch  $F(P(M(\mathcal{G}, \mathcal{J})))$  mit Hilfe der Induktionsannahme abzuschätzen. Zerfällt  $P(\mathcal{G} \setminus \mathcal{J})$  in  $k$  Komponenten mit  $r_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) Kreisen, so gilt nach (16)

$$(22) \quad F(P(M(\mathcal{G}, \mathcal{J}))) \geq F(P(\mathcal{G} \setminus \mathcal{J})) + (k-1)(4-\pi),$$

woraus mit (21)

$$F(P(\mathcal{G})) \geq F(P(\mathcal{G} \setminus \mathcal{J})) + (k-1)(4-\pi) + 2s\sqrt{3} + 6(2 - \sqrt{3})$$

folgt. Nach Induktionsannahme ist  $F(P(\mathcal{G} \setminus \mathcal{J})) \geq \sum_{i=1}^k F_0(r_i)$  und dies liefert mit (9a) die Behauptung.



# 8. Randsequenzen bei Groemerpackungen

Eine Groemerpackung  $\mathcal{G}$  aus  $n$  Kreisen heiße *extremal*, falls  $p(\mathcal{G})=p_0(n)$  ist. Durch die Randsequenz  $p_1, \dots, p_6$  einer Groemerpackung werden  $n$  und  $p(\mathcal{G})$  eindeutig bestimmt und unter Beachtung von  $p_i+p_{i+1}=p_{i+3}+p_{i+4}$  (Indices modulo 6) gilt im Falle einer extremalen Groemerpackung

$$n = (p_1 + p_2 - 1)(p_3 + p_4 - 1) - \binom{p_1}{2} - \binom{p_4}{2}$$

und

$$p_0(n) = p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4 - 6.$$

Im folgenden sei stets  $p_1 \leq p_i$  angenommen für  $i=2, \dots, 6$ . Entfernen dieser  $p_1$  peripheren Kreise führt zu einer Familie  $\mathcal{G}'$  mit  $n-p_1$  Kreisen mit

$$p(\mathcal{G}') = p_0(n) - 1.$$

Wegen  $p(\mathcal{G}') \geq p_0(n-p_1)$  ist demnach

$$p_0(n) - 1 \geq p_0(n-p_1).$$

Im Falle  $n=6\binom{a}{2}+1$  folgt hieraus  $p_1 \geq a$  und damit  $p_i=a$  für  $i=1, \dots, 6$ , da die Anzahl der Kreise einer Groemerpackung mit  $p_i \geq a$  für alle  $i$  und  $p_i > a$  für mindestens ein  $i$  größer als  $6\binom{a}{2}+1$  ist.

Die erste der Ungleichungen in 4.6 ist im Falle  $a \leq 2$  trivial. Ist  $a \geq 3$ , so führt die Wiederholung des obigen Abbaus an derselben Seite zu

$$p_0(n) - 2 \geq p_0(n-2p_1-1)$$

und hieraus folgt

$$2p_1+1 \geq \begin{cases} a & \text{falls } b=2, c=0 \\ a+1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

in jedem Falle also  $p_1 \geq \frac{a-1}{2}$ .

Sei nun  $p_k$  die längste Seite der Groemerpackung. Anbau von  $p_k-1$  Kreisen an diese Seite führt zu einer Groemerpackung  $\mathcal{G}'$  mit  $n+p_k-1$  Kreisen und wegen  $p_0(n)+1=p(\mathcal{G}') \geq p_0(n+p_k-1)$  folgt  $p_k \leq 2a-c+2$ .

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] FEJES TTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Zweite verbesserte und erweiterte Auflage, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 65, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. MR 50 # 5603.
- [2] FEJES TTH, L., Research problem 13, *Period. Math. Hungar.* 6 (1975), 197-199.
- [3] FOLKMAN, J. H. and GRAHAM, R. L., A packing inequality for compact convex subsets of the plane, *Canad. Math. Bull.* 12 (1969), 745-752. MR 41 # 9109.
- [4] GRAHAM, R. L., WITSENHAUSEN, H. S. und ZASSENHAUS, H. J., On tightest packings in the Minkowski plane, *Pacific J. Math.* 41 (1972), 699-715. MR 47 # 961.
- [5] GROEMER, H., über die Einlagerung von Kreisen in einen konvexen Bereich, *Math. Z.* 73 (1960), 285-294. MR 22 # 1849.
- [6] HARBORTH, H., Lösung zum Problem 664 A, *Elem. Math.* 29 (1974), 14-15.

- [7] HEPPES, A. und MOLNÁR, J., Újabb eredmények a diszkrét geometriában II (Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie, ungarisch), *Mat. Lapok* **13** (1962), 39—72. *MR* **26** # 4229.
- [8] MOLNÁR, J., On the packing of unit circles in a convex domain, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **22—23** (1979/80), 113—123. *MR* **82e**: 52019.
- [9] OLER, N., An inequality in the geometry of numbers, *Acta Math.* **105** (1961) 19—48. *MR* **24** # A2900.
- [10] THUE, A., Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene, *Christiania Vid. Selsk. Skr.* **1** (1910), 3—9.
- [11] WEGNER, G., Zur Kombinatorik von Kreispackungen, *Inst. Math. Univ. Salzburg, 2. Koll. Diskr. Geom.* (1980), 225—230.

(Eingegangen am 15. Juni 1982)

MATHEMATISCHES INSTITUT  
UNIVERSITÄT DORTMUND  
POSTFACH 500 500  
D—46 DORTMUND 50  
FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY

# ÜBER EINE GEOMETRISCHE UNGLEICHUNG BEZÜGLICH DER DICHTEN DER REGULÄREN AUSFÜLLUNGEN DER HYPERBOLISCHEN EBENE DURCH KONGRUENTE HYPERZYKELBEREICHE

I. VERMES

*Professor László Fejes Tóth zum 70. Geburtstag gewidmet*

Die regulären Ausfüllungen der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche sind in [3] gezeigt, wobei die benachbarten Hyperzykelbereiche sich berühren. Die gemeinsamen Tangenten der Hyperzykelbereiche bilden ihre Dirichletschen Zellen. Gleichseitige und gleichwinklige  $\left(\frac{2\pi}{n}, n \geq 3\right)$  unendliche Tangentenpolygone begrenzen die Zellen. Die Begriffe der Potenzlinien und der Dirichletschen Zellen der Hyperzykelbereiche ebenso, wie im Falle der Kreisen erklärt werden können. Unter der Potenzlinie zweier Äquidistanten versteht man die Gesamtheit derjenigen Punkte, aus denen die gleichen Tangenten zu den Äquidistanten gezogen werden können. Diese Gesamtheit ist eine Gerade, und die Potenzlinie zweier kongruenter Abstandslinien ist die Symmetrieachse ihrer Grundlinien.

Betrachten wir die zu den Dirichletschen Zellen gehörige duale Zerlegung der hyperbolischen Ebene. In dieser Zerlegung gehört je ein rechtwinkliges  $2n$ -Eck zu jedem Eckpunkt der Dirichletschen Zellen, dessen Seiten einerseits die gemeinsame Lote der Grundlinien der Hyperzykeln sind, deren Potenzlinien in diesem Eckpunkt sich treffen; andererseits gehören diejenige Strecken zu den Seiten dieses Vieleckes, die zwischen den Fußpunkten der gemeinsamen Lote auf den Grundlinien liegen. Die Seiten eines solchen  $2n$ -Eckes liegen abwechselnd auf den Grundlinien bzw. auf ihren gemeinsamen Loten. Die Figur zeigt einen Teil einer regulären Ausfüllung der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche für  $n=6$ , und das  $2n$ -Eck  $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}, A_{2n}$  im Poincaréschen Kreismodell.

Die Dichten der regulären Ausfüllungen werden bezüglich dieser rechtwinkligen  $2n$ -Ecken untersucht. In [4] wurden die oberen Dichtenschranken der Hyperzykelausfüllungen untersucht, falls man die hyperbolische Ebene in rechtwinklige Sechsecke zerlegt. Diese Zerlegungen und die in dieser Arbeit betrachteten Zerlegungen sind voneinander verschieden. (K. Böröczky [1] hat nämlich ein System aus kongruenten Kreisen und dazu zwei verschiedene Zerlegungen  $Z_1$  und  $Z_2$  der hyperbolischen Ebene in kongruente Zellen konstruiert mit der Eigenschaft, daß die Kreisdichte in jeder Zelle von  $Z_i$  denselben Wert  $d_i$  aufweist ( $i=1, 2$ ) mit  $d_1 \neq d_2$ . Deswegen soll man die Zellenzerlegung in der hyperbolischen Ebene immer wohl bestimmen, in der die Dichte des betrachteten Bereichsystems untersucht wird.)

Es ist klar, daß die Dichte einer regulären Ausfüllung der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche vom Abstand  $l$  bloß bezüglich des

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A45; Secondary 52A40.

*Key words and phrases*. Packing, covering, tiling, inequalities and extremum problems, convex sets.

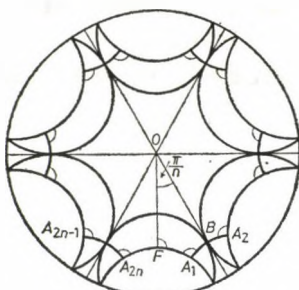


Fig. 1

Lambertschen Viereckes  $OFA_1B$  ausgerechnet werden kann.<sup>1</sup> (S. Figur, wo  $FA_1=a$  und  $A_1B=l$ ):

$$d(l, n) = \frac{a \operatorname{sh} l}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}}.$$

Wir wollen die Dichtefunktion  $d(l, n)$  untersuchen. (Es soll noch bemerkt werden, daß die Dichte einer regulären Lagerung nimmt ab, falls man den Abstand  $l$  verkleinert. Deswegen untersuchen wir nur die Fälle, in denen die benachbarten Hyperzykelbereiche sich berühren.) Es ist leicht zu sehen, daß die zu den regulären Ausfüllungen gehörigen Abstände  $l$  nur die Ungleichung  $0 < l < +\infty$  erfüllen sollen, und  $n$  eine natürliche Zahl ist ( $n \geq 3$ ).

Auf Grund der trigonometrischen Beziehungen der Lambertschen Vierecke<sup>2</sup> ergibt sich die folgende Beziehung für das Viereck  $OFA_1B$ :

$$a = \operatorname{arsh} \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l}.$$

Also ist die Dichtefunktion der betrachteten Ausfüllungen:

$$d(l, n) = \frac{\operatorname{sh} l \operatorname{arsh} \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l}}{\frac{(n-2)\pi}{2n}}.$$

Falls man die Dichte der zu demselben Abstand  $l$  gehörigen regulären Ausfüllungen der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche betrachtet, so wird die Ungleichung  $d(l, n+1) < d(l, n)$  gezeigt.

<sup>1</sup> Der Flächeninhalt ist zwischen der Strecke  $a$  und der zu ihr gehörigen Äquidistante vom Abstand  $l$ :  $a \operatorname{sh} l$ , und der Flächeninhalt eines Lambertschen Viereckes ist berechenbar als seinem Winkeldefekt. S.z.B. [2] § 18, S. 95—97.

<sup>2</sup> S.z.B. [2] §§ 15. und 17, S. 37—40, bzw. 71—78.



Zum Beweis dieser Behauptung müssen wir die folgende Ungleichung beweisen:

$$(1) \quad \frac{\frac{\cos \frac{\pi}{n+1}}{\operatorname{arsh} \frac{\operatorname{sh} l}{\cos \frac{\pi}{n}}}}{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{arsh} \frac{\operatorname{sh} l}{\cos \frac{\pi}{n}}}} < \frac{n^2 - n}{n^2 - n - 2}.$$

Weil die Funktion  $\frac{x}{\operatorname{arsh} x}$  (für  $x \rightarrow 0$ ) monoton abnehmend dem Wert 1 strebt zu, also

$$\frac{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{arsh} \frac{\operatorname{sh} l}{\cos \frac{\pi}{n}}}}{\frac{\cos \frac{\pi}{n+1}}{\operatorname{arsh} \frac{\operatorname{sh} l}{\cos \frac{\pi}{n+1}}}} < 1$$

besteht. Daraus folgt, daß

$$\frac{\frac{\cos \frac{\pi}{n+1}}{\operatorname{arsh} \frac{\operatorname{sh} l}{\cos \frac{\pi}{n+1}}}}{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{arsh} \frac{\operatorname{sh} l}{\cos \frac{\pi}{n}}}} < \frac{\cos \frac{\pi}{n+1}}{\cos \frac{\pi}{n}}$$

ist. Zum Beweis unserer Ungleichung (1) müssen wir nur die folgende Ungleichung beweisen:

$$\frac{\cos \frac{\pi}{n+1}}{\cos \frac{\pi}{n}} < \frac{n^2 - n}{n^2 - n - 2} \quad (n \geq 3).$$

Wir können diese Ungleichung in die folgenden Formen umschreiben:

$$\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos \frac{\pi}{n} < \frac{2}{n^2 - n} \cos \frac{\pi}{n+1}$$

bzw.

$$(2) \quad 2 \sin \frac{(2n+1)\pi}{n(n+1)} \sin \frac{\pi}{n(n+1)} < \frac{2}{n^2-n} \cos \frac{\pi}{n+1}.$$

Falls  $n \geq 10$  ist, so  $0,9 < \cos \frac{\pi}{n+1}$  besteht. Weil

$$\sin \frac{(2n+1)\pi}{n(n+1)} < \frac{(2n+1)\pi}{n(n+1)} \quad \text{und} \quad \sin \frac{\pi}{n(n+1)} < \frac{\pi}{n(n+1)}$$

sind, deswegen werden wir die folgende Ungleichung anstatt (2) untersuchen:

$$\frac{(2n+1)\pi^2}{n^2(n+1)^2} < \frac{0,9}{n^2-n}.$$

$n$	$\frac{\cos \frac{\pi}{n+1}}{\cos \frac{\pi}{n}}$	$\frac{n^2-n}{n^2-n-2}$
3	1,414213562	1,5
4	1,144122805	1,2
5	1,070466269	1,111111111
6	1,040349236	1,071428571
7	1,025428919	1,05
8	1,017115963	1,037037037
9	1,012093204	1,028571428
10	1,008870616	1,022727272
11	1,006704429	1,018518518
12	1,005192936	1,015384615
13	1,004105389	1,012987012
14	1,003302488	1,011111111
15	1,002696607	1,009615384
16	1,002230681	1,008403361
17	1,001866432	1,007407407
18	1,001577516	1,006578947
19	1,001345386	1,005882352

Diese Ungleichung ist äquivalent mit der folgenden Ungleichung:

$$0 < 0,9n^3 - 2(\pi^2 - 0,9)n^2 + (\pi^2 + 1)n + \pi^2.$$

Wenn  $n \geq 20$  ist, so diese Ungleichung immer besteht. (Für  $n=20$  sind  $0,9n^3 = 7200$  und  $2(\pi^2 - 0,9)n^2 = 7175,6835$ .) Damit haben wir die Ungleichung  $d(l, n+1) < d(l, n)$  für  $n \geq 20$  bewiesen.

Die Tabelle enthält die ausgerechneten Werte für  $3 \leq n \leq 19$ .

Also tatsächlich besteht:  $d(l, n+1) < d(l, n)$  (für  $n \geq 3$ ).

BEMERKUNG. Es ist leicht zu sehen, daß

$$\lim_{l=0} d(l, n) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{l=+\infty} d(l, n) = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\frac{(n-2)\pi}{2n}}$$

sind. Die Funktion  $d(l, n)$  ist monoton zunehmend, weil  $\frac{d}{dl} d(l, n) > 0$  ist.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BÖRÖCZKY, K., Sphere packing in spaces of constant curvature I, *Mat. Lapok* **25** (1974), 265—306 (ungarisch).
- [2] LIEBMANN, H., *Nichteuklidische Geometrie*, Zweite Auflage, Göschensche Verlagshandlung, Berlin, 1912.
- [3] VERMES, I., Über ebene hyperbolische Mosaik, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **17** (1974), 131—137. MR **52** # 4101.
- [4] VERMES, I., Ausfüllungen der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche, *Period. Math. Hungar.* **10** (1979), 217—229. MR **81c**: 52018.

(Eingegangen am 21. November 1980)

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM  
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR  
GEOMETRIA TANSZÉK  
SZTOCZEK U. 4.  
H—1521 BUDAPEST  
HUNGARY





# EIN KREISÜBERDECKUNGSPROBLEM

G. BLIND und R. BLIND

Professor László Fejes Tóth zum 70. Geburtstag gewidmet

1. In [4, S. 97] wird folgendes Problem gestellt: Der wievielte Teil der euklidischen Ebene  $E^2$  läßt sich durch kongruente Kreise *einfach* bedecken? Geht man von der dichtesten Packung kongruenter Kreise aus und vergrößert die Kreise konzentrisch, bis jeder Kreis von den sechs benachbarten in den Ecken eines regulären 12-Ecks geschnitten wird, so bedeckt das entstehende Kreissystem  $100(\sqrt{48}-6)\% = 92,8\ldots\%$  des  $E^2$  einfach. Man vermutet, daß diese Zahl durch kein Kreissystem übertroffen wird.

In [4] wird diese Vermutung bewiesen mit der Einschränkung, daß kein Punkt des  $E^2$  von mehr als 2 Kreisen bedeckt wird. In [1] wird sie bewiesen mit der Einschränkung, daß die Kreise gitterförmig gelagert sind. Im folgenden wird diese Vermutung ohne Einschränkungen bewiesen.

Zur Präzisierung der Fragestellung: Im  $E^2$  sei  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ein System abgeschlossener, kongruenter Kreise.  $M$  sei die davon einfach bedeckte Punktmenge.  $O$  sei der Ursprung des  $E^2$  und  $K_R(O)$  der abgeschlossene Kreis um  $O$  mit Radius  $R$ .  $|\dots|$  bezeichne das Lebesgue-Maß. Die Dichte  $\delta$  von  $M$  im  $E^2$  wird dann definiert durch

$$\delta := \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|M \cap K_R(O)|}{\pi R^2}.$$

Es wird gezeigt:

SATZ 1.  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  sei ein System abgeschlossener, kongruenter Kreise im  $E^2$ . Dann gilt für die Dichte  $\delta$  der von  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  einfach bedeckten Punktmenge im  $E^2$

$$\delta \leq \sqrt{48}-6 = 0.928\ldots$$

Satz 1 ist äquivalent zu

SATZ 1'.  $\varphi$  sei eine zufällig gewählte Kongruenz des  $E^2$ ,  $X$  eine Teilmenge des  $E^2$  und  $K$  ein Kreis. Die Wahrscheinlichkeit, daß  $\varphi(K)$  die Menge  $X$  in genau einem Punkt trifft, ist  $\leq \sqrt{48}-6$ .

Folgende Bezeichnungen werden verwendet: Die von  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  in einer Menge  $B$  einfach bedeckte Punktmenge sei  $M(B) := M \cap B$ . Der Mittelpunkt eines Kreises  $K_i$  sei  $O_i$ . Zu  $p \in E^2$  sei  $K_R(p)$  der abgeschlossene Kreis mit Radius  $R$  um  $p$ , und

1980 Mathematics Subject Classification. Primary 52A45.

Key words and phrases. Kongruente Kreise, Überdeckungsproblem, genau einfache Überdeckung, euklidische Ebene.

$K(p)$  der abgeschlossene Einheitskreis um  $p$ . Wenn etwa  $L'$  ein Dreieck bezeichnet, so ist mit dem entsprechend markierten kleinen Buchstaben, also etwa  $l'$ , sein Umkreismittelpunkt gemeint, und umgekehrt.  $U(L)$  ist der Umkreisradius des Dreiecks  $L$ . Eine Strecke  $\overline{ab}$  hat die Länge  $|\overline{ab}|$ , ein Bereich  $B$  das Lebesgue-Maß bzw. den Flächeninhalt  $|B|$ .  $B^\circ$  ist das Innere,  $\partial B$  der Rand und  $\text{conv } B$  die konvexe Hülle von  $B$ .

Eine einem Bereich  $B$  zugeordnete Zahl  $\delta(B) \leq 1$  heißt gegebenenfalls *Dichte* von  $B$ ;  $\delta(B)$  heißt *Kreisdichte* bezüglich eines gewissen Kreissystems, wenn dieses in  $B$  eine Menge von Maß  $\delta(B) |B|$  einfach bedeckt. Ist  $\mathcal{D} = \{A_i\}_{i=1}^m$  eine Familie ebener Bereiche mit jeweiliger Dichte  $\delta_i$ , so heißt

$$\delta(\mathcal{D}) := \frac{\delta_1 |A_1| + \dots + \delta_m |A_m|}{|A_1| + \dots + |A_m|}$$

*Gesamtdichte* von  $\mathcal{D}$ .  $B(\mathcal{D}) := \bigcup_{i=1}^m A_i$  ist der von  $\mathcal{D}$  überdeckte Bereich.

2. Zum Beweis von Satz 1 sei also  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ein System abgeschlossener, kongruenter Kreise, die o.B.d.A. den Radius 1 haben.  $K_R(O)$  sei ein Kreis um einen Ursprung  $O$  des  $E^2$ , wobei o.B.d.A.  $R \geq 24$  sei.

Weil über  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  keine weiteren Voraussetzungen gemacht werden, kann  $\{O_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  in  $K_R(O)$  Häufungspunkte haben. Ist  $\{K_{i_1}, \dots, K_{i_k}\}$  ein endliches Teilsystem von  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , so habe der davon in  $K_R(O)$  einfach bedeckte Bereich das Lebesgue-Maß  $\lambda_{i_1, \dots, i_k}$ . Weil

$$|M(K_R(O))| = \sum_{i=1}^{\infty} |M(K_R(O)) \cap K_i|$$

und

$$\sum_{i=1}^m |M(K_R(O)) \cap K_i| \leq \lambda_{1, \dots, m},$$

ist  $|M(K_R(O))| \leq \sup \lambda_{i_1, \dots, i_k}$ , wobei das sup über alle endlichen Tupel  $(i_1, \dots, i_k)$  gebildet wird. Gilt also für alle  $(i_1, \dots, i_k)$

$$\frac{\lambda_{i_1, \dots, i_k}}{\pi R^2} \leq \sqrt{48} - 6 + \frac{96}{R}$$

so folgt daraus Satz 1.

Damit genügt es, zu zeigen:

Ist  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ein System abgeschlossener Einheitskreise so, daß  $\{O_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  keinen endlichen Häufungspunkt hat, und ist  $R \geq 24$ , so gilt

$$(1) \quad \frac{|M(K_R(O))|}{\pi R^2} \leq \sqrt{48} - 6 + \frac{96}{R}.$$

3. Zur Vorbereitung des Beweises von (1) werden *gleichschenklige Dreiecke und gewisse Kreise untersucht*.

Ein gleichschenkliges Dreieck  $\Delta$  mit der Basis  $\overline{AB}$  soll *schmales g-Dreieck* heißen, wenn  $|\overline{AB}| \leq 1$ , sonst *breites g-Dreieck*. Es sei  $r := \frac{1}{2} |\overline{AB}|$  und  $\alpha$  der Basiswinkel von  $\Delta$ ;  $\alpha$  heißt *relevanter Winkel* von  $\Delta$ . Dann gilt

$$(2) \quad |\Delta| = f(r, \alpha) := r^2 \tan \alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; r > 0\right).$$

$\{K(A)^\circ, K(B)^\circ\}$  soll  $\Delta$  nicht überdecken, d.h. es gilt

$$(3) \quad r \geq \cos \alpha.$$

(1) Bei einem breiten g-Dreieck  $\Delta$  hat der von  $\{K(A), K(B)\}$  in  $\Delta$  einfach bedeckte Bereich den Flächeninhalt  $e(\Delta) = e(r, \alpha)$ , eine für

$$(4) \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad r > \frac{1}{2}, \quad r \geq \cos \alpha$$

definierte Funktion. Dieser Definitionsbereich wird durch die Gerade  $r=1$  und die Kurve  $2r \sin \alpha = 1$  ( $\frac{1}{2} < r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) in 3 Bereiche (mit eventuell gemeinsamen Rändern) zerlegt, die gemäß Abb. 1 mit  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$  bezeichnet werden. Es ist

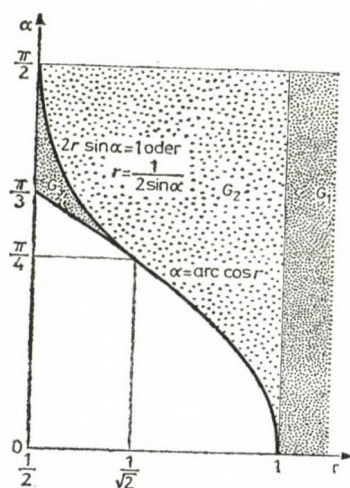


Abb. 1

in  $G_1$ :

$$(5) \quad e(r, \alpha) = \alpha$$

in  $G_2$  (vgl. Abb. 2):

$$(6) \quad e(r, \alpha) = \alpha - 2 \arccos r + \sin(2 \arccos r)$$

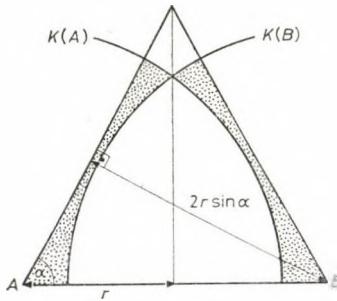


Abb. 2

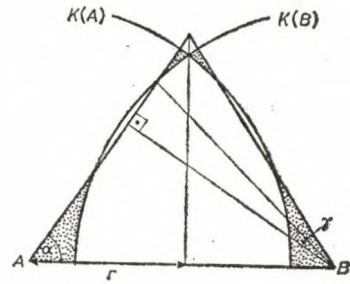


Abb. 3

in  $G_3$  (vgl. Abb. 3) mit  $\gamma := \arccos(2r \sin \alpha)$ :

$$(7) \quad e(r, \alpha) = \alpha - 2 \arccos r + \sin(2 \arccos r) + 2\gamma - \sin 2\gamma.$$

(2) Ist  $\Delta$  ein schmales  $g$ -Dreieck, so bezeichne  $e(\Delta)$  den Flächeninhalt des Sektors eines Einheitskreises mit dem Zentriwinkel  $2(\alpha - \arccos r)$ .  $\Delta_1$  sei das Dreieck mit der Basis  $\overline{AB}$  und der Spitze  $\partial K(A) \cap \partial K(B) \cap \Delta$ . Der von  $\{K(A), K(B)\}$  in  $\Delta_1$  einfach bedeckte Bereich ist  $\emptyset$ . Also hat der von  $\{K(A), K(B)\}$  in  $\Delta$  einfach bedeckte Bereich den Flächeninhalt  $\cong e(\Delta)$ .

Nun sei  $S$  der Sektor eines Einheitskreises mit dem Zentriwinkel  $\cong \pi - 2\alpha$ . Wird dann für  $\Delta$  die Dichte  $\frac{e(\Delta)}{|\Delta|}$  und für  $S$  die Dichte 1 zugrunde gelegt, so gilt für die Gesamtdichte

$$(8) \quad \delta(\Delta, S) \cong \frac{e(\Delta) + |S|}{|\Delta| + e(\Delta) + |S|} \cong \frac{\pi - 2 \arccos r}{\sin(\pi - 2 \arccos r) + \pi - 2 \arccos r} \cong \sqrt{48} - 6.$$

(3)  $ABC$  sei ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis  $\overline{AB}$ .  $D$  sei ein Punkt aus  $(ABC)^\circ$  auf dem Mittellot von  $\overline{AB}$ . Dann heißt das Polygon  $\Delta := ADBC$  *geknicktes  $g$ -Dreieck*, mit der Spitze  $C$ .  $\alpha := \sphericalangle CAD$  heißt *relevanter Winkel* von  $\Delta$ .  $e(\Delta)$  bezeichne den Flächeninhalt des von  $\{K(A), K(B)\}$  in  $\Delta$  einfach bedeckten Bereichs. Es ist für  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $r := |\overline{AD}| \cong 1$ , d.h. in  $G_1$ :

$$(9) \quad e(\Delta) = e(r, \alpha) = \alpha,$$

und es ist

$$(10) \quad |\Delta| \cong f(r, \alpha) = r^2 \tan \alpha \quad \left( 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, r > 0 \right).$$

4. Zum Beweis von (1) kann o.B.d.A. angenommen werden, daß zu jedem  $p \in E^2$  der Kreis  $K(p)$  einen Systemkreis  $K_i$  schneidet.

Nach der Methode der Stützkreise (siehe z.B. [3] oder [5, S. 228]) gibt es ein Polygongnetz  $\mathcal{P}$  aus konvexen Polygonen mit den Ecken  $O_i$ , das  $E^2$  schlicht und



lückenlos überdeckt. Weil  $\{O_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  keinen endlichen Häufungspunkt hat, liegen in  $K_{R+2}(O)$  endlich viele, etwa  $k$  Punkte  $O_i$ ; die Verschiebung jedes Kreises  $K_i$  um  $\leq \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) verkleinert also  $|M(K_R(O))|$  um höchstens  $k 2\pi\varepsilon$ . Deshalb kann o.B.d.A. angenommen werden, daß  $\mathcal{L}$  ein Dreiecksnetz ist, und daß der Radius eines Stützkreises  $\leq 3$  ist. Für jedes  $L \in \mathcal{L}$  ist dann  $U(L) \leq 3$  und die Länge einer Seite  $\leq 6$ . Ist  $\mathcal{L} = \{L_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ , so ist  $\{l_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  die Menge der entsprechenden Umkreismittelpunkte.

Die Seite  $s$  von  $L \in \mathcal{L}$  heißt *trennende Seite von  $L$* , wenn gilt

- (1) Die Gerade durch  $s$  trennt echt  $l$  von  $L$ ,
- (2)  $|s| > 1$ ,
- (3)  $U(L) \leq 1$ .

Um  $K_R(O)$  in geeignete Bereiche zu zerlegen, wird ein gerichteter Graph  $\Gamma_\infty$  definiert. Seine Knotenmenge sei  $\{l_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Zwei Knoten  $l_{j_1}$  und  $l_{j_2}$  werden genau dann durch eine von  $l_{j_1}$  nach  $l_{j_2}$  gerichtete Kante  $(l_{j_1}, l_{j_2})$  verbunden, wenn  $L_{j_1}$  und  $L_{j_2}$  eine gemeinsame Seite haben, die trennende Seite von  $L_{j_1}$  ist.

Wenn es in  $\Gamma_\infty$  eine Bahn von  $l$  nach  $l'$  gibt, folgt  $l'$  auf  $l$ , liegt  $l$  vor  $l'$  und  $l'$  nach  $l$ . Dann ist  $U(L') > U(L)$ .

Nach Definition hat  $\Gamma_\infty$  folgende Eigenschaften:

- (5) Ist  $(l_{j_1}, l_{j_2})$  gerichtete Kante von  $\Gamma_\infty$ , dann nicht  $(l_{j_2}, l_{j_1})$ .
- (6) Die Ausgangsvalenz eines Knoten von  $\Gamma_\infty$  ist höchstens 1.
- (7)  $\Gamma_\infty$  ist zyklensfrei. Denn wegen 4.6 wäre jeder Zyklus ein Kreis, zwei seiner Knoten  $l$  und  $l'$  folgten also jeweils aufeinander. Dann wäre aber  $U(L') > U(L) > U(L')$ .

5.  $\Gamma_R$  sei der Untergraph von  $\Gamma_\infty$ , der aufgespannt wird von den in  $K_{R-15}(O)$  liegenden Knoten und von solchen Knoten in  $K_{R-3}(O)$ , die auf einer Bahn liegen, die zwei Knoten in  $K_{R-15}(O)$  verbindet und ganz in  $K_{R-3}(O)$  verläuft.  $\mathcal{L}_{\Gamma_R}$  sei die Familie der  $\mathcal{L}$ -Dreiecke, die Knoten von  $\Gamma_R$  entsprechen.

Nun wird ähnlich wie in [6] und [7] zu  $\mathcal{L}_{\Gamma_R}$  ein Mosaik  $\mathcal{L}_{\Gamma_R}^*$  konstruiert.  $\overline{O_1 O_2}$  sei eine trennende Seite von  $L \in \mathcal{L}_{\Gamma_R}^1$ , so daß nach 4.1  $L$  durch  $\overline{O_1 O_2}$  von  $l$  echt getrennt wird. Dann heißt die geknickte Strecke  $\overline{O_1 l O_2}$  *Brücke*,  $\overline{O_1 l}$  und  $\overline{O_2 l}$  heißen *Komponenten* der Brücke. Jede trennende Seite eines Dreiecks von  $\mathcal{L}_{\Gamma_R}$  wird jetzt durch die zugehörige Brücke ersetzt. Dann gilt

- (1) Zwei Brücken schneiden sich höchstens in einem Endpunkt, was man wörtlich wie in [6] oder [7] beweist.
- (2) Eine Brücke und eine nicht ersetzte Seite von  $\mathcal{L}_{\Gamma_R}$  schneiden sich höchstens in einem Endpunkt.

Zum Beweis sei  $\overline{O_1 l_0 O_2}$  eine Brücke, d.h.  $\overline{O_1 O_2}$  trennt echt  $l_0 \in \Gamma_R$  von  $L_0$ ,  $|\overline{O_1 O_2}| > 1$  und  $U(L_0) \leq 1$ .  $C_0$  sei der Umkreis von  $L_0$ .  $L_1 \neq L_0$  sei das andere  $\mathcal{L}$ -Dreieck mit Seite  $\overline{O_1 O_2}$ , seine zu  $\overline{O_1 O_2}$  fremde Ecke liegt nicht in  $C_0$  (Abb. 4). Entweder ist  $l_0 \in L_1^0$ , dann gilt 5.2. Sonst aber hat  $L_1$  eine Seite  $s_1 \neq \overline{O_1 O_2}$ , die

<sup>1</sup> Unterschied zu [6] und [7]: Für eine trennende Seite gilt auch 4.2 und 4.3 und nur trennende Seiten von  $\mathcal{L}_{\Gamma_R}$ -Dreiecken werden betrachtet.

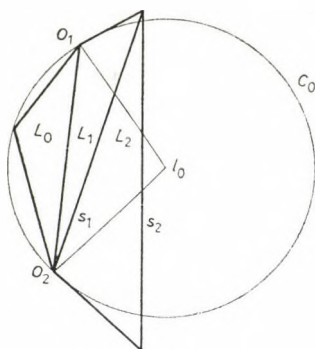


Abb. 4

$\overline{O_1 l_0 O_2}$  nicht nur in  $O_1$  oder  $O_2$  schneidet.  $C_1$  sei der Umkreis von  $L_1$ , es ist  $L_0 \notin C_1$ . Deshalb trennt die Gerade durch  $s_1$  echt  $l_1$  von  $L_1$ . Außerdem ist  $U(L_1) > U(L_0) \geq 1$  und  $|s_1| > |\overline{O_1 O_2}| > 1$ , so daß  $s_1$  trennende Seite von  $L_1$  ist.

$L_2 \neq L_1$  sei das andere  $\mathcal{L}$ -Dreieck mit Seite  $s_1$ , seine zu  $s_1$  fremde Ecke liegt nicht in  $C_0$ . Entweder ist  $l_0 \in L_2^0 \cup s_1$ , oder  $L_2$  hat eine Seite  $s_2 \neq s_1$ , die  $\overline{O_1 l_0 O_2}$  nicht nur in  $O_1$  oder  $O_2$  schneidet. Wie oben ist  $s_2$  trennende Seite von  $L_2$ . Man erhält so eine Folge  $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$  von  $\mathcal{L}$ -Dreiecken. Weil  $\overline{O_1 l_0 O_2}$  nur von endlich vielen  $\mathcal{L}$ -Dreiecken geschnitten wird, ist die Folge endlich; ihre Dreiecke überdecken  $\overline{O_1 l_0 O_2}$ .

Eine Seite von  $\mathcal{L}_{\Gamma_R}$ , die  $\overline{O_1 l_0 O_2}$  nicht nur in  $O_1$  oder  $O_2$  schneidet, stimmt also mit einer Seite  $s_n$  überein, die gemeinsame Seite von  $L_n$  und  $L_{n+1}$  ist, und trennende Seite von  $L_n$ . Zu zeigen ist, daß  $s_n$  ersetzte Seite ist, also  $L_n \in \mathcal{L}_{\Gamma_R}$ . Weil  $s_n$  Seite von  $\mathcal{L}_{\Gamma_R}$  ist, ist  $L_n$  oder  $L_{n+1}$  aus  $\mathcal{L}_{\Gamma_R}$ , es wird also  $L_{n+1} \in \mathcal{L}_{\Gamma_R}$  und  $l_n \notin K_{R-15}(O)$  angenommen.

Nach Konstruktion gibt es in  $\Gamma_\infty$  eine Bahn  $\mathcal{B} = \{l_0, l_1, \dots, l_{n+1}\}$  von  $l_0$  nach  $l_{n+1}$ . Der Umkreis von  $L_k$  ( $k=0, \dots, n+1$ ) schneidet  $C_0$ , also ist  $l_k \in K_6(l_0)$ , d.h.  $|\overline{l_{k_1} l_{k_2}}| \leq 12$  ( $k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ ). Entweder gibt es nun in  $\mathcal{B}$  vor  $l_n$  einen Knoten aus  $K_{R-15}(O)$ , etwa  $l_{k_1}$ . Dann liegt  $\mathcal{B}$  ab  $l_{k_1}$  ganz in  $K_{R-3}(O)$ . Wegen  $l_{n+1} \in \Gamma_R$  gibt es eine ganz in  $K_{R-3}(O)$  verlaufende Bahn von  $l_{n+1}$  zu einem Knoten aus  $K_{R-15}(O)$ . Somit ist  $l_n \in \Gamma_R$ . Gibt es aber in  $\mathcal{B}$  vor  $l_n$  keinen Knoten aus  $K_{R-15}(O)$ , so gibt es wegen  $l_0 \in \Gamma_R$  eine Bahn durch  $l_0$ , die Knoten von  $K_{R-15}(O)$  verbindet und bis auf die Endpunkte in  $K_{R-3}(O) \setminus K_{R-15}(O)$  verläuft. Wegen 4.6 enthält sie  $\mathcal{B}$ , so daß ebenfalls  $l_n \in \Gamma_R$ , w.z.z.w.

Wegen 5.1 und 5.2 werden aus den Dreiecken  $L \in \mathcal{L}_{\Gamma_R}$  von Polygonzügen berandete Bereiche  $L^*$ , die ein endliches Mosaik  $\mathcal{L}_{\Gamma_R}^*$  bilden. Nach Konstruktion gilt  $B(\mathcal{L}_{\Gamma_R}^*) \supset B(\mathcal{L}_{\Gamma_R})$ . Es sei  $B := B(\mathcal{L}_{\Gamma_R}^*)$ .

$\Gamma$  sei eine Zusammenhangskomponente von  $\Gamma_R$ ; die den Knoten von  $\Gamma$  entsprechenden  $\mathcal{L}$ -Dreiecke bilden  $\mathcal{L}_\Gamma$ , die entsprechenden Bereiche  $L^*$  bilden  $\mathcal{L}_\Gamma^*$ . Es sei  $B_\Gamma := B(\mathcal{L}_\Gamma^*)$ ,  $B$  wird dadurch in Bereiche  $B_\Gamma$  zerlegt. Wegen 4.6 und 4.7 hat  $\Gamma$  genau eine Senke. Durchläuft man  $\Gamma$  von seinen Quellen aus zur Senke, so sieht man, daß für alle  $L \in \mathcal{L}_\Gamma$  gilt  $\text{conv}(l \cup L) \subset B_\Gamma$ . Daraus folgt  $B(\mathcal{L}_\Gamma) \subset B_\Gamma$ .

(3)  $l$  sei die Senke von  $\Gamma$ . Ist  $l$  nicht Senke von  $\Gamma_\infty$ , so hat  $L$  eine trennende Seite  $s$ .  $L' \neq L$  sei das andere  $\mathcal{L}$ -Dreieck mit Seite  $s$ , und weil  $l$  Senke von  $\Gamma$  ist, gilt  $l' \notin \Gamma_R$ . Aus  $|\overline{l'l'}| \leq 3$  folgt also  $l' \notin K_{R-18}(O)$ .

6. Zu einem Knoten  $l \in \Gamma_R$  ist  $L^* \subset K_3(l)$ . Deshalb gilt  $B \subset K_R(O)$ , d.h.  $\pi R^2 \geq |B|$ .

Jeder Punkt  $p \in K_{R-24}(O)$  liegt in einem  $\mathcal{L}$ -Dreieck, dessen Umkreismittelpunkt höchstens um 3 von  $p$  entfernt ist, also zu  $\Gamma_R$  gehört.  $B$  enthält also  $K_{R-24}(O)$ . Deshalb gilt

$$|M(K_R(O))| \leq |M(B) \cap K_{R-24}(O)| + 2|K_R(O) \setminus K_{R-24}(O)| - |B \cap (K_R(O) \setminus K_{R-24}(O))|.$$

Daraus folgt

$$\frac{|M(K_R(O))|}{\pi R^2} \leq \frac{|M(B) \cap K_{R-24}(O)| - |B \cap K_R(O) \setminus K_{R-24}(O)|}{|B|} + \frac{96}{R}.$$

Zum Beweis von (1) genügt es also, zu zeigen

$$(11) \quad \frac{|M(B_\Gamma) \cap K_{R-24}(O)| - |B_\Gamma \cap K_R(O) \setminus K_{R-24}(O)|}{|B_\Gamma|} \leq \sqrt{48} - 6,$$

für alle Zusammenhangskomponenten  $\Gamma$  von  $\Gamma_R$ .

7. (11) wird gezeigt im Fall, daß  $\mathcal{L}_\Gamma$  ein Dreieck  $L$  mit  $U(L) < 1$  oder ohne Seite mit Länge  $> 1$  enthält. Nach 4.2 und 4.3 ist dann  $B_\Gamma = L$ . Es sei  $L := O_1 O_2 O_3$ .

Hat keine Seite von  $L$  eine Länge  $> 1$ , so ist  $L \subset K_1, K_2, K_3$ , d.h.  $M(B_\Gamma) = \emptyset$  und (11) gilt.

Ist aber  $U(L) < 1$ , oder sogar  $U(L) \leq 1$ , so ist  $L \subset K_1 \cup K_2 \cup K_3$ . Deshalb ist  $\frac{|M(L)|}{|L|} \leq \delta_1$ , der Kreisdichte von  $L$  bezüglich  $\{K_1, K_2, K_3\}$ .

Ist speziell  $L$  stumpfwinklig mit dem stumpfen Winkel etwa bei  $O_3$ , so sei  $\tau$  die perspektive Affinität mit der Fixpunktgeraden  $O_1 O_2$ , mit  $O_3 \tau(O_3)$  orthogonal zu  $O_1 O_2$ , und mit Charakteristik  $> 1$  so, daß  $O_1 O_2 \tau(O_3)$  ein rechtwinkliges Dreieck ist.  $\tau$  läßt die Verhältnisse von Flächeninhalten invariant. Aus  $U(L) \leq 1$  folgt  $|\overline{O_1 O_2}| \leq 2$ , so daß  $U(O_1 O_2 \tau(O_3)) \leq 1$ . Deshalb ist  $O_1 O_2 \tau(O_3) \subset K_1 \cup K_2 \cup K(\tau(O_3))$ . Weil außerdem  $\tau(K_1) \supset K_1$ ,  $\tau(K_2) \supset K_2$ ,  $\tau(K_3) \supset K(\tau(O_3))$ , ist  $\delta_1$  kleiner als die Kreisdichte im nicht-stumpfwinkligen Dreieck  $O_1 O_2 \tau(O_3)$  bezüglich  $\{K_1, K_2, K(\tau(O_3))\}$  mit  $U(O_1 O_2 \tau(O_3)) \leq 1$ . Deshalb ist o.B.d.A.  $L$  nicht stumpfwinklig.

Verkleinert man  $K_1, K_2, K_3$  konzentrisch, bis ihre Ränder durch den Umkreismittelpunkt  $l$  von  $L$  gehen, so wird die Kreisdichte in  $L$  vergrößert. Deshalb ist o.B.d.A.  $U(L) = 1$ .

Die Strecken, die  $l$  und die Ecken von  $L$  verbinden, zerlegen  $L$  in  $g$ -Dreiecke. Sind alle diese  $g$ -Dreiecke breit, mit halber Basislänge  $r_k$  und relevantem Winkel  $\alpha_k$  ( $k=1, 2$ , wenn  $L$  rechtwinklig, sonst  $k=1, 2, 3$ ), so ist nach 3.1

$$(12) \quad \frac{|M(L)|}{|L|} \leq \delta_1 \leq \frac{e(r_1, \alpha_1) + \dots + e(r_n, \alpha_n)}{f(r_1, \alpha_1) + \dots + f(r_n, \alpha_n)} \quad (n = 2 \text{ oder } 3)$$

mit

$$(13) \quad 0 < \alpha_k < \frac{\pi}{2}, \quad r_k > \frac{1}{2}, \quad r_k = \cos \alpha_k$$

und

$$(14) \quad \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \cong \frac{\pi}{6}.$$

In 13. bis 17. wird gezeigt, daß Brüche wie in (12) mit den Nebenbedingungen (13) und (14) die obere Schranke  $\sqrt{48}-6$  haben.

Ist aber eines dieser  $g$ -Dreiecke schmal, etwa  $\Delta$  mit dem relevanten Winkel  $\alpha$ , so ist  $|L \setminus \Delta|$  kleiner als der Flächeninhalt eines Einheitskreissektors mit Zentriwinkel  $\pi - 2\alpha$ . Deshalb ist nach 3.2  $\delta_1 \leq \sqrt{48}-6$ .

8. (11) bleibt zu zeigen im Fall, daß alle Dreiecke von  $\mathcal{L}_\Gamma$  einen Umkreisradius  $\cong 1$  und eine Seite mit Länge  $> 1$  haben.

Dazu wird  $B_\Gamma$  in ein Polygonnetz  $\mathcal{D}_\Gamma$  aus (breiten, schmalen, geknickten)  $g$ -Dreiecken zerlegt, indem jedes  $L^* \in \mathcal{L}_\Gamma^*$  zerlegt wird durch die Verbindungsstrecken von  $l$  mit den Ecken von  $L$  (Abb. 5). Jedes Polygon von  $\mathcal{D}_\Gamma$  hat genau 2 Ecken aus  $\{O_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , die restlichen Ecken sind Knoten von  $\Gamma$ . Die geknickten  $g$ -Dreiecke entsprechen bijektiv den Kanten von  $\Gamma$ , wobei eine Kante von  $\Gamma$  das entsprechende  $g$ -Dreieck in 2 kongruente Dreiecke zerlegt, und die gerichtete Kante zur Spitze des  $g$ -Dreiecks weist.

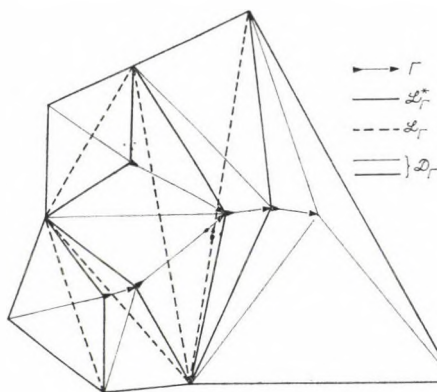


Abb. 5

Die Seiten von  $\mathcal{D}_\Gamma$  mit einem Knoten von  $\Gamma$  als Ecke haben die Länge  $\cong 1$ .

Nach 4.6 und 4.7 hat  $\Gamma$  genau eine Senke  $l$ . Jeder von  $l$  verschiedene Knoten ist Ecke von genau 3  $\mathcal{D}_\Gamma$ -Polygonen.  $L$  hat eine Seite mit Länge  $> 1$  und  $U(L) \cong 1$ . Ist also  $l$  auch Senke von  $\Gamma_\infty$ , so ist  $L$  nach 4.1 rechtwinklig oder spitzwinklig. Dann ist  $l$  Ecke von  $\cong 3$   $\mathcal{D}_\Gamma$ -Polygonen. Ist aber  $l$  nicht Senke von  $\Gamma_\infty$ , so ist  $L$  nach 4.1 stumpfwinklig, und  $l$  ist Ecke von 2  $\mathcal{D}_\Gamma$ -Polygonen.



9. Zu einem Knoten  $l$  von  $\Gamma$  sei  $\Gamma_l$  der von  $l$  und allen Knoten vor  $l$  aufgespannte Graph. Die den Knoten von  $\Gamma_l$  entsprechenden  $\mathcal{L}$ -Dreiecke bilden  $\mathcal{L}_{\Gamma_l}$ ,  $\mathcal{D}_{\Gamma_l}$  sei die Menge der  $\mathcal{D}_{\Gamma_l}$ -Polygone, die Knoten von  $\Gamma_l$  als Ecken haben. Dann ist  $B(\mathcal{L}_{\Gamma_l}) \subset B(\mathcal{D}_{\Gamma_l})$ . Wenn  $\Gamma_l$  genau  $m$  Knoten hat, ist  $m\pi$  die Summe der Winkel aller Dreiecke aus  $\mathcal{L}_{\Gamma_l}$ ; also ist die Summe der relevanten Winkel aller  $\mathcal{D}_{\Gamma_l}$ -Polygone  $\cong \frac{1}{2}m\pi$ .

Jedes Polygon aus  $\mathcal{D}_{\Gamma_l}$  hat mindestens einen Knoten von  $\Gamma_l$  als Ecke, und nach 8. ist jeder Knoten von  $\Gamma_l$  Ecke von  $\leq 3$   $\mathcal{D}_{\Gamma_l}$ -Polygonen. Deshalb gilt für die Anzahl  $k$  der  $\mathcal{D}_{\Gamma_l}$ -Polygone  $k \leq 3m$ . Die Polygone von  $\mathcal{D}_{\Gamma_l}$  haben den mittleren relevanten Winkel  $\alpha \cong \frac{1}{2}m\pi/k$ , also ist

$$(15) \quad \alpha \cong \frac{\pi}{6}.$$

Ist bei einer Menge aus  $\leq 3(m-u)$   $g$ -Dreiecken die Summe ihrer relevanten Winkel um  $\cong \frac{1}{2}u\pi$  kleiner als die von  $\mathcal{D}_{\Gamma_l}$ , so gilt für den mittleren relevanten Winkel ebenfalls (15). Eine Menge aus  $\leq 3(m-u)$   $g$ -Dreiecken entsteht, wenn man aus  $\mathcal{D}_{\Gamma_l}$   $u$  nicht geknickte und  $u$  geknickte  $g$ -Dreiecke entfernt, sofern letztere einen von  $l$  verschiedenen Knoten von  $\Gamma_l$  als Ecke haben.

10. Gezeigt wird  $|M(\Delta) \cap K_{R-24}(O)| \leq e(\Delta)$  für  $\Delta \in \mathcal{D}_{\Gamma}$ , wobei  $e(\Delta)$  gemäß 3. definiert ist. Dazu genügt es,  $|M(\Delta)| \leq e(\Delta)$  zu zeigen im Fall  $\Delta \cap K_{R-24}(O) \neq \emptyset$ .

Als erstes sei  $\Delta \in \mathcal{D}_{\Gamma}$  ein geknicktes  $g$ -Dreieck, das durch die  $\Gamma$ -Kante  $(l', l)$  in zwei kongruente Dreiecke  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  zerlegt wird, und  $O_1$  bzw.  $O_2$  sei Ecke von  $\Delta_1$  bzw.  $\Delta_2$ . Die Stützkreise um  $l$  und  $l'$  durch  $O_1$  enthalten keinen Punkt  $O_i$  im Inneren, also ebenso die Kreise um Punkte aus  $\overline{l'l'}$  durch  $O_1$ . Daher ist  $M(\Delta)$  enthalten in der von  $\{K_1, K_2\}$  einfach bedeckten Menge.

Nun sei  $\Delta \in \mathcal{D}_{\Gamma}$  kein geknicktes  $g$ -Dreieck, d.h.  $\Delta = lO_1O_2$ .  $K_3 \neq K_1, K_2$  sei ein beliebiger Kreis aus  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Sein Mittelpunkt  $O_3$  liegt nicht im Inneren des Stützkreises um  $l$  durch  $O_1$  mit Radius  $\cong 1$ . Liegt also ein Punkt von  $K_3$  in  $\Delta \setminus K_1 \setminus K_2$ , so liegt  $O_3$  auf der  $l$  nicht enthaltenden Seite von  $O_1O_2$  und so, daß der Fußpunkt des Lots von  $O_3$  aus auf  $O_1O_2$  zwischen  $O_1$  und  $O_2$  liegt.  $\Delta$  sei der Punkt  $\Delta \cap \partial K_1 \cap \partial K_2$  bzw. der Mittelpunkt von  $\overline{O_1O_2}$ , wenn  $\partial K_1 \cap \partial K_2 = \emptyset$ .

Ist dann  $\Delta$  breit, d.h.  $|\overline{O_1O_2}| > 1$ , so ist  $O_3$  nicht im Inneren des Kreises  $C$  um  $\Delta$  durch  $O_1$ , denn sonst hätte das an  $L$  längs  $\overline{O_1O_2}$  anschließende  $\mathcal{L}$ -Dreieck  $L'$  die Seite  $\overline{O_1O_2}$  als trennende Seite; wegen  $\Delta \cap K_{R-24}(O) \neq \emptyset$  nach Voraussetzung ist  $\Delta \subset K_{R-18}(O)$ , also ist  $L' \cap K_{R-18}(O) \neq \emptyset$ , so daß  $l' \in K_{R-15}(O)$ , d.h.  $L' \in \mathcal{L}_{\Gamma_R}$ ; somit wäre  $\overline{O_1O_2}$  ersetzte Seite im Widerspruch zur Voraussetzung über  $\Delta$ .  $\overline{O_3}$  sei der Schnittpunkt von  $\partial C$  mit dem Lot von  $O_3$  aus auf  $O_1O_2$ .  $K(\overline{O_3})$  liegt dann innerhalb  $\Delta$  ganz in  $K_1 \cup K_2$ , also recht  $K_3$ . Deshalb ist  $M(\Delta)$  enthalten in der von  $\{K_1, K_2\}$  einfach bedeckten Menge.

Ist aber  $\Delta$  schmal, d.h.  $|\overline{O_1O_2}| \leq 1$ , so sei  $\mathcal{R}$  das Rechteck mit den Seitenlängen 1 und  $|\overline{O_1O_2}|$ , das  $O_1$  und  $O_2$  als Ecken hat und auf derselben Seite von  $O_1O_2$  liegt wie  $\Delta$ . Dann ist  $M(\Delta) \subset (\Delta \cap \mathcal{R}) \setminus (K_1 \cap K_2)$ . Deshalb ist  $|M(\Delta)| \leq e(\Delta)$  dann rich-

tig, wenn gilt ( $A_1 := AO_1O_2$ )

$$(16) \quad |\Delta \cap \mathcal{R} \setminus K_1 \setminus K_2| \equiv |\Delta \cap K_1 \cap K_2 \setminus A_1|.$$

Zum Beweis von (16) sei  $l$  in der speziellen Lage  $l_0$  so weit von  $O_1O_2$  entfernt, daß  $\overline{l_0O_2}$  von seinem Schnittpunkt  $F_0$  mit  $\partial K_1$  halbiert wird (Abb. 6). Mit  $\Delta_0 :=$

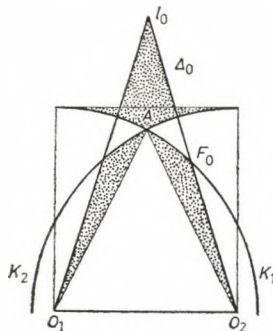


Abb. 6

$:= l_0O_1O_2$  gilt dann

$$(17) \quad \frac{1}{2} |\Delta_0 \cap \mathcal{R} \setminus K_1 \setminus K_2| \equiv |l_0AF_0| = |O_2AF_0| \equiv \frac{1}{2} |\Delta_0 \cap K_1 \cap K_2 \setminus A_1|.$$

Außerdem ist

$$(18) \quad |\Delta_0 \setminus \mathcal{R}| \equiv |\mathcal{R} \setminus \Delta_0 \setminus K_1 \setminus K_2|;$$

denn speziell für  $|\overline{O_1O_2}| = 1$  rechnet man (18) nach, und eine perspektive Affinität  $\tau$  mit Fixpunktgerade  $l_0A$  und mit  $\tau(O_1)\tau(O_2) = O_1O_2$  zeigt dann wegen ihrer Invarianz von Inhaltsverhältnissen, daß (18) allgemein gilt.

Liegt nun  $l$  näher bei  $O_1O_2$  als  $l_0$ , so gilt in der (17) entsprechenden Ungleichung überall das  $\equiv$ -Zeichen, d.h. (16) gilt. Liegt aber  $l$  weiter weg von  $O_1O_2$  als  $l_0$ , so folgt aus (17) und (18)

$$|\Delta \cap \mathcal{R} \setminus K_1 \setminus K_2| \equiv |\mathcal{R} \setminus K_1 \setminus K_2| \equiv 2 |l_0AF_0| = 2 |O_2AF_0| \equiv |\Delta \cap K_1 \cap K_2 \setminus A_1|,$$

d.h. (18) gilt.

**11.** Es sei  $l$  eine Quelle von  $\Gamma$ , die in  $\Gamma$  einen Nachfolger  $l$  hat.  $l$  und  $l$  sind dann Ecken eines geknickten  $g$ -Dreiecks von  $\mathcal{D}_\Gamma$ , etwa von  $lO_1lO_3$ , und  $l$  sei außerdem Ecke der  $g$ -Dreiecke  $lO_1O_2$  und  $lO_2O_3$ .  $l_0 \neq l$  sei ein Knoten von  $\Gamma$  nach  $l$ .

*Gezeigt wird:* Sind  $lO_1O_2$  und  $lO_2O_3$  beide schmal, so gibt es Punkte  $l'$  und  $O'_2$  so, daß gilt

(1)  $lO_1l'O_3$ ,  $l'O_1O'_2$ ,  $l'O'_2O_3$  sind  $g$ -Dreiecke,  $l'O_1O'_2$  ist breit.

(2) Ersetzt man durch diese 3  $g$ -Dreiecke die entsprechenden  $g$ -Dreiecke von  $\mathcal{D}_{\Gamma_{l_0}}$ , so entstehe  $\mathcal{D}'_{\Gamma_{l_0}}$ . Wird dann für jedes  $\Delta$  aus  $\mathcal{D}_{\Gamma_{l_0}}$  oder  $\mathcal{D}'_{\Gamma_{l_0}}$  die Dichte  $\frac{e(\Delta)}{|\Delta|}$

zugrunde gelegt, so gilt für die Gesamtdichten

$$(19) \quad \delta(\mathcal{D}_{I_0}) \equiv \delta(\mathcal{D}'_{I_0}).$$

Zum Beweis sei  $H$  die von  $O_1O_3$  begrenzte abgeschlossene Halbebene, die  $l$  enthält.  $l' \in H$  sei der Punkt auf  $l$  mit  $|l'O_1|=1$ .  $L:=O_1O_2O_3$  ist das  $l$  zugeordnete  $\mathcal{L}_F$ -Dreieck. Daraus folgt einerseits  $U(L) \equiv 1$ , also  $|\overline{ll}| \equiv |\overline{l'l}|$ , und andererseits  $|\overline{O_1O_3}| > 1$ . Deshalb gibt es einen Punkt  $O'_2 \notin H$  so, daß  $|\overline{O'_2l'}|=1$ , daß

$$(20) \quad |O_1O_2O_3| \equiv |O_1O'_2O_3|,$$

und daß  $|\overline{O_1O'_2}| > 1$  gilt.

Nach Konstruktion gilt 11.1. Um 11.2 zu zeigen, sei  $A:=\partial K_1 \cap \partial K_2 \cap H$ ,  $B:=\partial K_2 \cap \partial K_3 \cap H$ , und  $A'$  bzw.  $B'$  sei der Punkt aus  $H$  auf  $\partial K_1$  bzw.  $\partial K_3$  mit maximalem Abstand von  $O_1O_3$  (Abb. 7). Dann ist  $U(A'B'l')=1$ , so daß  $U(ABl') \leq 1$ .

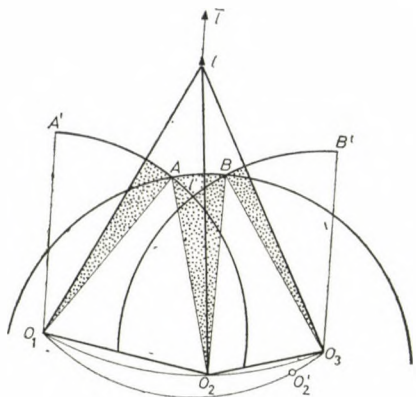


Abb. 7

Deshalb gilt für die Bögen  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{A'l'}$  und  $\widehat{B'l'}$  auf den Einheitskreisen die Ungleichung

$$(21) \quad |\widehat{AB}| \leq |\widehat{A'l'}| + |\widehat{B'l'}|.$$

Daher ist

$$\delta(\mathcal{D}_{I_0}) = \frac{\dots + e(|O_1O_3|) + 2|O_2\widehat{AB}|}{\dots + |lO_1O_3| + |lO_1O_2| + |lO_2O_3|} \leq \frac{\dots + e(|lO_1l'O_3|)}{\dots + |lO_1l'O_3| + |l'O_1O'_2| + |l'O'_2O_3|}$$

wegen (21) und (20). Also ist  $\delta(\mathcal{D}_{I_0}) \equiv \delta(\mathcal{D}'_{I_0})$ .

**12.** Um nun (11) zu zeigen, wird für  $A \in \mathcal{D}_F$  die Dichte  $\frac{e(A)}{|A|}$  zugrunde gelegt. Dann ist nach 8. und 10.

$$(22) \quad \frac{|M(B_F) \cap K_{R-24}(O)|}{|B_F|} \equiv \delta(\mathcal{D}_F),$$

der Gesamtdichte von  $\mathcal{D}_F$ .

Es sei  $l_0$  ein Knoten von  $\Gamma$ , der nicht Ecke eines schmalen  $g$ -Dreiecks ist. Zunächst wird  $\delta(\mathcal{D}_{\Gamma_{l_0}}) \leq \sqrt{48} - 6$  gezeigt. Wegen 11. kann dazu o.B.d.A. angenommen werden, daß jede Quelle von  $\Gamma_{l_0}$  Ecke eines breiten  $g$ -Dreiecks ist. Entweder enthält  $\mathcal{D}_{\Gamma_{l_0}}$  von vornherein kein schmales  $g$ -Dreieck. Sonst aber sei  $\mathcal{B}$  eine Bahn von einer Quelle von  $\Gamma_{l_0}$  zu  $l_0$ , durch die Spitze eines schmalen  $g$ -Dreiecks. Beim Durchlaufen von  $\mathcal{B}$  in umgekehrter Richtung, d.h. von  $l_0$  aus, sei  $l$  der erste Knoten von  $\Gamma$ , der Ecke eines schmalen  $g$ -Dreiecks ist, etwa von  $lO_1O_2$ .  $l$  sei der Nachfolger von  $l$  in  $\Gamma$ ,  $\bar{l}$  sei der Vorgänger von  $l$  bzw. — wenn  $l$  Quelle von  $\Gamma_{l_0}$  ist — der Mittelpunkt der Basis des breiten  $g$ -Dreiecks mit Ecke  $l$  (Abb. 8).  $l$  und  $\bar{l}$  sind Ecken eines geknickten  $g$ -Dreiecks, etwa  $lO_1lO_3$ .

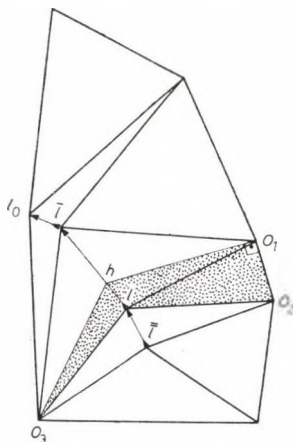


Abb. 8

Haben nun die relevanten Winkel von  $lO_1O_2$  und  $lO_1lO_3$  eine Summe  $\leq \frac{\pi}{2}$ , so ist mit 3.2  $\delta(lO_1O_2, lO_1lO_3) \leq \sqrt{48} - 6$ .  $\delta(\mathcal{D}_{\Gamma_{l_0}}) := \delta(\mathcal{D}_{\Gamma_{l_0}} \setminus \{lO_1O_2, lO_1lO_3\})$  bleibt abzuschätzen. Der mittlere relevante Winkel der Polygone von  $\mathcal{D}_{\Gamma_{l_0}}$  ist  $\geq \frac{\pi}{6}$  nach 9.

Haben aber die relevanten Winkel von  $lO_1O_2$  und  $lO_1lO_3$  eine Summe  $> \frac{\pi}{2}$ , so sei  $h \in \bar{l}$  so, daß  $\sphericalangle hO_1O_2 = \frac{\pi}{2}$ .  $lO_1lO_3$  wird in die zwei geknickten  $g$ -Dreiecke  $lO_1hO_3$  und  $hO_1lO_3$  mit den Dichten  $\frac{e(\dots)}{|\dots|}$  zerlegt. Wieder ist  $\delta(lO_1O_2, hO_1lO_3) \leq \sqrt{48} - 6$ , und  $\delta((\mathcal{D}_{\Gamma_{l_0}} \setminus \{lO_1O_2, lO_1lO_3\}) \cup \{lO_1hO_3\}) =: \delta_1$  bleibt abzuschätzen. Wegen  $\sphericalangle O_3lO_2 = \sphericalangle O_3hO_1$  gibt es auf dem von  $l$  ausgehenden Strahl durch  $l$  einen Punkt  $h'$  so, daß  $\sphericalangle O_3h'O_2 = \sphericalangle O_3lO_1$ . Zusammen mit  $|\overline{O_3h}| \geq |\overline{O_3l}|$  ist  $|lO_1hO_3| \geq |h'O_2lO_3|$ . Deshalb wird  $\delta_1$  höchstens vergrößert, wenn  $\{lO_1hO_3,$

$lO_2lO_3\}$  ersetzt wird durch das geknickte oder breite  $g$ -Dreieck  $h'O_2lO_3$  mit der Dichte  $\frac{e(\dots)}{|\dots|}$ . Der mittlere relevante Winkel der  $g$ -Dreiecke der so entstehenden

Menge  $\mathcal{D}_{\Gamma_{l_0}}''$  ist  $\cong \frac{\pi}{6}$  nach 9.

Man geht nun von  $l$  aus auf  $\mathcal{B}$  weiter und wiederholt das Verfahren gegebenenfalls, bzgl.  $\mathcal{D}_{\Gamma_{l_0}}''$ : Ist also speziell  $l$  Ecke eines schmalen  $g$ -Dreiecks, so spielt jetzt  $h'O_2lO_3$  die Rolle des oberen  $lO_1lO_3$ . Weil ein Knoten von  $\Gamma_{l_0}$  mit der Eingangsvalenz 2 nicht Ecke eines schmalen  $g$ -Dreiecks ist, läßt sich das Verfahren successive auf alle zu  $l_0$  führenden Bahnen anwenden. Man erhält schließlich eine Menge von  $g$ -Dreiecken mit mittlerem relevantem Winkel  $\cong \frac{\pi}{6}$ , die ebenfalls kein schmales  $g$ -Dreieck enthält. Für ihre Gesamtdichte  $\delta_2$  gilt nach (2), 3.1 und 3.3

$$(23) \quad \delta_2 \cong \frac{e(r_1, \alpha_1) + \dots + e(r_n, \alpha_n)}{f(r_1, \alpha_1) + \dots + f(r_n, \alpha_n)}$$

mit

$$(24) \quad 0 < \alpha_k < \frac{\pi}{2}, \quad r_k > \frac{1}{2}, \quad r_k \cong \cos \alpha_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

und

$$(25) \quad \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \cong \frac{\pi}{6}.$$

In 13. bis 17. wird gezeigt, daß Brüche wie in (23) mit den Nebenbedingungen (24) und (25) für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  die obere Schranke  $\sqrt{48} - 6$  haben. Dann ist insgesamt gezeigt

$$(26) \quad \delta(\mathcal{D}_{\Gamma_{l_0}}) \cong \sqrt{48} - 6.$$

Zum Beweis von (11) sei nun  $l_1$  die Senke von  $\Gamma$ , d.h.  $\Gamma = \Gamma_{l_1}$ . Wenn  $l_1$  nicht Ecke eines schmalen  $g$ -Dreiecks ist, folgt aus (22) und (26) sofort (11).  $l_1$  sei also Ecke eines schmalen  $g$ -Dreiecks. Weil dann die Eingangsvalenz von  $l_1$  höchstens 2 ist, hat  $\Gamma$  höchstens 2 Knoten  $l'_j$  ( $j=1, 2$ ) so, daß jeder Knoten zwischen  $l'_j$  und  $l_1$  Ecke eines schmalen  $g$ -Dreiecks ist,  $l'_j$  aber nicht.  $\Gamma_{l'_j}$  und  $\mathcal{D}_{\Gamma_{l'_j}}$  sei leer, wenn  $l'_j$  nicht existiert. Nach (26) ist

$$(27) \quad \delta(\mathcal{D}_{\Gamma_{l'_j}}) \cong \sqrt{48} - 6 \quad (j = 1, 2).$$

$m \geq 1$  sei die Anzahl der Knoten von  $\Gamma \setminus \Gamma_{l'_1} \setminus \Gamma_{l'_2}$ , es sei  $\mathcal{D}_{\Gamma_-} := \mathcal{D}_{\Gamma} \setminus \mathcal{D}_{\Gamma_{l'_1}} \setminus \mathcal{D}_{\Gamma_{l'_2}}$ . Dann enthält  $\mathcal{D}_{\Gamma_-}$  nach Definition von  $l'_j$  mindestens  $m$  schmale  $g$ -Dreiecke.

Zuerst wird der Fall betrachtet, daß die relevanten Winkel aller  $g$ -Dreiecke von  $\mathcal{D}_{\Gamma_-}$  eine Summe  $\cong \frac{1}{2} m \pi$  haben.  $\delta(\mathcal{D}_{\Gamma_-})$  wird höchstens vergrößert, wenn alle geknickten und breiten  $g$ -Dreiecke von  $\mathcal{D}_{\Gamma_-}$  durch Einheitskreis-Sektoren mit der Dichte 1 ersetzt werden, deren Zentriwinkel der doppelte relevante Winkel ist. Faßt man alle diese Kreissektoren zu einem einzigen Kreissektor zusammen, und



nimmt davon zu jedem schmalen  $g$ -Dreieck  $\Delta$  von  $\mathcal{D}_{r-}$  einen geeigneten Anteil  $S$ , so folgt nach 3.2  $\delta(\Delta, S) \leq \sqrt{48} - 6$ , also  $\delta(\mathcal{D}_{r-}) \leq \sqrt{48} - 6$ . Zusammen mit (27) und (22) folgt (11).

Es bleibt der Fall, daß die relevanten Winkel aller  $g$ -Dreiecke von  $\mathcal{D}_{r-}$  die Summe  $\frac{1}{2}m\pi + \beta$  ( $\beta > 0$ ) haben. Dann ist das  $l_1$  zugeordnete  $\mathcal{L}$ -Dreieck  $L_1$  stumpfwinklig, d.h.  $l_1$  ist nicht Senke von  $\Gamma_\infty$ . Also hat  $l_1$  die Eingangsvalenz  $\leq 1$ , d.h.  $l'_2$  existiert nicht, und die Knoten von  $\Gamma \setminus \Gamma_{l'_1}$  lassen sich der Reihe nach mit  $l_1, \dots, l_m$  bezeichnen.  $l_j$  ist Ecke des schmalen  $g$ -Dreiecks  $\Delta_j$  ( $j=1, \dots, m$ ),  $l_j$  und  $l_{j+1}$  sind Ecken des geknickten  $g$ -Dreiecks  $\Delta_{j,j+1}$  ( $j=1, \dots, m-1$ ). Dies sind alle  $\mathcal{D}_{r-}$ -Polygone genau dann, wenn  $l'_1$  existiert, sonst ist  $l_m$  noch Ecke eines nicht geknickten  $g$ -Dreiecks  $\Delta_{m,m+1}$ , und  $l_{m+1}$  sei der Mittelpunkt seiner Basis. Ein Punkt  $h \in \overline{l_j l_{j+1}}$  ( $j=1, \dots, m-1$  bzw.  $m$ ) mit  $h \neq l_j, l_{j+1}$  zerlegt  $\Delta_{j,j+1}$  in zwei  $g$ -Dreiecke  $\Delta_{jh}$  und  $\Delta_{h,j+1}$  mit der Ecke  $l_j$  bzw.  $l_{j+1}$  für  $h=l_j$  sei  $\Delta_{jh} = \Delta_{hj}$  die sinngemäß definierte geknickte Strecke durch  $l_j$ .

Die relevanten Winkel von  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$  haben eine Summe  $< \frac{1}{2}m\pi$ , so daß die relevanten Winkel der übrigen  $\mathcal{D}_{r-}$ -Polygone eine Summe  $> \beta$  haben. Deshalb gibt es  $j \in \{1, \dots, m-1$  bzw.  $m\}$  und einen Punkt  $h \in \overline{l_j l_{j+1}}$  so, daß die relevanten Winkel von  $\Delta_{12}, \dots, \Delta_{j-1,j}, \Delta_{jh}$  die Summe  $\beta$  haben. Sei  $\mathcal{D}'_{r-} := (\mathcal{D}_{r-} \setminus \{\Delta_{12}, \dots, \Delta_{j,j+1}\}) \cup \{\Delta_{jh}\}$ . Dann gilt wie oben

$$(28) \quad \delta(\mathcal{D}'_{r-}) \leq \sqrt{48} - 6.$$

$\text{conv}(l_1 \cup L_1) \setminus L_1$  ist ein  $g$ -Dreieck mit relevantem Winkel  $\cong \beta$ , und dasselbe gilt also für  $\Delta := \text{conv}(l_1 \cup L_1) \setminus \Delta_1$ . Haben  $\Delta_{j-1,j}$  und  $\Delta_{j,j+1}$  die gemeinsame Ecke  $O$ , so ist das Viereck  $l_{j-1}l_jl_{j+1}O$  konvex; deshalb gilt also

$$(29) \quad |\Delta_{12}| + \dots + |\Delta_{j-1,j}| + |\Delta_{jh}| \leq |\Delta| \leq |\text{conv}(l_1 \cup L_1)|.$$

Nach 5. ist  $\text{conv}(l_1 \cup L_1) \subset B_r$ . Weil  $l_1$  nicht Senke von  $\Gamma_\infty$  ist, ist  $l_1 \notin K_{R-18}(O)$  nach 5.3, also ist  $\text{conv}(l_1 \cup L_1) \subset K_R(O) \setminus K_{R-24}(O)$ . Deshalb ist

$$(30) \quad |\text{conv}(l_1 \cup L_1)| \leq |B_r \cap K_R(O) \setminus K_{R-24}(O)|.$$

Wegen (27) bis (30) ist also

$$\begin{aligned} & \frac{|M(B_r) \cap K_{R-24}(O)| - |B_r \cap K_R(O) \setminus K_{R-24}(O)|}{|B_r|} \leq \\ & \frac{(\sqrt{48} - 6)|B(\mathcal{D}_{r'_1})| + (\sqrt{48} - 6)|B(\mathcal{D}'_{r-})| + |\Delta_{12}| + \dots + |\Delta_{j-1,j}| + |\Delta_{jh}| - |\text{conv}(l_1 \cup L_1)|}{|B(\mathcal{D}_{r'_1})| + |B(\mathcal{D}'_{r-})| + |\Delta_{12}| + \dots + |\Delta_{j-1,j}| + |\Delta_{jh}|} \\ & \leq \sqrt{48} - 6, \end{aligned}$$

so daß ebenfalls (11) gilt.

13. Es bleibt, die Brüche in (12) und (23) abzuschätzen, d.h. für  $n \in \mathbb{N}$  wird gezeigt

$$(31) \quad \frac{e(r_1, \alpha_1) + \dots + e(r_n, \alpha_n)}{f(r_1, \alpha_1) + \dots + f(r_n, \alpha_n)} \leq \sqrt{48} - 6,$$

wenn  $(r_i, \alpha_i) \in G_1 \cup G_2 \cup G_3$  ( $i=1, \dots, n$ ) (vgl. 3.), und wenn für den mittleren Winkel gilt

$$(32) \quad \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \geq \frac{\pi}{6}.$$

Wegen (2) und (5) kann o.B.d.A.  $(r_i, \alpha_i) \in G_2 \cup G_3$  angenommen werden. Nun wird gezeigt, daß sogar  $(r_i, \alpha_i) \in G_2$  angenommen werden kann. Dazu zerlegt man  $G_3$  durch die Gerade

$$(33) \quad \alpha = \alpha_0 := \frac{\pi}{3} + \left( \frac{\pi}{3} - \arccos \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{3}} \right) = 1,139 \dots$$

in die zwei Bereiche  $G'_3$  mit  $\alpha \geq \alpha_0$  und  $G''_3$  mit  $\alpha \leq \alpha_0$ .

**Bereich  $G'_3$ .** Es sei etwa  $(r_1, \alpha_1) \in G'_3$ .  $(r'_1, \alpha'_1)$  sei der eindeutig bestimmte Punkt (betrachte Abb. 1) mit

$$(34) \quad \alpha'_1 - \arccos r'_1 = \alpha_1 - \arccos r_1$$

und

$$(35) \quad 2r'_1 \sin \alpha'_1 = 1 \quad \left( \frac{1}{2} < r'_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Wegen  $\alpha_1 \geq \alpha_0$  ist  $\alpha_1 \geq \alpha'_1 \geq \frac{\pi}{3}$  und also  $r_1 \leq r'_1 \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{3}}$ . Zunächst wird gezeigt,

daß

$$(36) \quad e(r_1, \alpha_1) - e(r_1, \arccos r_1) \leq e(r'_1, \alpha'_1) - e(r'_1, \arccos r'_1)$$

und

$$(37) \quad f(r_1, \alpha_1) - f(r_1, \arccos r_1) \geq f(r'_1, \alpha'_1) - f(r'_1, \arccos r'_1).$$

Dazu sei  $ABC$  ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis  $\overline{AB}$ ; es sei  $r_1 := \frac{1}{2} |\overline{AB}|$  und  $\alpha_1$  der Basiswinkel. Es sei  $P := ABC \cap \partial K(A) \cap \partial K(B)$ . Wegen  $(r_1, \alpha_1) \in G_3$  ist  $\partial K(B) \cap AC \neq \emptyset$ , und  $\partial K(B) \cap AC$  liegt auf  $\overline{AC}$ . Deshalb gibt es einen Punkt  $B'$  so, daß  $\partial K(B')$  durch  $P$  geht und  $\overline{AC}$  berührt.  $m$  sei das Mittellot von  $\overline{AB}$ ,  $m'$  das von  $\overline{AB'}$  (Abb. 9). Dann schließt  $\overline{AC}$  mit  $\overline{AP}$  den Winkel  $\alpha_1 - \arccos r_1 = \alpha'_1 - \arccos r'_1$  ein. Also ist  $\alpha'_1$  der Winkel zwischen  $\overline{AC}$  und  $\overline{AB'}$  und  $r'_1 = \frac{1}{2} |\overline{AB'}|$ .

$\overline{AP}$ ,  $\overline{AC}$  und  $m$  begrenzen ein Dreieck vom Inhalt  $\frac{1}{2} (f(r_1, \alpha_1) - f(r_1, \arccos r_1))$ , analog  $\overline{AP}$ ,  $\overline{AC}$  und  $m'$ .  $\overline{AP}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\partial K(A)$  und  $\partial K(B)$  begrenzen (siehe Abb. 9) einen

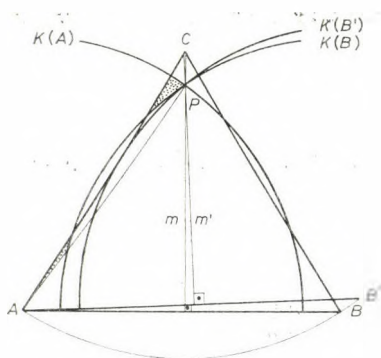


Abb. 9

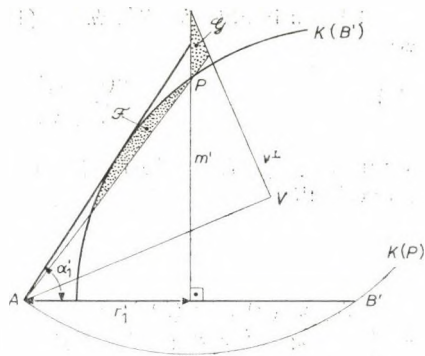


Abb. 10

Bereich vom Inhalt  $\frac{1}{2}(e(r_1, \alpha_1) - e(r_1, \arccos r_1))$ , analog  $\overline{AP}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\partial K(A)$  und  $\partial K(B')$ . Deshalb gilt (36) und (37).

Wie oben seien  $A$  und  $P$  Punkte im Abstand 1.  $V$  sei ein Punkt mit  $|\overline{AV}| = \cos \frac{\pi}{12}$  und  $\angle PAV = \frac{\pi}{6}$ ;  $v^\perp$  sei das Lot auf  $AV$  durch  $V$ . Zu jedem  $r'_1$  mit  $\frac{1}{2} < r'_1 \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{3}}$  gibt es nun einen Punkt  $B'$  auf derselben Seite von  $AP$  wie  $V$  so,

daß  $|\overline{PB'}| = 1$  und  $\frac{1}{2} |\overline{AB'}| = r'_1$ .  $m'$  sei wieder das Mittellot von  $\overline{AB'}$ , und  $\alpha'_1$  sei  $r'_1$  gemäß (35) zugeordnet (Abb. 10).  $\mathcal{G}$  sei das von  $AP$ ,  $m'$  und  $v^\perp$  begrenzte Dreieck. Klar ist, daß  $|\mathcal{G}|$  mit  $r'_1$  wächst, und daß

(38)

$$f(r'_1, \alpha'_1) - f(r'_1, \arccos r'_1) + 2|\mathcal{G}| + f\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right) \cong f\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6} + \alpha'_1 - \arccos r'_1\right).$$

$\mathcal{F}$  sei der Kreisabschnitt von  $K(B')$  mittels  $AP$ ,  $|\mathcal{F}|$  wird kleiner mit wachsendem  $r'_1$ . Klar ist, daß

(39)

$$e(r'_1, \alpha'_1) - e(r'_1, \arccos r'_1) + 2|\mathcal{F}| + e\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right) = e\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6} + \alpha'_1 - \arccos r'_1\right).$$

Speziell für  $\alpha'_1 = \frac{\pi}{3}$  rechnet man nach, daß  $|\mathcal{F}| \cong |\mathcal{G}|$  ist. Wegen  $\alpha'_1 \cong \frac{\pi}{3}$  gilt deshalb für alle Paare  $(r'_1, \alpha'_1)$  mit (35)

(40)

$$|\mathcal{F}| \cong |\mathcal{G}|.$$

Wegen  $e\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right) / f\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{48} - 6$  kann beim Beweis von (31) angenommen werden, daß  $(r_2, \alpha_2) = \left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right)$ ; (32) bleibt dabei gültig. Nun ist

$$\begin{aligned} & \frac{e(r_1, \alpha_1) + e\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right) + \dots}{f(r_1, \alpha_1) + f\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right) + \dots} \equiv \\ & \frac{e(r_1, \arccos r_1) + (e(r'_1, \alpha'_1) - e(r'_1, \arccos r'_1)) + e\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right) + 2|\mathcal{F}| + \dots}{f(r_1, \arccos r_1) + (f(r'_1, \alpha'_1) - f(r'_1, \arccos r'_1)) + f\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right) + 2|\mathcal{G}| + \dots} \\ & \text{wegen (36), (37) und (40)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{e(r_1, \arccos r_1) + e\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6} + \alpha_1 - \arccos r_1\right) + \dots}{f(r_1, \arccos r_1) + f\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6} + \alpha_1 - \arccos r_1\right) + \dots} \end{aligned}$$

wegen (38), (39) und (34). Im letzten Bruch ist der Punkt  $(r_1, \alpha_1) \in G'_3$  eliminiert und die (32) entsprechende Ungleichung gültig.

*Bereich  $G'_3$ .* Im folgenden sei  $\alpha$  fest mit  $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \alpha_0$ . Dann wird für  $\max\left(\frac{1}{2}, \cos \alpha\right) \leq r \leq 1$  eine Funktion  $F_\alpha(r)$  definiert durch  $F_\alpha(r) := f(r, \alpha) - e(r, \alpha) + \alpha$ . Es soll gezeigt werden, daß

$$(41) \quad F_\alpha(r) \geq \min_{r \geq \frac{1}{2 \sin \alpha}} F_\alpha(r).$$

Es ist

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} F_\alpha(r) = \begin{cases} r \tan \alpha - 2 \sqrt{1-r^2} + 4 \sin \alpha \sqrt{1-4r^2 \sin^2 \alpha} & \text{für } r \leq \frac{1}{2 \sin \alpha} \\ r \tan \alpha - 2 \sqrt{1-r^2} & \text{für } r \geq \frac{1}{2 \sin \alpha}, \end{cases}$$

was im folgenden als eine für  $0 \leq r \leq 1$  definierte Funktion aufgefaßt wird. Es ist

$$(42) \quad \frac{d}{dr} F_\alpha(0) > 0, \quad \frac{d}{dr} F_\alpha\left(\frac{1}{2 \sin \alpha}\right) < 0.$$

Für  $0 < r < \frac{1}{2 \sin \alpha}$  ist die Funktion  $y(r) := 2 \sqrt{1-r^2} - 4 \sin \alpha \sqrt{1-4r^2 \sin^2 \alpha}$  konvex; wegen (42) wird sie also von der Geraden  $y = r \tan \alpha$  dort genau einmal geschnitten. Deshalb hat  $\frac{d}{dr} F_\alpha(r)$  in  $\max\left(\frac{1}{2}, \cos \alpha\right) \leq r \leq \frac{1}{2 \sin \alpha}$  höchstens

eine Nullstelle, so daß wegen (42)  $F_\alpha(r)$  sein Minimum dort auf dem Rand annimmt. Zum Beweis von (41) genügt es also zu zeigen, daß es zu  $r_0 := \max\left(\frac{1}{2}, \cos \alpha\right)$  ein  $r_1 \cong \frac{1}{2 \sin \alpha}$  gibt mit  $F_\alpha(r_0) \cong F_\alpha(r_1)$ .

Für festes  $\alpha$  mit  $\frac{\pi}{3} \cong \alpha \cong \alpha_0$  ist nun  $F_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) \cong F_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ; denn dies ist äquivalent zu  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{6}\pi \cong \frac{1}{4} \tan \alpha - \sin 2\alpha - 2\alpha$ , und diese Ungleichung ist speziell für  $\alpha = \alpha_0$  richtig, und ihre rechte Seite ist für  $\alpha \cong \frac{\pi}{3}$  monoton wachsend.

Für festes  $\alpha$  mit  $\frac{\pi}{4} \cong \alpha \cong \frac{\pi}{3}$  aber ist  $F_\alpha(\cos \alpha) \cong F_\alpha\left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)$ ; denn dies ist äquivalent zu  $h(\alpha) := \pi - 3\alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \sin 4\alpha - \frac{1}{2} \tan \alpha \cong 0$ . Es ist  $h\left(\frac{\pi}{4}\right) \cong 0$ ,  $h\left(\frac{\pi}{3}\right) \cong 0$ , so daß  $h(\alpha) \cong 0$  gilt, wenn  $h(\alpha)$  konkav ist, d.h. wenn  $128 \cos^6 \alpha - 60 \cos^4 \alpha - 1 - \frac{1}{2} \cos^3 \alpha \cong 0$ . Weil nun  $\tilde{h}(x) := 128x^6 - 60x^4 - 1$   $\left(\frac{1}{2} \cong x \cong \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  konvex ist und  $\tilde{h}\left(\frac{1}{2}\right) \cong 0$ ,  $\tilde{h}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cong 0$  gilt, folgt die Behauptung.

Damit ist (41) gezeigt, und es sei  $\min_{r \cong \frac{1}{2 \sin \alpha}} F_\alpha(r) =: F_\alpha(r_\alpha)$ , so daß

$$(43) \quad r_\alpha \cong \frac{1}{2 \sin \alpha}.$$

Dann folgt aus (41)

$$\frac{e(r_\alpha, \alpha) - e(r, \alpha)}{f(r_\alpha, \alpha) - f(r, \alpha)} \cong 1.$$

Ist nun in (31) etwa  $(r_1, \alpha_1) \in G_3''$ , so gilt deshalb

$$\frac{e(r_1, \alpha_1) + \dots}{f(r_1, \alpha_1) + \dots} \cong \frac{e(r_1, \alpha_1) + (e(r_{\alpha_1}, \alpha_1) - e(r_1, \alpha_1)) + \dots}{f(r_1, \alpha_1) + (f(r_{\alpha_1}, \alpha_1) - f(r_1, \alpha_1)) + \dots} \cong \frac{e(r_{\alpha_1}, \alpha_1) + \dots}{f(r_{\alpha_1}, \alpha_1) + \dots},$$

und im letzten Bruch ist  $(r_1, \alpha_1)$  nach (43) durch einen Punkt aus  $G_2$  ersetzt, und die (32) entsprechende Ungleichung ist gültig.

14. Es wird gezeigt, daß beim Beweis von (31) o.B.d.A. vorausgesetzt werden kann, daß  $\alpha_i \cong \frac{\pi}{18}$  für alle  $i$  gilt. Es sei also etwa  $\alpha_1 < \frac{\pi}{18}$ , und wie in 13. kann o.B.d.A. angenommen werden, daß  $(r_2, \alpha_2) = \left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right)$ .



Für  $0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{18}$ ,  $r_1 \equiv \cos \alpha_1$  ist dann

$$\begin{aligned} f(r_1, \alpha_1) + f\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right) &\equiv f\left(\cos \frac{\pi}{12}, \alpha_1\right) + f\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right) \equiv \\ &\equiv 2f\left(\frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha_1}{2}\right)}, \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{6}\right)\right), \end{aligned}$$

wobei die zweite Ungleichung sich aus folgender Tatsache ergibt: Gegeben sei ein Winkelraum und ein fester Punkt  $P$  auf seiner Winkelhalbierenden; das Dreieck, das von einer Geraden  $g$  durch  $P$  aus dem Winkelraum ausgeschnitten wird, hat minimalen Flächeninhalt, wenn  $g$  zur Winkelhalbierenden orthogonal ist.

Es sei

$$(r'_1, \alpha'_1) := (r'_2, \alpha'_2) := \left( \frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha_1}{2}\right)}, \frac{\pi}{12} + \frac{\alpha_1}{2} \right).$$

Einfache Rechnung zeigt, daß  $(r'_1, \alpha'_1) \in G_2$ .

Man rechnet nach, daß

$$e(r_1, \alpha_1) + e(r_2, \alpha_2) \equiv \alpha_1 + e(r_2, \alpha_2) \equiv 2e(r'_1, \alpha'_1).$$

Somit ist

$$\frac{e(r_1, \alpha_1) + e(r_2, \alpha_2) + \dots}{f(r_1, \alpha_1) + f(r_2, \alpha_2) + \dots} \equiv \frac{e(r'_1, \alpha'_1) + e(r'_2, \alpha'_2) + \dots}{f(r'_1, \alpha'_1) + f(r'_2, \alpha'_2) + \dots},$$

und im Bruch auf der rechten Seite ist  $\alpha'_1, \alpha'_2 \equiv \frac{\pi}{18}$ , die Argumente sind Punkte aus  $G_2$ , und die (32) entsprechende Ungleichung gilt.

15. Nach 13. und 14. genügt es, die Ungleichung (31) bei Gültigkeit von (32) zu beweisen, wenn  $(r_i, \alpha_i) \in G_2 \cap \left\{ (r, \alpha) \mid \alpha \equiv \frac{\pi}{18} \right\}$ . Dort ist  $e(r, \alpha) = \alpha - 2 \arccos r + \sin(2 \arccos r)$ . Für  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{1}{2} \equiv r \equiv 1$  sei  $\alpha - 2 \arccos r + \sin(2 \arccos r) =: E(r, \alpha)$ . Es wird gezeigt, daß es einen Bereich  $G$  gibt mit

(1)  $G$  ist konvex

(2)  $G \supset G_2 \cap \left\{ (r, \alpha) \mid \alpha \equiv \frac{\pi}{18} \right\}$

(3) auf  $G$  ist  $E(r, \alpha) \equiv 0$ , d.h.  $\alpha \equiv u(r) := 2 \arccos r - \sin(2 \arccos r)$ .

(4) auf  $G$  ist  $\alpha \equiv v(r) := \arctan \frac{\sqrt{1-r^2}}{2r}$ .

Für die Kurven  $\alpha = u(r)$  und  $\alpha = v(r)$  ( $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$ ) gilt:  $u(r)$  ist konvex,  $u'(r) \leq 0$ ;  $v(r)$  hat einen Wendepunkt für  $r = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $v(r)$  ist für  $r \leq \frac{\sqrt{5}}{3}$  konvex und für  $r \geq \frac{\sqrt{5}}{3}$  konkav,  $v'(r) \leq 0$ . Speziell ist  $\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) > u\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) > v\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) > \frac{\pi}{18}$ .

Es sei jetzt  $G$  die Teilmenge von  $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , die nach unten begrenzt wird durch  $u(r)$ , durch die Verbindungsgerade  $g$  von  $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, v\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$  und  $\left(\cos \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\right)$ , und durch die Gerade  $\alpha = \frac{\pi}{18}$  (Abb. 11).

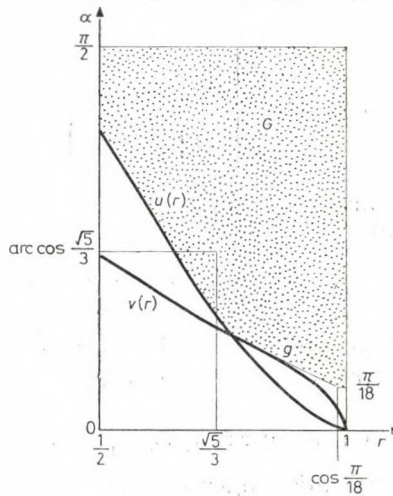


Abb. 11

Dann gilt offensichtlich 15.1 und 15.3. Weil  $E(r, \alpha) \geq 0$  in  $G_2$  und weil  $G_2$  für  $r \geq \frac{\sqrt{5}}{3}$  begrenzt wird von einer konkaven Kurve durch  $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \arccos \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$  und  $\left(\cos \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\right)$ , gilt auch 15.2. Nun gilt für die Steigung  $s_1$  der die Punkte  $\left(\frac{1}{2}, v\left(\frac{1}{2}\right)\right)$  und  $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, v\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$  verbindenden Gerade:  $s_1 > u'\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ ; deshalb gilt wegen der Konvexität von  $v(r)$  in  $\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{\sqrt{5}}{3}$  dort  $u(r) > v(r)$ . Weil für die Steigung  $s_2$  von  $g$  gilt  $s_2 > v'\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ , und weil  $v(r)$  für  $r \geq \frac{\sqrt{5}}{3}$  konkav ist, verläuft dort  $g$  oberhalb  $v(r)$ . Deshalb gilt auch 15.4.

16. Es wird gezeigt<sup>1</sup>, daß für  $(r_i, \alpha_i) \in G$  gilt

$$(44) \quad \frac{E(r_1, \alpha_1) + \dots + E(r_n, \alpha_n)}{f(r_1, \alpha_1) + \dots + f(r_n, \alpha_n)} = \frac{E(\bar{r}, \bar{\alpha})}{f(\bar{r}, \bar{\alpha})},$$

wobei

$$\bar{r} := \frac{r_1 + \dots + r_n}{n}, \quad \bar{\alpha} := \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n}.$$

Ist  $\bar{r} = 1$ , d.h.  $r_1 = \dots = r_n = 1$ , so folgt (44) unmittelbar aus der Konvexität der Funktion  $\tan \alpha$ . Sonst aber sei  $h_i := r_i - \bar{r}$ ,  $k_i := \alpha_i - \bar{\alpha}$ , d.h.

$$(45) \quad \sum_{i=1}^n h_i = \sum_{i=1}^n k_i = 0.$$

Dann ist für  $0 \leq t \leq 1$  der Punkt  $(\bar{r} + th_i, \bar{\alpha} + tk_i) \in G$  nach 15.1. Nun betrachte man

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=1}^n E(\bar{r} + th_i, \bar{\alpha} + tk_i)}{\sum_{i=1}^n f(\bar{r} + th_i, \bar{\alpha} + tk_i)} - \frac{E(\bar{r}, \bar{\alpha})}{f(\bar{r}, \bar{\alpha})} = \\ & = \frac{f(\bar{r}, \bar{\alpha}) \left( \sum_{i=1}^n E(\bar{r} + th_i, \bar{\alpha} + tk_i) \right) - E(\bar{r}, \bar{\alpha}) \left( \sum_{i=1}^n f(\bar{r} + th_i, \bar{\alpha} + tk_i) \right)}{f(\bar{r}, \bar{\alpha}) \left( \sum_{i=1}^n f(\bar{r} + th_i, \bar{\alpha} + tk_i) \right)} =: \frac{Z(t)}{N(t)}. \end{aligned}$$

Wegen  $N(t) > 0$  ist also (44) äquivalent zu  $Z(1) \leq 0$ . Weil die erste Ableitung von  $Z(t)$  in  $[0, 1]$  existiert und stetig ist und weil die zweite Ableitung in  $(0, 1)$  existiert, gilt nach dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned} 2Z(1) &= \sum_{i=1}^n [f(\bar{r}, \bar{\alpha}) E_{rr}(\bar{r} + \theta h_i, \bar{\alpha} + \theta k_i) - E(\bar{r}, \bar{\alpha}) f_{rr}(\bar{r} + \theta h_i, \bar{\alpha} + \theta k_i)] h_i^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^n [f(\bar{r}, \bar{\alpha}) E_{r\alpha}(\bar{r} + \theta h_i, \bar{\alpha} + \theta k_i) - E(\bar{r}, \bar{\alpha}) f_{r\alpha}(\bar{r} + \theta h_i, \bar{\alpha} + \theta k_i)] 2h_i k_i + \\ &+ \sum_{i=1}^n [f(\bar{r}, \bar{\alpha}) E_{\alpha\alpha}(\bar{r} + \theta h_i, \bar{\alpha} + \theta k_i) - E(\bar{r}, \bar{\alpha}) f_{\alpha\alpha}(\bar{r} + \theta h_i, \bar{\alpha} + \theta k_i)] k_i^2 =: \\ &=: \sum_{i=1}^n (A_i h_i^2 + 2B_i h_i k_i + C_i k_i^2), \end{aligned}$$

für ein gewisses  $\theta$  mit  $0 < \theta < 1$ .

Eine hinreichende Bedingung für  $Z(1) \leq 0$  ist demnach

$$A_i \leq 0, \quad C_i \leq 0, \quad A_i C_i - B_i^2 \geq 0$$

<sup>1</sup> Wir danken E. Beck für den Hinweis auf die folgende Beweismethode. Siehe auch [2] oder [8, S. 18].

für alle  $i$ . Nachrechnen ergibt bei Beachtung von 15.3 unmittelbar, daß  $A_i \equiv 0$ ,  $C_i \equiv 0$ , und daß  $A_i C_i - B_i^2 \equiv 0$  aus

$$\frac{2(\bar{r} + \theta h_i)}{\sqrt{1 - (\bar{r} + \theta h_i)^2}} \tan(\bar{\alpha} + \theta k_i) \equiv \frac{E(\bar{r}, \bar{\alpha})}{f(\bar{r}, \bar{\alpha})}$$

folgt. Diese Ungleichung ist für beliebiges  $\theta$  mit  $0 < \theta < 1$  gültig, weil aus geometrischen Gründen  $1 \equiv \frac{E(\bar{r}, \bar{\alpha})}{f(\bar{r}, \bar{\alpha})}$  in  $G$ , und wegen 15.4.

17. Die auf  $G$  definierte Funktion  $\frac{E(r, \alpha)}{f(r, \alpha)}$  nimmt für festes  $\alpha$  ihr Maximum

an für  $r = \cos \frac{\alpha}{2}$ , und es ist  $\frac{E\left(\cos \frac{\alpha}{2}, \alpha\right)}{f\left(\cos \frac{\alpha}{2}, \alpha\right)}$  monoton fallend in  $\alpha$ .

Zu  $(r_i, \alpha_i) \in G_2 \setminus \left\{ (r, \alpha) \mid \alpha \equiv \frac{\pi}{18} \right\}$  sei wieder

$$\bar{r} := \frac{\bar{r}_1 + \dots + \bar{r}_n}{n}, \quad \bar{\alpha} := \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n}.$$

Dann ist also zusammen mit (44) wegen (32)

$$\begin{aligned} \frac{e(r_1, \alpha_1) + \dots + e(r_n, \alpha_n)}{f(r_1, \alpha_1) + \dots + f(r_n, \alpha_n)} &\equiv \frac{E(\bar{r}, \bar{\alpha})}{f(\bar{r}, \bar{\alpha})} \equiv \frac{E\left(\cos \frac{\bar{\alpha}}{2}, \bar{\alpha}\right)}{f\left(\cos \frac{\bar{\alpha}}{2}, \bar{\alpha}\right)} \equiv \\ &\equiv \frac{E\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right)}{f\left(\cos \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}} = \sqrt{48} - 6, \end{aligned}$$

womit (31) unter der Bedingung (32) bewiesen ist.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BALÁZS, J., Über ein Kreisüberdeckungsproblem, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **24** (1973), 377—382. *MR* **48** # 9561.
- [2] BECK, E., Über die Differenz zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel von  $n$  Zahlen, *Math.-Phys. Semesterber. N.F.*, **16** (1969), 117—123. *MR* **39** # 4339.
- [3] DELONE, B. N. and RYŠKOV, S. S., Extremal problems of the theory of positive quadratic forms, *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **112** (1971), 203—223 (in Russian). *MR* **49** # 4939.
- [4] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Zweite verbesserte und erweiterte Auflage, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 65, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1972. *MR* **50** # 5603.
- [5] FEJES TÓTH, L., *Reguläre Figuren*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965. *MR* **30** # 3408.

- [6] MOLNÁR, J., On the  $q$ -system of unit circles, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **20** (1977), 195—203. *MR* **58** # 12733.
- [7] MOLNÁR, J., Packing of congruent spheres in a strip, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **31** (1978), 173—183. *MR* **58** # 7406.
- [8] MITRINVIĆ, D. S., *Analytic inequalities*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165, Springer-Verlag, New York—Berlin, 1970. *MR* **43** # 448.

(Eingegangen am 27. Juni 1983)

UNIVERSITÄT STUTTGART  
MATHEMATISCHES INSTITUT B  
PFAFFENWALDRING 57  
D—7000 STUTTGART 80

WALDBURGSTRASSE 88  
D—7000 STUTTGART 80  
FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY





# ON THE CHANGE OF VARIABLE OF ABSOLUTELY CONVERGENT POWER AND LAURENT SERIES ON THE UNIT CIRCLE

L. ALPÁR

*Dedicated to Professor L. Fejes Tóth on his 70th birthday*

## 1. Introduction

We have examined the problem mentioned in the title in several papers already and in this note we shall continue these investigations dealing with a new kind of changes of variable.

NOTATION. a) Throughout  $t \in \mathbf{R}$  and  $z \in \mathbf{C}$ .

b) Denote by  $D$  the open, by  $\bar{D}$  the closed unit disk, by  $C$  the unit circle, let  $A_{r,R} = \{z: 0 < r < |z| < R\}$  be an open and  $\bar{A}_{r,R}$  the corresponding closed annulus.

c)  $f \in H(E)$  means that  $f(z)$  is holomorphic in the set  $E$ . In particular  $f \in H(C)$  signifies that  $f(z)$  is holomorphic in a neighbourhood of  $C$ .

d) The Fourier series  $F(t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v e^{ivt}$  is absolutely or uniformly convergent, the power and Laurent series

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v \in H(D); \quad f^*(z) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v^* z^v \in H(A_{r,1})$$

are absolutely or uniformly convergent on  $C$ . The sets of these series defined in  $\mathbf{R}$  or  $C$  and denoted as usual by  $\mathcal{A}, \mathcal{U}, \mathcal{A}^+, \mathcal{U}^+$  are Banach spaces under the norms

$$\|F\|_{\mathcal{A}} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} |A_v|; \quad \|f\|_{\mathcal{A}^+} = \sum_{v=0}^{\infty} |a_v|; \quad \|f^*\|_{\mathcal{A}} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} |a_v^*|;$$

$$(1.1) \quad \|F\|_{\mathcal{U}} = \sup_{\lambda, \mu, t} \left| \sum_{v=\lambda}^{\mu} A_v e^{ivt} \right|; \quad \|f\|_{\mathcal{U}^+} = \sup_{\lambda, \mu, t} \left| \sum_{v=\lambda}^{\mu} a_v e^{ivt} \right|;$$

$$\|f^*\|_{\mathcal{U}} = \sup_{\lambda, \mu, t} \left| \sum_{v=\lambda}^{\mu} a_v^* e^{ivt} \right|,$$

respectively.

*The origin of the problems.* First we obtained the following result [1, Théorème 2, p. 288]. If  $f_1 \in H(D) \cap \mathcal{A}^+$  and  $\varphi(z)$  is a Möbius transform of  $\bar{D}$  onto itself, then  $f_1[\varphi(z)] = f_2(z) \in H(D) \cap \mathcal{U}^+$ . Observe that it may occur that simultaneously  $f_2(e^{it}) \notin \mathcal{A}^+$  [1, Théorème 1, p. 287].

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 26B99.

*Key words and phrases.* Absolute and uniform convergence, change of variable, power and Laurent series.

Later we have carried over this result to Fourier series [2], [3]. Let  $\varphi \in H(C)$  not necessarily univalent and  $\varphi(e^{it}) = e^{ih(t)}$  where  $h(t)$  is real and holomorphic along the  $t$ -axis and  $h(t) \equiv h(t+2\pi) \pmod{2\pi}$ . Suppose that  $F_1 \in \mathcal{A}$ , then  $F_1[h(t)] = F_2(t) \in \mathcal{U}$ . However, according to the theorem of Leibenzon, generally  $F_2 \notin \mathcal{A}$ .

To prove these assertions we had to verify that  $\|\varphi^v\|_{\mathcal{A}^+}$  and  $\|\varphi^v\|_{\mathcal{A}}$  are uniformly bounded as  $v \rightarrow \infty$  and  $|v| \rightarrow \infty$ , respectively. Besides, two circumstances play an important part in our reasonings: 1° that  $\varphi \in H(C)$  and 2° that  $|\varphi(e^{it})| = 1$ . Later investigations succeeded in weakening these conditions.

First Halász [8] showed that there are  $h(t)$  nonholomorphic along the  $t$ -axis, but  $\|e^{i\psi h(t)}\|_{\mathcal{A}} = O(1)$  uniformly in  $v$  in the sense of (1.1) and if in addition  $F_1 \in \mathcal{A}$  then the Fourier series of  $F_2$  converges at  $t=0$ . Afterwards Kaufman [12] starting from the ideas of [2] and [8] replaced the holomorphic functions  $h(t)$  by a larger class in our second theorem quoted above; in the next section we shall discuss in detail the result of Kaufman.

On the other hand Carleman [6, Theorem II, p. 8] found the following theorem: If  $f \in H(D) \cap \mathcal{A}^+$  and  $\varphi \in H(\bar{D})$ ,  $|\varphi(e^{it})| < 1$  for  $t \neq 0$ ,  $\varphi(1) = 1$  and the curve  $z = \varphi(e^{it})$  has a contact of the first order with the circle  $z = e^{it}$  at the point  $z = 1$ , then  $f[\varphi(e^{it})] \in \mathcal{A}^+$ .

Recently Warlimont [14] proved that our first theorem holds even if  $\varphi \in H(\bar{D})$ ,  $|\varphi(e^{it})| < 1$  except at a finite set of points  $\{t_k\}_{k=1}^l$  where  $|\varphi(e^{it_k})| = 1$ . Subsequently, we considered the analogous problem of Laurent series [4].

In this paper we shall show that the two restrictions imposed on  $\varphi$  previously can be omitted simultaneously.

## 2. Preliminary results

This section is devoted to recall some results without proofs. First we cite a proposition of Strang [13, Theorem 2, p. 530] concerning a subset of  $\mathcal{A}$ .

**THEOREM S.** Assume that  $\psi(t) = \psi(t+2\pi)$ ,  $\psi \in C^2$  (hence  $\psi \in \mathcal{A}$ ),  $|\psi(t)| < 1$  for  $-\pi \leq t \leq \pi$  except at a finite set of points  $t = t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, l$  where  $|\psi(t_k)| = 1$ . Let

$$(2.1) \quad g(t; t_k) = \frac{\psi(t)}{\psi(t_k)} \exp \left[ -\frac{\psi'(t_k)}{\psi(t_k)} (t - t_k) \right].$$

If there exist positive integers  $N_k$  and positive constants  $M, M', \delta$  such that if  $|t - t_k| < \delta$ , then  $|g(t; t_k)| \leq 1 - M(t - t_k)^{2N_k}$  and  $|g''(t; t_k)| \leq M'(t - t_k)^{2N_k - 2}$ , then  $\|\psi^v\|_{\mathcal{A}}$  ( $v \in \mathbb{N}$ ) is bounded. However, there exists an element of  $\mathcal{A}$  such that  $|\psi| \leq 1$  but  $\limsup \|\psi^v\|_{\mathcal{A}} = \infty$ .

**DEFINITION.**  $\mathcal{A}_0$  is the set of all  $\psi$  with bounded  $\|\psi^v\|_{\mathcal{A}}$  defined above,  $\mathcal{A}_\varrho$  is the subset of  $\mathcal{A}_0$  of functions  $\psi$  for which  $\min |\psi(t)| = \varrho > 0$ .

We also call the attention to an observation of Strang [13, p. 530].

**REMARK S.** "Loosely speaking  $\|\psi^v\|_{\mathcal{A}}$  is bounded when the smooth function  $\psi$  in  $\mathcal{A}$  has an odd degree of osculation with the unit circle." This property of  $\psi$  is expressed in a precise form by (2.1) and the conditions of Theorem S.

Next we quote a lemma [12, Appendix, p. 83] and a theorem of Kaufman, the latter being announced in a preprint of Kahane [10, p. 11].

LEMMA K. Let  $\tau > 0$  and  $h \in C^p[-\tau, \tau]$  for some  $p \geq 2$  and  $\alpha \leq h^{(p)} \leq \alpha B$  everywhere on  $[-\tau, \tau]$ . Then

$$(2.2) \quad \left| \int_{-\tau}^{\tau} [e^{ih(t)} - 1] t^{-1} dt \right| \leq A_p(B)$$

a constant depending only on  $p$  and  $B$ .

REMARK 1. In Lemma K it is tacitly assumed that  $h(t)$  is real-valued and it suffices to suppose that  $\alpha \leq |h^{(p)}| \leq \alpha B$  in  $[-\tau, \tau]$  where  $\alpha > 0$ ,  $B \geq 1$  so that  $h^{(p)} \neq 0$  in this interval. Further, since  $A_p(B)$  is independent of  $\alpha$ , we can write  $ch(t)$  instead of  $h(t)$  where  $c \neq 0$  is any real number.

THEOREM K. Assume that  $h \in C^p$ ,  $p \geq 2$ ,  $h(t) \equiv h(t + 2\pi) \pmod{2\pi}$  and

$$(2.3) \quad \sum_{k=2}^p |h^{(k)}(t)| \neq 0$$

for all  $t$ . Then  $F_1 \in \mathcal{A}$  implies  $F_1[h(t)] = F_2(t) \in \mathcal{U}$ .

REMARK 2. Condition (2.3) is evidently satisfied if  $h(t)$  is holomorphic along the  $t$ -axis, as in our theorem, with  $p = \infty$ .

The last aid which we need is due to Chapman (1913) and concerns the Laurent products of series infinite in both directions [9, pp. 239—242].

### 3. Statement and proof of results

We shall study the influence of some change of variable on the behaviour on  $C$  of power and Laurent series belonging to  $H(D) \cap \mathcal{A}^+$  and  $H(A_{r,1}) \cap \mathcal{A}$ , respectively. Moreover, we shall show that the norms of powers of certain functions in  $\mathcal{U}$  are uniformly bounded and this will be our main tool in the sequel.

THEOREM 1. If  $f_1 \in H(D) \cap \mathcal{A}^+$  and  $\psi \in \mathcal{A}_0$  then  $f_1[\psi(t)] = F_2(t) \in \mathcal{A}$ . These changes of variable transfer  $\mathcal{A}^+$  into  $\mathcal{A}$ .

PROOF. We have

$$(3.1) \quad f_1[\psi(t)] = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \psi^v(t) = F_2(t).$$

$\|\psi^v\|_{\mathcal{A}} \leq C_0$  (a constant), according to our definition. Thus we deduce from (3.1)

$$(3.2) \quad \|F_2\|_{\mathcal{A}} \leq \sum_{v=0}^{\infty} |a_v| \|\psi^v\|_{\mathcal{A}} \leq C_0 \|f_1\|_{\mathcal{A}^+} < \infty.$$

This proves Theorem 1.

THEOREM 2. If  $f_1^* \in H(A_{r,1}) \cap \mathcal{A}$  and  $\psi \in \mathcal{A}_0$  where  $r < \varrho$ , then  $f_1^*[\psi(t)] = F_2(t) \in \mathcal{A}$ . These changes of variable transfer  $\mathcal{A}$  into  $\mathcal{A}$ .

PROOF. Put

$$(3.3) \quad f_1^*[\psi(t)] = \sum_{v=-\infty}^{-1} a_v^* \psi^v(t) + \sum_{v=0}^{\infty} a_v^* \psi^v(t) = P[\psi(t)] + R[\psi(t)] = F_2(t).$$

Clearly,  $\|F_2\|_{\mathcal{A}} \leq \|P(\psi)\|_{\mathcal{A}} + \|R(\psi)\|_{\mathcal{A}}$  and (3.2) gives  $\|R(\psi)\|_{\mathcal{A}} \leq C_0 \|R\|_{\mathcal{A}^+}$ . To estimate  $\|P(\psi)\|_{\mathcal{A}}$  notice that

$$(3.4) \quad \sum_{v=-\infty}^{-1} |a_v^*| \varrho_0^v < \infty$$

for any  $\varrho_0 > r$ . Furthermore, if  $\psi \neq 0$ , then we have, by Wiener's theorem, that  $\psi^{-1} \in \mathcal{A}$  and so, in virtue of Beurling's theorem,

$$(3.5) \quad \lim_{v \rightarrow -\infty} \|\psi^v\|_{\mathcal{A}}^{-1/v} = \max |\psi^{-1}| = \varrho^{-1},$$

whereas  $\|\psi^v\|_{\mathcal{A}} \geq \varrho^v$  ( $v < 0$ ). Thus there are a  $\varrho_0$ ,  $r < \varrho_0 < \varrho$  and a  $v_0$  such that

$$(3.6) \quad \|\psi^v\|_{\mathcal{A}} = \varrho^v [1 + o(1)]^{-v} < \varrho_0^v, \quad v < v_0 < 0.$$

Hence (3.3), (3.4), (3.5) and (3.6) yield  $\|P(\psi)\|_{\mathcal{A}} < \infty$  and the proof of Theorem 2 is complete.

REMARK 3. Recalling Remark 5, we may state that Theorems 1 and 2 are generalizations of Carleman's theorem, for in each of these cases it is essential that the curves  $z = \varphi(e^{it})$  and  $z = \psi(t)$ , respectively, have a contact of odd order with the circle  $z = e^{it}$ . Also we found formerly a result concerning Laurent series [4, Theorem 3] similar to Theorem 2, but with  $\varphi \in H(C)$ .

REMARK 4. Comparing Theorems 1 and 2 with Lévy's theorem, it is striking that the curve  $z = \psi(t)$  does not lie entirely in the domain of holomorphy of  $f_1(z)$  or  $f_1^*(z)$ ; it can happen that  $f_2(z)$  or  $f_2^*(z)$  are not holomorphic at some exceptional points  $e^{it_k}$ , and in spite of this fact  $f_2(\psi) \in \mathcal{A}$  and  $f_2^*(\varphi) \in \mathcal{A}$ . If  $|\psi(t)| < 1$  for all  $t$  and the range of  $\psi(t)$  is contained in  $D$  or in  $A_{r,1}$  then Theorems 1 and 2 reduce to that of Lévy.

THEOREM 3. Let this time

$$(3.7) \quad \varphi(t) = \psi(t) e^{ih(t)}$$

where  $\psi \in \mathcal{A}_0$  and  $h(t)$  is defined in Theorem K. Then there is a constant  $K = K(\varphi) > 0$  such that

$$(3.8) \quad \|\varphi^v\|_{\mathcal{A}} \leq K, \quad v \in \mathbb{N}.$$

PROOF. Introduce the notation

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \psi^v(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{mv} e^{imt}; & e^{ivh(t)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_{nv} e^{int}; \\ \varphi^v(t) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_{sv} e^{ist}. \end{aligned}$$

Since  $h \in C^p$ ,  $p \geq 2$ , we have  $\|e^{ivh}\|_{\mathcal{A}} < \infty$  and  $\|\varphi^v\|_{\mathcal{A}} \leq \|\psi^v\|_{\mathcal{A}} \|e^{ivh}\|_{\mathcal{A}} < \infty$ , that is the second and the third Fourier series in (3.9) have sense.



Hereupon we shall verify that

$$(3.10) \quad \|e^{ivh}\|_{\mathcal{U}} \leq K_0, \quad v \in \mathbb{Z}$$

where  $K_0$  is a constant. Let

$$S_{\lambda\mu}^v(t) = \sum_{n=\lambda}^{\mu} \beta_{nv} e^{int},$$

then we have, by (1.1),  $\|e^{ivh}\|_{\mathcal{U}} \leq \sup_{\lambda, \mu, v, t} |S_{\lambda\mu}^v(t)|$  where

$$S_{\lambda\mu}^v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [e^{ivh(x+t)-i(\mu+1)x} - 1] \frac{dx}{e^{-ix} - 1} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [e^{ivh(x+t)-i\lambda x} - 1] \frac{dx}{e^{-ix} - 1}.$$

Now  $H(x) = [vh(x+t) - cx] \in C^p$  for any real  $c$ . Thus we infer from (2.3) and Remark 1 that there exists an integer  $q$ ,  $2 \leq q \leq p$  and a number  $\tau > 0$ , such that  $H^{(q)}(0) \neq 0$  as well as  $H^{(q)}(x) \neq 0$  in  $[-\tau, \tau]$  owing to the continuity of this function. Moreover  $(e^{-ix} - 1)^{-1} = ix^{-1} + O(1)$  in  $[-\tau, \tau]$ . Consequently, we can apply Lemma K and we obtain, by (2.2),

$$|S_{\lambda\mu}^v(t)| \leq 2A_q(B) + B_0 \leq \sup_{2 \leq q \leq p} A_q(B) + B_0$$

$B_0$  being a constant. This implies (3.10).

Finally, it follows from (3.7) and (3.9) that

$$\gamma_{sv} e^{ist} = \sum_{m+n=s} \alpha_{mv} e^{imt} \beta_{nv} e^{int},$$

$$\sum_{s=\lambda}^{\mu} \gamma_{sv} e^{ist} = \sum_{s=\lambda}^{\mu} \sum_{m+n=s} \alpha_{mv} e^{imt} \beta_{nv} e^{int} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{mv} e^{imt} \sum_{n=\lambda-m}^{\mu-m} \beta_{nv} e^{int}$$

wherefrom

$$(3.11) \quad \sup_{\lambda, \mu, t} \left| \sum_{s=\lambda}^{\mu} \gamma_{sv} e^{ist} \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\alpha_{mv}| \sup_{\lambda, \mu, t} \left| \sum_{n=\lambda-m}^{\mu-m} \beta_{nv} e^{int} \right|.$$

Hence, with respect to (3.10),

$$(3.12) \quad \|\varphi^v\|_{\mathcal{U}} \leq \|\psi^v\|_{\mathcal{A}} \|e^{ivh}\|_{\mathcal{U}} \leq C_0 K_0 = K, \quad v \in \mathbb{N}$$

and (3.8) is shown.

**THEOREM 4.** If  $f_1 \in H(D) \cap \mathcal{A}^+$  and  $\varphi(t)$  is defined by (3.7), then  $f_1[\varphi(t)] = F_2(t) \in \mathcal{U}$ . These changes of variable transfer  $\mathcal{A}^+$  into  $\mathcal{U}$ .

**PROOF.** We have

$$f_1[\varphi(t)] = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \varphi^v(t) = F_2(t).$$

From this we conclude, making use of Theorem 3,

$$\|F_2\|_{\mathcal{U}} \leq \sum_{v=0}^{\infty} |a_v| \|\varphi^v\|_{\mathcal{U}} \leq K \|f_1\|_{\mathcal{A}^+} < \infty.$$

This completes the proof.

**THEOREM 5.** If  $f_1^* \in H(A_{r,1}) \cap \mathcal{A}$ ,  $\varphi(t)$  is given by (3.7), but  $\psi \in \mathcal{A}_\rho$ ,  $r < \rho$  then  $f_1^*[\varphi(t)] = F_2(t) \in \mathcal{U}$ . These changes of variable transfer  $\mathcal{A}$  into  $\mathcal{U}$ .

**PROOF.** We write, as in (3.3),

$$f_1^*[\varphi(t)] = \sum_{v=-\infty}^{-1} a_v^* \varphi^v(t) + \sum_{v=0}^{\infty} a_v^* \varphi^v(t) = P^*[\varphi(t)] + R^*[\varphi(t)] = F_2(t).$$

Thus  $\|F_2\|_{\mathcal{U}} \leq \|P^*(\varphi)\|_{\mathcal{U}} + \|R^*(\varphi)\|_{\mathcal{U}}$  where  $\|R^*(\varphi)\|_{\mathcal{U}} < \infty$  in consequence of Theorem 4. To evaluate  $\|P^*(\varphi)\|_{\mathcal{U}}$  take into account that if  $\psi \in \mathcal{A}_\rho$ , then  $\psi^{-1} \in \mathcal{A}$  and that (3.10) as well as (3.11) hold for  $v < 0$ , too. Therefore (3.12) yield in this case

$$\|\varphi^v\|_{\mathcal{U}} \leq K_0 \|\psi^v\|_{\mathcal{A}} < \infty.$$

From now on we can use the same train of thought as in the proof of Theorem 2. Namely

$$\|P^*(\varphi)\|_{\mathcal{U}} \leq \sum_{v=-\infty}^{-1} |a_v^*| \|\varphi^v\|_{\mathcal{U}} \leq K_0 \sum_{v=-\infty}^{-1} |a_v^*| \|\psi^v\|_{\mathcal{A}} < \infty.$$

This proves Theorem 5.

**REMARK 5.**  $\|\varphi^v\|_{\mathcal{U}}$  cannot in general be replaced in (3.8) by  $\|\varphi^v\|_{\mathcal{A}}$  as follows from the example  $\varphi(t) = e^{it} - \left(\frac{e^{it}-1}{2}\right)^3$  of Bajšanski [5, p. 134] and a theorem of Clunie and Vermes [7, Theorem I, p. 932]. As a consequence  $F_2(t) \in \mathcal{U}$  cannot in general be replaced by  $F_2(t) \in \mathcal{A}$  in Theorems 4 and 5 for which  $\|\varphi^v\|_{\mathcal{A}} = O(1)$  would be both necessary and sufficient according to Knopp and Lorentz [11, Satz 1, p. 11].

## REFERENCES

- [1] ALPÁR, L., Sur certaines transformées des séries de puissances absolument convergentes sur la frontière de leur cercle de convergence, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **7** (1962), 287—316. *MR* **27** # 2615.
- [2] ALPÁR, L., Sur une classe particulière de séries de Fourier ayant de sommes partielles bornées, *Studia Sci. Math. Hungar.* **1** (1966), 189—204. *MR* **34** # 4796.
- [3] ALPÁR, L., On the transformations of absolutely convergent Fourier series, *Mat. Lapok* **18** (1967), 97—104 (in Hungarian). *MR* **37** # 4497.
- [4] ALPÁR, L., On the change of variable of Laurent series, *Papers dedicated to Professor L. Iliev's 70th anniversary*, Sofia, 1984, 97—104.
- [5] BAJŠANSKI, B. M., Sur une classe générale de procédés de sommation du type d'Euler—Borel, *Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math.* **10** (1956), 131—152. *MR* **18**—888.
- [6] CARLEMAN, T., Some theorems concerning the convergence of power series on the circle of convergence, *Ark. Mat., Astr., Fys.* **15** (1920), 1—13.
- [7] CLUNIE, J. and VERMES, P., Regular Sonnenschein type summability methods, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5)* **45** (1959), 930—954. *MR* **23** # A2674.
- [8] HALÁSZ, G., On a theorem of L. Alpár concerning Fourier series of powers of certain functions, *Studia Sci. Math. Hungar.* **2** (1967), 67—72. *MR* **35** # 2066.
- [9] HARDY, G. H., *Divergent series*, Clarendon Press, Oxford, 1949. *MR* **11**—25.
- [10] KAHANE, J.-P., Quatre leçons sur les homéomorphismes du cercle et les séries de Fourier, *Prépublication de l'Univ. Paris-Sud, Orsay*, 82T21, 1—36.
- [11] KNOPP, K. and LORENTZ, G. G., Beiträge zur absoluten Limitierung, *Arch. Math.* **2** (1949), 10—16. *MR* **11**—346.

- [12] KAUFMAN, R., Uniforme convergence of Fourier series in harmonic analysis, *Studia Sci. Math. Hungar.* **10** (1975), 81—83. *MR* **55** # 8668.
- [13] STRANG, W. G., Polynomial approximation of Bernstein type, *Trans. Amer. Math. Soc.* **105** (1962), 525—535. *MR* **25** # 5318.
- [14] WARLIMONT, R., Estimation of an integral, *Arch. Math. (Basel)* **37** (1981), 425—434. *MR* **83i**: 40009.

(Received August 16, 1983)

MTA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETE  
REÁLTANODA U. 13—15  
H—1053 BUDAPEST  
HUNGARY



## A CONSTRUCTION FOR ARRANGEMENTS OF LINES WITH VERTICES OF LARGE MULTIPLICITY

ILONA PALÁSTI

*Dedicated to Professor L. Fejes Tóth on his 70th birthday*

### Abstract

Let  $t_j(\mathcal{A}_n)$  denote the number of vertices with multiplicity  $j$  in an arrangement  $\mathcal{A}_n$  of  $n$  lines, i.e. the number of those vertices through which exactly  $j$  lines of  $\mathcal{A}_n$  pass. We present a construction which yields a lower bound for  $\max t_j(\mathcal{A}_n)$  if  $j \leq 14$ .

### 1. Introduction

Our notation and terminology will be the same as in B. Grünbaum [7]. By an arrangement  $\mathcal{A}_n$  we mean a finite family of  $n = n(\mathcal{A})$  lines in the real projective plane. Given a vertex  $V$  of an arrangement  $\mathcal{A}$ , let  $t(V)$  denote the multiplicity of  $V$ , i.e. the number of lines in  $\mathcal{A}$  incident to  $V$ . Let  $t_j(\mathcal{A})$  stand for the number of vertices with multiplicity  $j$ . We will need the obvious relation

$$(1) \quad \sum_{j \geq 2} \binom{j}{2} t_j(\mathcal{A}) = \binom{n}{2}$$

(see e.g. Grünbaum [6]). Further, let  $t_j(n) = \max \{t_j(\mathcal{A}) : n(\mathcal{A}) = n\}$ . For the case  $j=3$ ,

$$(2) \quad t_3(n) \geq 1 + n(n-3)/6$$

was proved by Burr, Grünbaum and Sloane [2]. Their paper [2] contains an extensive list of references. In [5], a paper of Füredi and myself, a relatively simple construction is given.

### 2. Maximal number of vertices with multiplicity 4

As far as we know the best lower bound for  $t_4(n)$  is due to Grünbaum [7]:

$$(3) \quad \frac{n^2}{40} \leq t_4(n) \leq \frac{n^2}{12}.$$

As for the upper bound in (3), Grünbaum referred to several authors. He established the lower bound in (3) (for  $n \geq 6$ ) taking all horizontal and vertical lines and those of slopes  $+1$  and  $-1$  passing through at least one point  $(x, y)$  of the integer lattice

---

Research (partly) supported by The Hungarian National Foundation for Scientific Research Grant 1808.

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 51D20; Secondary 52A40, 05B25.

*Key words and phrases*. Arrangement of lines, combinatorial inequalities.



with  $0 \leq x \leq \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor$ ,  $0 \leq y \leq \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor$ . These lines determine  $\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor \cong \frac{n^2}{40}$  4-fold points.

This fact is illustrated in Figure 1, where we assume that  $n=6k-2$  and  $k$  denotes the number of horizontal or vertical lines. Then  $t_n(\mathcal{A})=k^2$ , i.e.,

$$(4) \quad t_4(n) \cong \left( \frac{n+2}{6} \right)^2,$$

including the dotted lines, too.

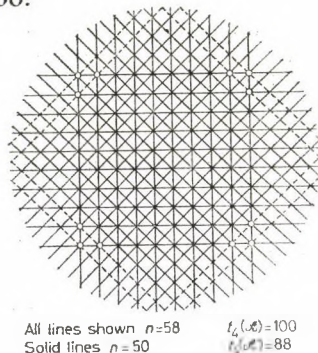


Fig. 1

As Z. Füredi noticed, a slight modification of this configuration allows us to refine [4].

**PROPOSITION.** *The maximal number of points of multiplicity 4 is*

$$(5) \quad t_4(n) \cong \frac{7n^2}{200}.$$

**PROOF.** As it can be seen on Figure 1, the dotted lines yield the smallest number of 4-fold points. Omitting these lines,  $(k-2)/4$  at each corner of the square, we obtain an arrangement of  $n=5k$  lines and  $\frac{7}{8}k^2$  4-fold points ( $n \geq 34$ ). Setting

$$k = \frac{n}{5},$$

$$(5') \quad t_4(n) \cong \frac{7}{8} \left( \frac{n}{5} \right)^2,$$

as claimed.

### 3. Bounds for the number of $j$ -fold points ( $j=4, 5, 6$ )

**THEOREM 1.** *Let  $t_j(n)$  denote the maximum number of vertices of multiplicity  $j$  in an arrangement of  $n$  lines in the plane. Then*

$$(6) \quad \frac{2n^2}{j^3 - j + \varepsilon} \leq t_j(n) \leq \frac{n(n-1)}{j(j-1)},$$

where  $j=4, 5$  or  $6$ , and

$$(7) \quad \varepsilon = \begin{cases} -j + \frac{8}{7}; & j = 4, \\ 3j; & j = 5; \\ -\frac{j}{2} - \frac{9}{47}; & j = 6. \end{cases}$$

PROOF. We can easily get the upper bound from (1).

in case  $j=4$  the lower bound of (6) is equivalent to (5).

Now we modify the construction  $\mathcal{A}_n$  for  $j=4$ , using the regular double star-hexagonal lattice (see Fig. 2). For every  $i$  ( $0 \leq i \leq 5$ ) we take  $n/6$  parallel lines, with slopes  $i \cdot 30^\circ$ . In this case, if  $n \equiv 0 \pmod{6}$  the configuration  $\mathcal{A}$  contains

$$(8) \quad \frac{n^2}{30} + \delta = t_4(\mathcal{A})$$

vertices of multiplicity 4, where

$$\delta = \begin{cases} -1.2; & n \equiv 6, 24 \pmod{30} \\ 0; & n \equiv 0 \pmod{30} \\ 1.2; & n \equiv 12, 18 \pmod{30} \end{cases}$$

That is

$$(9) \quad t_4(\mathcal{A}) = \frac{n^2}{30} + O(1) = \frac{2n^2}{j^3 - j} + O(1),$$

where  $j=4$ .

Let us consider the case  $j=5$ . We construct a system of lines  $\mathcal{B}_n$  as follows. Let us add to  $\mathcal{A}_{[(2n/3)+6]}$  three  $((n/9)+2)$  element sets of parallel lines of slopes  $30^\circ$ ,  $90^\circ$  and  $150^\circ$ , resp (see Fig. 3). These lines meet each 4-fold point of  $\mathcal{A}_{[(2/3n)+6]}$ .

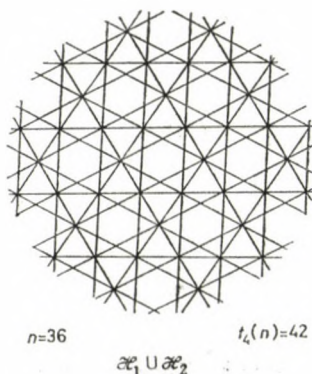


Fig. 2

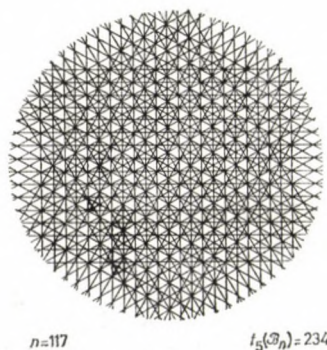


Fig. 3

Hence we get

$$(10) \quad t_5(n) = t_5(\mathcal{B}_n) = t_4(\mathcal{A}_{[(2n/3)+6]}) = \frac{\left(\frac{2}{3}n\right)^2}{30} + O(n) = \frac{4}{270}n^2 + O(n).$$

The case  $j=6$  can be treated in a completely analogous way. Let us now add to the picture 3 sets of lines forming a triangular lattice so that all 4-fold points and the midpoints of all principal hexagons become 6-fold. This configuration  $\mathcal{C}_n$  can be seen on Figure 4. (See also Fig. 61 of [9] p. 110.) It is not hard to deduce

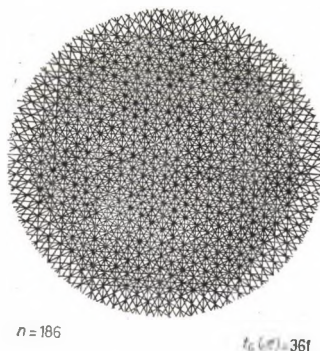


Fig. 4

from (2) that the number of threefold points of the last triangular lattice is near to  $\left(\frac{n}{3} + 3\right)\left(\frac{n}{3}\right)/6$ , and only one sixth of them are in the middle of principal hexagons. Consequently,

$$(11) \quad \begin{aligned} t_6(n) &\geq t_6(\mathcal{C}_n) = t_5(\mathcal{B}_{[(2n/3)-2]}) + \frac{\left(\frac{n}{3}\right)^2 + n}{36} = \\ &= \frac{47n^2}{4860} + O(n) = \frac{2n^2}{j^2 - \frac{3j}{2} - \frac{9}{47}} + O(n). \end{aligned}$$

This ends the proof of the theorem.

#### 4. Examples

Figures 5, 6 and 7 are some further illustrations to Theorem 1, for the case when no two lines of our arrangement are parallel.

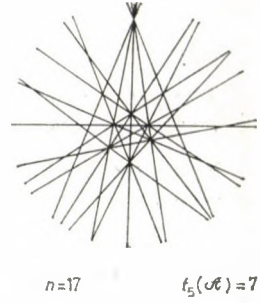
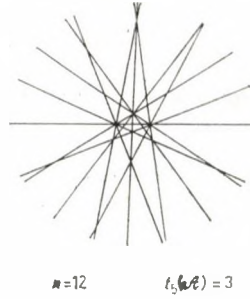
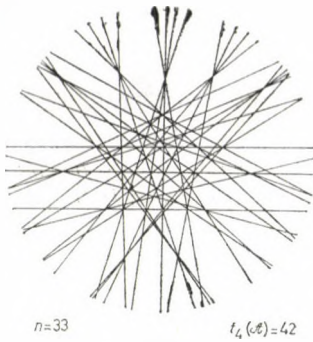


Fig. 5

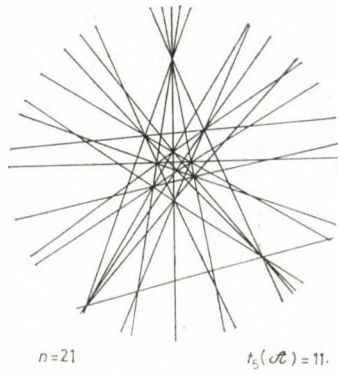


Fig. 6

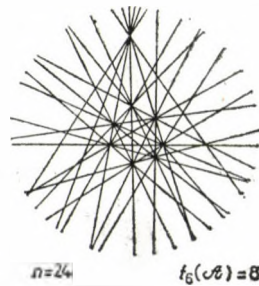
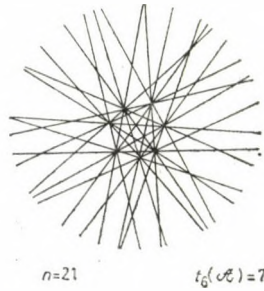
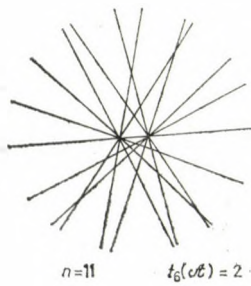


Fig. 7

### 5. The main result

The proof of our following result will be based on some further properties of the hexagonal lattices.

**THEOREM 2.** *Given two natural numbers  $j$  and  $n$ , let  $t_j(n)$  denote the maximum number of  $j$ -fold vertices in an arrangement of  $n$  lines in the plane. If  $7 \leq j \leq 14$ , then*

$$(12) \quad t_j(n) \cong t_j^*(n),$$

where  $t_j^*(n) = \frac{2n^2}{\chi_j}$  and

$$(13) \quad \chi_j = \begin{cases} \frac{20}{3} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{j-1}{2} \right)^2 + \eta_j \right]^2; & \text{if } j \text{ is odd,} \\ \frac{20}{3} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{j-2}{2} \right)^2 + \eta_j \right]^2; & \text{if } j \text{ is even,} \end{cases}$$

and

$$(14) \quad \eta_j = \begin{cases} 4.5 & \text{if } j \equiv 0 \pmod{4} \\ 2 & \text{if } j \equiv 1 \pmod{4} \\ 4 & \text{if } j \equiv 2 \pmod{4} \\ 2.5 & \text{if } j \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

**PROOF.** We will attack each of the 8 cases individually. Consider the hexagonal lattices  $\mathcal{H}_1$  and  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$  of Figures 8 and 2. It is obvious that every vertex (2-fold point) of  $\mathcal{H}_1$  is a 4-fold point of  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ . In what follows we will fix these 4-fold points and increase their multiplicity by increasing the number of lines. Let us consider a bounded piece of  $\mathcal{H}_1$  consisting of  $n_0$  lines. It is easy to see that the same piece of  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$  has altogether  $n_0(1+2)$  lines, and the number of 4-fold vertices is at least  $\frac{n^2}{30} + \delta$ , where  $-1.2 \leq \delta \leq 1.2$  (see (8)). Therefore  $t_4(n) \cong (3n_0)^2/30$  is also valid.

We now turn to the configuration arising from  $\mathcal{H}_1$  by the addition of a smaller hexagonal lattice  $\mathcal{H}_3$ . ( $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_3$  is demonstrated by Figure 9.)

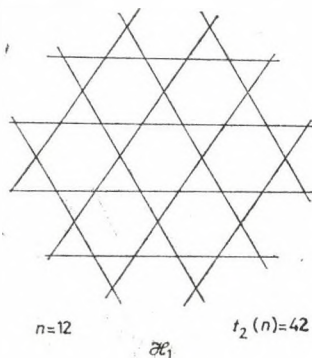


Fig. 8



It is an easy exercise to determine the angle  $\alpha$  formed by the lines of  $\mathcal{H}_1$  and  $\mathcal{H}_3$ . Making use of the position of the unit regular triangles in  $\mathcal{H}_1$ , for the largest triangle of  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_3$  we trivially have

$$(15) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

as shown by Figure 10, which means that  $\sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}$ . In other words

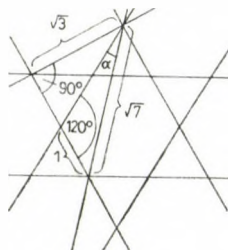
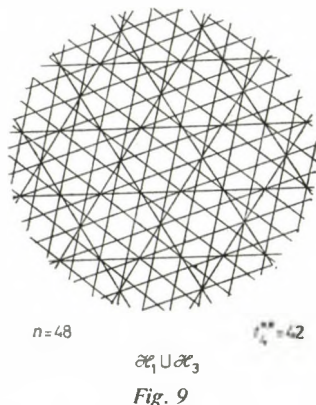


Fig. 10

PROPERTY.  $\alpha$  is not a divisor of 360, i.e.  $360^\circ/\alpha$  is not an integer.

The number of lines of  $\mathcal{H}_3$  can be enumerated immediately by Figure 9, and it is equal to  $3n_0$ . Thus the arrangement  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3$  contains  $n_0(1+2+3)$  lines (as in Figure 11), and  $(3n_0)^2/30$  vertices of multiplicity 6. Therefore

$$(16) \quad t_6(n) > \frac{\binom{n}{2}^2}{30} = \frac{2n^2}{j^3+4j} = t_6^{**}(n).$$

Although  $t_6^{**}$  is a weaker lower bound for  $t_6(n)$  than the one given in Theorem 1, the above construction can easily be extended using the Property.

To increase the multiplicity of the 6-fold vertices to 7, we add a triangular lattice  $\mathcal{T}_1$  to the configuration  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3$  by drawing in the diagonals of the hexagons in  $\mathcal{H}_1$ . The arrangement  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3 \cup \mathcal{T}_1$  (see Figure 12) has  $n_0(1+2+3+1)+3$  lines, thus

$$(17) \quad t_7(n) \cong t_6^{**} \left( \frac{6n}{7} \right) = \left( \frac{6}{7} \right)^2 \frac{n^2}{120} = \frac{2n^2}{326.66} = \frac{2n^2}{j^3-2j-\frac{7}{3}} = t_7^*(n).$$

To get a lower bound for  $t_8(n)$ , we modify the construction of Figure 12 supplementing it with a new triangular lattice  $\mathcal{T}_2$  which consists of the diagonals of the

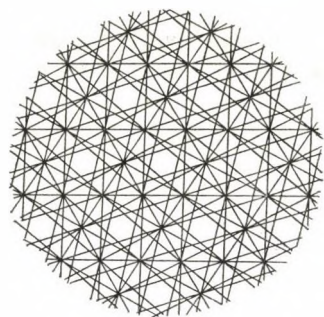
 $n=72$  $t_6^{**}(n)=42$  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3$ 

Fig. 11

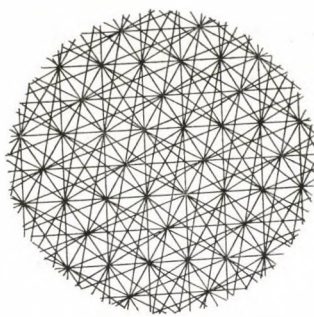
 $n=84$  $t_7^*(n)=42$  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3 \cup \mathcal{T}_1$ 

Fig. 12

hexagons in  $\mathcal{H}_2$ . Then  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3 \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  has  $n_0(1+2+3+1+2)$  lines, and

$$(18) \quad t_8(n) \cong t_7^* \left( \frac{7n}{9} \right) = \left( \frac{7}{9} \right)^2 \frac{n^2}{163.33} = \frac{2n^2}{540} = \frac{2n^2}{j^3+3j+4} = t_8^*(n)$$

(see Figure 13).

In order to proceed, next we give another lower bound  $t_8^{**}(n)$  for  $t_8^*(n)$ . Consider now the construction  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_3$  (Figure 9) completed by its mirror image in any symmetry axis of the central hexagon of  $\mathcal{H}_1$ . Denoting this arrangement by  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_3 \cup \mathcal{H}_3^*$  (see Figure 14) and adding  $\mathcal{H}_2$ , we obtain a system  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3 \cup \mathcal{H}_3^*$

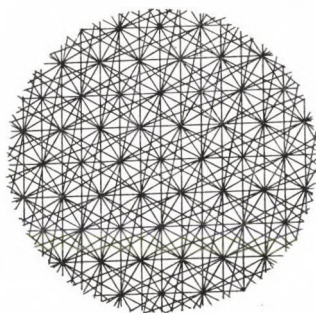
 $n=108$  $t_8^*(n)=42$  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3 \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ 

Fig. 13

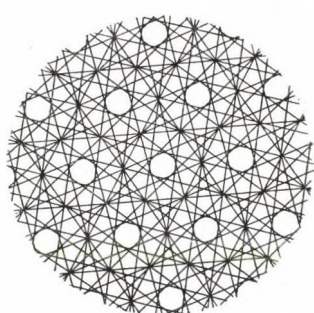
 $n=84$  $t_6^{**}(n)=42$  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3 \cup \mathcal{H}_3^*$ 

Fig. 14

of  $n_0(1+2+3+3)$  lines determining

$$(19) \quad t_8^{**}(n) = t_6^{**} \left( \frac{6n}{9} \right) = \left( \frac{2}{3} \right)^2 \frac{n^2}{120} = \frac{2n^2}{540}$$

8-fold points. Note that (by chance)  $t_8^{**}(n) = t_8^*(n)$  (see Figure 15). Adding now

$\mathcal{T}_1$  and  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  to the picture, we get lower bounds for  $t_9(n)$  and  $t_{10}(n)$ , resp. (see Figures 16 and 17). So we conclude that  $n_0(1+2+3+3+1)$  lines form

$$(20) \quad t_9(n) \cong t_8^* \left( \frac{9n}{10} \right) = \left( \frac{9}{10} \right)^2 \frac{n^2}{270} = \frac{2n^2}{666.66} = \frac{2n^2}{j^3 - 6j - \frac{25}{3}} = t_9^*(n)$$

9-fold points. Similarly, for  $j=10$  we obtain

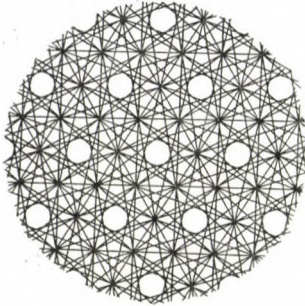
$$(21) \quad t_{10}(n) \cong t_9^* \left( \frac{5n}{6} \right) = \left( \frac{5}{6} \right)^2 \frac{n^2}{333.33} = \frac{2n^2}{960} = \frac{2n^2}{j^3 - 4j},$$

given by a construction using  $n_0(1+2+3+3+1+2)$  lines.

This estimation technique may be extended also to the cases  $j > 10$ .

For example we show the construction for our last case ( $j=14$ ).

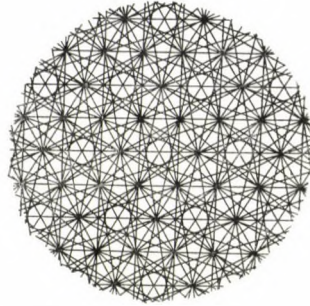
Let us complete  $\mathcal{H}_2$  with  $\mathcal{H}_4$  so that the angle constituted by their lines is  $\alpha$ .  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_4$  is in Figure 18. For enumerational purposes consider Figure 19



$n=108$   $t_8^{**}(n)=42$

$\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3 \cup \mathcal{H}_4$

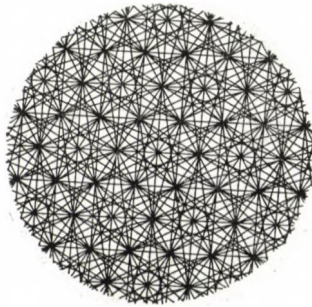
Fig. 15



$n=120$   $t_9^*(n)=42$

$\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3 \cup \mathcal{H}_4 \cup \mathcal{T}_1$

Fig. 16



$n=144$   $t_{10}^*(n)=42$

$\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3 \cup \mathcal{H}_4 \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$

Fig. 17

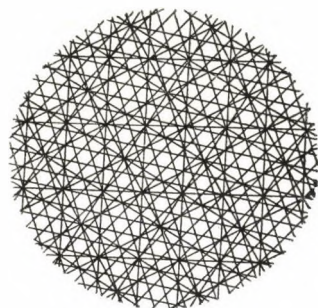
 $n = 96$  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_4$ 

Fig. 18

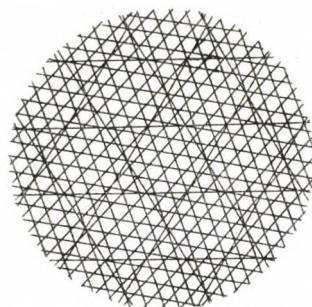
 $n = 72$  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_4$ 

Fig. 19

of  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_4$ , which shows that  $\mathcal{H}_4$  has  $5n_0$  lines. Making our arrangement symmetrical by a reflection of the lines of  $\mathcal{H}_4$ , and taking all the lines which we had before, we obtain a system  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3 \cup \mathcal{H}_3^* \cup \mathcal{H}_4 \cup \mathcal{H}_4^* \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  of  $n_0(1+2++3+3+5+5+1+2)$  lines, and they determine at least

$$(22) \quad t_{14}^*(n) \equiv \left(\frac{3}{22}\right)^2 \frac{n_0^2}{30} = \frac{n^2}{1613.33} = \frac{2n^2}{j^3 + 2j^2 + 6j + \frac{20}{3}}$$

14-fold points. (This may be verified also by counting the lines and vertices of multiplicity  $j=14$  in Figure 20.)

This was to be proved.

The above results are summarized in the Table.

Remark that our theorems are closely related to the results of Trotter, Szemerédi [8] and Beck [1].

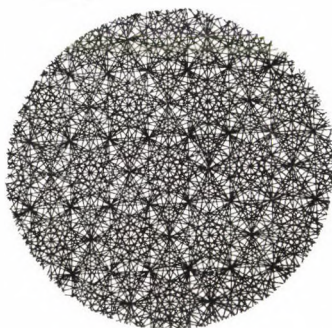
 $n = 264$  $t_{14}^*(n) = 42$  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_3^* \cup \mathcal{A}_4 \cup \mathcal{A}_4^* \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ 

Fig. 20



Table

$j$	$t_j(n)$
4	$\frac{7n^3}{200}$ $\frac{2n^3}{j^3 - 2j + 8/7}$
5	$\frac{2n^3}{135}$ $\frac{2n^3}{j^3 + 2j}$
6	$\frac{47n^3}{4860}$ $\frac{2n^3}{j^3 - \frac{3j}{2} - 9/47}$
7	$\frac{3n^3}{490}$ $\frac{2n^3}{j^3 - 2j - 7/3}$
8	$\frac{n^3}{270}$ $\frac{2n^3}{j^3 + 3j + 4}$
9	$\frac{3n^3}{1000}$ $\frac{2n^3}{j^3 - 6j - 25/3}$
10	$\frac{n^3}{480}$ $\frac{2n^3}{j^3 - 4j}$
11	$\frac{n^3}{750}$ $\frac{2n^3}{j^3 + j^2 + 4j + 4}$
12	$\frac{3n^3}{2890}$ $\frac{2n^3}{j^3 + j^2 + 4j + 20/3}$
13	$\frac{3n^3}{4000}$ $\frac{2n^3}{j^3 + 2j^2 + 10j + 5/3}$
14	$\frac{3n^3}{4840}$ $\frac{2n^3}{j^3 + 2j^2 + 6j + 20/3}$

Many interesting unsolved problems and new results in this field can be found in Erdős [3].

I am indebted to Z. Füredi and J. Pach for their valuable remarks.

## REFERENCES

- [1] BECK, J., On the lattice property of the plane and some problems of Dirac, Motzkin and Erdős in combinatorial geometry, *Combinatorica* 3 (1983), 281—297.
- [2] BURR, S., GRÜNBAUM, B. and SLOANE, N. J. A., The orchard problem, *Geometriae Dedicata* 2 (1974), 397—424. MR 49 # 2428.
- [3] ERDŐS, P., Some combinatorial problems in geometry, *Geometry and differential geometry* (Proc. Conf., Univ. Haifa, Haifa, Israel, 1979), *Lecture notes in mathematics*, 792, Springer-Verlag, Berlin, 1980, 46—53. MR 82d: 51002.
- [4] FEJES TÓTH, L., A combinatorial problem concerning oriented lines in the plane, *Amer. Math. Monthly* 82 (1975), 387—389.
- [5] FÜREDI, Z. and PALÁSTI, I., Arrangements of lines with large number of triangles, *Proc. Amer. Math. Soc.* 92 (1984), 561—566.



- [6] GRÜNBAUM, B., New views on some old questions of combinatorial geometry, *Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie (Rome, 1973)*, Tomo 1, Atti de Convegni Lincei, No. 17, Accad. Naz. Lincei, Rome, 1976, 451—468. *MR* 57 # 10605.
- [7] GRÜNBAUM, B., *Arrangements and spreads*, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 10, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1972. *MR* 46 # 6148.
- [8] SZEMERÉDI, E. and TROTTER, W. T., Extremal problems in discrete geometry, *Combinatorica* 3 (1983), 381—392.
- [9] WEYL, H., *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1952.

(Received January 3, 1984)

MTA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETE  
P.O. BOX 127  
H-1364 BUDAPEST  
HUNGARY

## CLOSEST PACKING AND LOOSEST COVERING OF THE SPACE WITH BALLS

K. BÖRÖCZKY

*Dedicated to Professor L. Fejes Tóth on his 70th birthday*

The problem of the densest packing of the space with equal balls and the problem of the thinnest covering of the space with equal balls have a vast literature. In this paper we consider a variant of these problems.

Let  $\mathcal{P}$  be a packing of the space with balls of radius  $q$ . Let  $r$  be the supremum of the radii of all balls disjoint of any ball of  $\mathcal{P}$ . We call  $q/r$  the *closeness* of the packing  $\mathcal{P}$ . Analogously, let  $\mathcal{C}$  be a covering of the space with balls of radius  $q$ . Let  $R$  be the supremum of the radii of all balls contained in the intersection of any two balls of  $\mathcal{C}$ . We call  $q/R$  the *looseness* of the covering  $\mathcal{C}$ . These notions were introduced by L. Fejes Tóth [5, 6], who suggested the problem of finding the closest packing and loosest covering of the space with equal balls. Since balls of radius  $q+r$  concentric with the balls of  $\mathcal{P}$  cover the space, and balls of radius  $q-R$  concentric with the balls of  $\mathcal{C}$  form a packing, the two problems are equivalent. S. S. Ryškov [8] introduced a notion, which is equivalent in the Euclidean space to the mentioned ones. We shall solve these problems in the Euclidean 3-space by proving the following

**THEOREM.** *Let  $\mathcal{P}$  be a packing of unit balls such that the balls of radius  $R_0 = \sqrt{5/3}$  concentric with the balls of  $\mathcal{P}$  cover the space. Then the centres of the balls of  $\mathcal{P}$  form a space centred cubic lattice of sidelength  $4/\sqrt{3}$ .*

The proof of the theorem rests on three lemmas.

**LEMMA 1.** *Let  $T = T_1T_2T_3T_4$  be a tetrahedron such that  $T_iT_j \geq 2$  ( $i, j = 1, \dots, 4$ ,  $i \neq j$ ) and the dihedral angle at the edge  $T_1T_2$  is at most  $60^\circ$ . Then the circumradius of  $T$  is greater than or equal to  $R_0 = \sqrt{5/3}$  and equality occurs if and only if  $T$  is congruent to the tetrahedron  $\bar{T} = \bar{T}_1\bar{T}_2\bar{T}_3\bar{T}_4$  for which  $\bar{T}_1\bar{T}_3 = \bar{T}_2\bar{T}_4 = 4/\sqrt{3}$  and  $\bar{T}_1\bar{T}_2 = \bar{T}_2\bar{T}_3 = \bar{T}_3\bar{T}_4 = \bar{T}_4\bar{T}_1 = 2$ .*

Write  $b = 4/\sqrt{3}$ . Let  $A_1$  and  $A_3$  be the midpoints of two neighbouring cubes in a cubic lattice of sidelength  $b$ . Further let  $A_2$  and  $A_4$  be the endpoints of a common edge of the above cubes (Fig. 1). Then  $A_1A_2A_3A_4$  is congruent to  $\bar{T}$ . It follows that the edges  $\bar{T}_1\bar{T}_3$  and  $\bar{T}_2\bar{T}_4$  of  $\bar{T}$  are perpendicular, the dihedral angles at the edges  $\bar{T}_1\bar{T}_3$  and  $\bar{T}_2\bar{T}_4$  are  $90^\circ$  and finally, the dihedral angles at the edges  $\bar{T}_1\bar{T}_2$ ,  $\bar{T}_2\bar{T}_3$ ,  $\bar{T}_3\bar{T}_4$  and  $\bar{T}_4\bar{T}_1$  are equal to  $60^\circ$ . Using these facts it is easy to check that the circumradius of  $\bar{T}$  is  $R_0$ . For later reference we also observe that the solid angle formed by

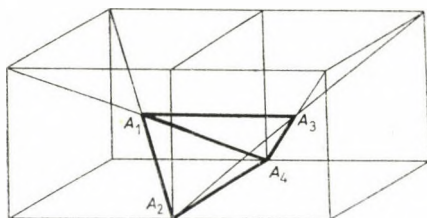


Fig. 1

three planes perpendicular to the edges of  $\bar{T}$  meeting in a vertex is congruent to the solid angle at a vertex of a regular truncated octahedron. This follows immediately from the fact that the Dirichlet cells of the space centred cubic lattice are regular truncated octahedra.

Let  $S$  be the circumsphere of  $\bar{T}$  and  $O$  its centre. Lemma 1 will be proved by showing that any tetrahedron  $T = T_1T_2T_3T_4$  inscribed into  $S$  and satisfying the conditions of the lemma is congruent to  $\bar{T}$ . We suppose, without loss of generality, that  $T_1T_2$  is parallel to  $\bar{T}_1\bar{T}_2$  and the points  $T_1, T_2, \bar{T}_1$  and  $\bar{T}_2$  lie on an arc of a great circle of  $S$  of spherical length less than  $180^\circ$ . Let  $K$  be the set of those points  $X$  of  $S$  for which  $XT_1 \geq 2$  and  $XT_2 \geq 2$ . Let  $L$  be the part of  $S$  cut out by the dihedral angle of  $T$  at the edge  $T_1T_2$  (Fig. 2). Obviously, the vertices  $T_3$  and  $T_4$  belong to the set  $H = K \cap L$ . We are going to show that the diameter of  $H$  is not greater than 2, and it is less than 2 unless  $T$  and  $\bar{T}$  coincide. Since we have by supposition  $T_3T_4 \geq 2$ , this will imply the lemma.

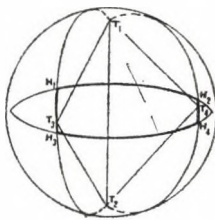


Fig. 2

If  $T_1T_2 > \bar{T}_1\bar{T}_2$  then we replace  $T_1T_2$  by  $\bar{T}_1\bar{T}_2$  and the planes  $T_1T_2T_3$  and  $T_1T_2T_4$  by the planes parallel to them through the line  $\bar{T}_1\bar{T}_2$ . By this procedure both  $K$  and  $L$  increase. If the dihedral angle at  $T_1T_2$  is less than  $60^\circ$ , then we replace it by a dihedral angle equal to  $60^\circ$  having the same edge and containing the original one. Then the set  $H$ , as well as its diameter, will again increase. Thus we may restrict ourselves to the case when  $T_1 = \bar{T}_1$ ,  $T_2 = \bar{T}_2$  and the dihedral angle at  $T_1T_2$  is equal to  $60^\circ$ . Further, we may suppose that any of the plane  $T_1T_2T_3$  and  $T_1T_2T_4$  intersects  $K$ .

We observe that the distance of two points  $X$  and  $Y$  of  $H$  attains its maximum in the same case as the spherical distance  $\angle XOY$ . Thus, looking for two points of  $H$  whose distance realizes the diameter of  $H$  it will be convenient to work for a while in spherical geometry, and consider the sets  $K$ ,  $L$  and  $H$  as spherical regions on  $S$ . Since two points of  $S$  at euclidean distance 2 span an angle at  $O$  equal to  $\alpha_0 = \angle T_1OT_2 = 2 \arcsin \sqrt{3/5} \approx 101.537^\circ$ , our statement above can be reformulated

as follows: The spherical diameter of  $H$  is at most  $\alpha_0$ , and it is less than  $\alpha_0$  when  $T$  is not identical with  $\bar{T}$ .

We note that  $K$  is the intersection of the spherical caps of radius  $180^\circ - \alpha_0$  centred at the points diametrically opposite to  $T_1$  and  $T_2$ . Since  $\alpha_0 > 90^\circ$ , it follows that  $K$  is convex, regarded as a spherical region. It is bounded by two circular arcs which intersect in the points, say  $N_1$  and  $N_2$ . Using the assumption that  $T_1 = \bar{T}_1$  and  $T_2 = \bar{T}_2$ , an easy calculation shows that  $\angle N_1ON_2 = 2 \arccos 1/\sqrt{10} \approx 143.13^\circ$ .

Let  $N$  be the midpoint of the arc  $N_1N_2$ . We are going to show that  $N \in H$ . Suppose the contrary. Let the planes  $T_1T_2T_3$  and  $T_1T_2T_4$  intersect the arc  $N_1N_2$  in the points  $N_3$  and  $N_4$ , respectively. Without loss of generality we may assume that  $N_3$  and  $N_4$  belong to the closed arc  $N_1N$ . Let  $M$  denote the midpoint of the straight segment  $T_1T_2$ . Then  $M$  lies in the plane  $ON_1N_2$ , and the angle  $\angle N_3MN_4$  is equal to the dihedral angle of the tetrahedron  $T$  at the edge  $T_1T_2$ . Thus we have by supposition

$$\angle N_3MN_4 = 60^\circ.$$

On the other hand, we have  $\angle N_3MN_4 \leq \angle NMN_1$ . Using the relations  $ON = ON_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}$ ,  $OM = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $\angle NON_1 = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$  along with the fact that the points  $M$ ,  $O$  and  $N$  lie on a straight line, in this order, we obtain by a simple computation that

$$\angle NMN_1 = 45^\circ,$$

and consequently we have

$$\angle N_3MN_4 < 60^\circ.$$

This being a contradiction, we conclude that  $N \in H$ , as claimed.

Let the planes  $T_1T_2T_3$  and  $T_1T_2T_4$  intersect the boundary of  $K$  in the points  $H_1$  and  $H_3$  and  $H_2$  and  $H_4$ , respectively, choosing the notations so that the cyclic order of points on the circle  $T_1T_2T_3$  is  $T_1, H_1, H_3, T_2$  and the cyclic order of points on the circle  $T_1T_2T_4$  is  $T_1, H_2, H_4, T_2$ . Then it follows by the fact that  $N \in H$ , that the arcs  $H_1H_3$  and  $H_2H_4$  do not belong to the boundary of the convex hull of  $H$ .

We consider now two points,  $X$  and  $Y$ , of  $H$  such that  $\angle XOY$  is equal to the diameter of the spherical region  $H$ . Since  $X$  and  $Y$  belong to the boundary of the convex hull of  $H$ , they must lie on the closed arc  $H_1H_2$  or  $H_3H_4$ . We suppose that  $X$  belongs to the arc  $H_1H_2$ . If  $X$  is an interior point of this arc, then the tangent to the arc  $H_1H_2$  at  $X$  is perpendicular to the spherical segment  $XY$ . It follows that  $Y$  is an interior point of the arc  $H_3H_4$  and the tangent to the arc  $H_3H_4$  at  $Y$  is perpendicular to the spherical segment  $XY$ . This implies that  $X$  and  $Y$  are situated on the great circle  $T_1T_2$ . Reminding still to the assumption that  $T_1 = \bar{T}_1$  and  $T_2 = \bar{T}_2$  we obtain that  $\angle XOY = 360^\circ - 3\alpha_0 < \alpha_0$ . Thus we have  $\angle XOY < \alpha_0$  unless the points  $X$  and  $Y$  coincide with a pair from among the points  $H_1, H_2, H_3$  and  $H_4$ . But since the spherical segments  $H_1H_4$  and  $H_2H_3$  intersect, it follows by the triangle inequality that the greatest spherical distance among these four points is  $\angle H_1OH_4 = \angle H_2OH_3$ .

Translating back the results of our considerations above to the language of euclidean geometry, we see that the diameter of  $H$  is either less than 2, or it is equal to the common value of the distances  $H_1H_4$  and  $H_2H_3$ .





The relations (2) and (3) imply that

$$T_1 F_2 = \sqrt{4-v^2} = 2 \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

and

$$T_2 F_3 = \sqrt{4-w^2} = 2 \frac{1-y^2}{1+y^2}.$$

Substituting these expressions for  $T_1 F_2$  and  $T_2 F_3$  in the obvious relation  $F_2 F_3 = 2 - T_1 F_2 - T_2 F_3$  we obtain

$$(4) \quad F_2 F_3 = 6 - \frac{4}{1+x^2} - \frac{4}{1+y^2}.$$

Let  $H'_3$  be the orthogonal projection of  $H_3$  onto the plane perpendicular to  $T_1 T_2$  through  $F_2$ . Then we have

$$(H_2 H_3)^2 = (H_2 H'_3)^2 + (H_3 H'_3)^2.$$

It is obvious that  $(H_3 H'_3)^2 = (F_2 F_3)^2$ . The quantity  $(H_2 H'_3)^2$  can be determined from the triangle  $H'_3 F_2 H_2$  using the cosine law and the facts that  $F_2 H_2 = v$ ,  $F_2 H'_3 = w$  and  $\angle H_2 F_2 H'_3 = 60^\circ$ :

$$(H_2 H'_3)^2 = v^2 + w^2 - vw.$$

Thus we have

$$(H_2 H_3)^2 = (F_2 F_3)^2 + v^2 + w^2 - vw.$$

Combining this with the relations (1), (2), (3) and (4) we obtain by a simple computation that

$$(H_2 H_3)^2 = 36 - \frac{96(xy+1)}{2x^2y^2+2xy+3}.$$

Writing

$$f(t) = \frac{t+1}{2t^2+2t+3}$$

this transforms into

$$(H_2 H_3)^2 = 36 - 96f(t).$$

We are going to give lower and upper bounds for the quantity  $xy$ . Because of the symmetric roles of  $x$  and  $y$  we may assume that  $x \leq y$ . We observe that  $4xy$  is nothing else but the area of the triangle  $MO_2O_3$ . Since  $O_2O_3 = \sqrt{1/2}$  and for  $x \leq y$  the altitude of the triangle  $MO_2O_3$  belonging to the side  $O_2O_3$  increases with  $x$ , therefore the quantity  $xy$  attains its maximum and minimum in the same cases as  $x$ . In particular, it attains its maximum equal to  $1/2$  when  $x=y=\sqrt{1/2}$  corresponding to the case when  $T$  and  $\bar{T}$  coincide. On the other hand,  $x$ , as well as  $xy$ , attains its minimum when the points  $H_2$  and  $H_4$  coincide, so that  $T_1 H_2 = T_2 H_2 = 2$ . In this case we have  $x = \sqrt{3}/3$ ,  $y = (3 + \sqrt{3})/6$  and  $xy = (\sqrt{3} + 1)/6$ .

Recapitulating, we have

$$\frac{\sqrt{3}+1}{6} \leq xy \leq \frac{1}{2},$$

and the upper bound is attained only when  $T$  and  $\bar{T}$  coincide.

We have

$$f'(t) = \frac{-2t^2 - 4t + 1}{(2t^2 + 2t + 3)^2}.$$

The sign of  $f'(t)$  is determined by the quadratic polynomial  $-2t^2 - 4t + 1$ , which is negative for  $t > \sqrt{2} - 1$ , whence in the interval  $(\sqrt{3} + 1)/6 \leq t \leq 1/2$ . Therefore  $f(t)$  attains its minimum, and the quantity  $(H_2 H_3)^2 = 36 - 96f(t)$  attains its maximum, namely 4, in the case when  $t = 1/2$ . Thus we have  $H_2 H_3 \leq 2$ , and here strict inequality holds unless  $t = xy = 1/2$ . But we have just seen above, that the last equality characterizes the case when  $T$  and  $\bar{T}$  coincide.

LEMMA 2. *There is no convex polyhedron bounded by one quadrangle and ten pentagons such that in each vertex of the polyhedron exactly three faces meet.*

Suppose that there is a convex polyhedron satisfying the conditions of the lemma. Let  $P_1, P_2, P_3$  and  $P_4$  be the vertices of the quadrangular face of the polyhedron, in their cyclic order (Fig. 4). Let  $Q_i$  be the endpoint of the third edge of the polyhedron emanating from  $P_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). It is easily seen that the points  $Q_i$  are different from one another, as well as from the points  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Write  $P_5 = P_1$  and  $Q_5 = Q_1$ . Then for  $1 \leq i \leq 4$  the points  $Q_i, P_i, P_{i+1}$  and  $Q_{i+1}$  are four consecutive vertices of a pentagonal face of the polyhedron. Let  $R_i$  denote the fifth vertex of this face. Again, it is clear that the points  $P_i, Q_i, R_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , are all different. In the part of the polyhedron considered so far the points  $P_i$  and  $Q_i$  have valency 3, while  $R_i$  has only valency 2. Thus, there is a third vertex, say  $S_i$ , which is connected by an edge to  $R_i$ . Writing  $R_5 = R_1$  and  $S_5 = S_1$ , we have  $S_i \neq R_{i+1}$  and  $S_i \neq S_{i+1}$ , for otherwise we obtain a triangular or a quadrangular face. If for  $i = 1, 2$  we have  $S_i = R_{i+2}$ , then  $S_{i+1}$  has valency 1, if however  $S_i = S_{i+2}$ , then we have  $S_i = S_{i+1} = S_{i+2}$ . In the latter case  $R_i Q_{i+1} R_{i+1} S_i$  and  $S_i R_{i+1} Q_{i+2} R_{i+2}$  are quadrangular faces of the polyhedron. Thus, the points  $S_i$  are different from one another and from the points  $R_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

Now  $S_i, R_i, Q_{i+1}, R_{i+1}$  and  $S_{i+1}$  are five consecutive vertices of a face of the polyhedron, so that the points  $S_i$  and  $S_{i+1}$  are connected with an edge. But this

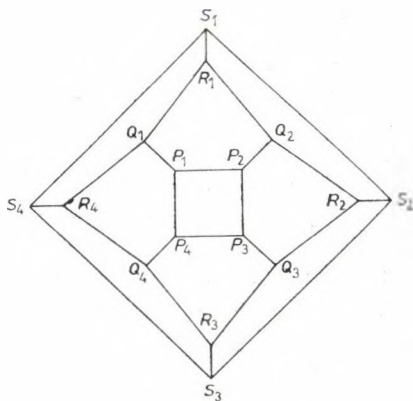


Fig. 4

means that all the vertices considered so far are threevalent, and our polyhedron has only ten faces, two of which are quadrangles. This is a contradiction which proves Lemma 2.

LEMMA 3. *There is no fourvalent face-to-face tiling of the 3-dimensional euclidean space by convex polyhedra each having 12 pentagonal faces.*

We remind to the known fact [2] that there is a regular four-dimensional polytope  $P$ , the 120-cell with the Schläfli symbol  $\{5, 3, 3\}$ , which is bounded by 120 regular dodecahedron such that in each vertex of  $P$  exactly four facets meet. Supposing that there is a tiling  $\mathcal{T}$  as described in the lemma, we shall arrive to a contradiction by showing that there is a cell complex consisting of 120, not necessarily distinct, cells of  $\mathcal{T}$  which is isomorphic to the boundary complex of  $P$ .

Since we want to consider cell complexes where we allow that the cells are not different, we have to define a cell complex abstractly: A cell complex will be given by enumerating its 0-, 1-, 2- and 3-dimensional elements, called vertices, edges, faces and cells, respectively, and specifying an incidence relation among these elements. We shall denote this incidence relation with the symbol  $<$ , in order to distinguish it from the relation  $\subset$ . Two cell complexes will be said to be isomorphic if there is a one-to-one correspondence between the vertices, edges, faces and cells of them which is compatible with incidence.

We consider the boundary complex  $\mathcal{C}$  of  $P$ , i.e. the cell complex consisting of the vertices, edges, faces and cells of  $P$  with the usual incidence relation  $< = \subset$ . Let  $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_{120}$  be the cells of  $\mathcal{C}$  (the facets of  $P$ ) enumerated in an order, that they form a shelling of  $\mathcal{C}$ . This means that for  $k=1, \dots, 119$  the set  $\bigcup_{j=1}^k \bar{C}_j$  is homeomorphic to a three-dimensional ball and the set  $\bar{C}_k \cap (\bigcup_{j=1}^{k-1} \bar{C}_j)$  is homeomorphic to a circle. It follows by a general theorem of Bruggesser and Mani [1], but it can be checked also directly, that  $\mathcal{C}$  is shellable. For  $k=1, \dots, 119$  let  $\mathcal{C}_k$  and  $\bar{\mathcal{C}}_k$  be the sub-complexes of  $\mathcal{C}$  consisting of the vertices, edges, faces and cells of  $\mathcal{C}$  which are contained in the sets  $\bigcup_{j=1}^k \bar{C}_j$  and  $\bar{C}_{k+1} \cap (\bigcup_{j=1}^k \bar{C}_j)$ , respectively. In order to unify our notations we write  $\bar{\mathcal{C}}_{120} = \mathcal{C}$ .

Let  $C_1$  be an arbitrary cell of the tiling  $\mathcal{T}$ , and  $\mathcal{C}_1$  the cell complex consisting of the single cell  $C_1$  together with its faces, edges and vertices, the incidence relation  $<$  being the usual relation  $\subset$ . It is obvious that the cell complexes  $\mathcal{C}_1$  and  $\bar{\mathcal{C}}_1$  are isomorphic; let  $\iota_1$  be an isomorphism between them. We are now going to define by induction cell complexes  $\mathcal{C}_k$  and isomorphisms  $\iota_k$  between  $\mathcal{C}_k$  and  $\bar{\mathcal{C}}_k$  for  $2 \leq k \leq 120$ . The cell complex  $\mathcal{C}_k$  will have the following properties:

(i) The cells, faces, edges and vertices of  $\mathcal{C}_k$  are cells, faces, edges and vertices of the tiling  $\mathcal{T}$ ;

(ii) the incidence relation  $<$  between the different building elements of  $\mathcal{C}_k$  has the property that if  $X < Y$  then  $X \subset Y$ ;

(iii) if  $C_j$  and  $C_m$  are two cells of  $\mathcal{C}_k$  and  $F$  is a face of  $\mathcal{C}_k$  such that  $F \subset C_j$  and  $F \subset C_m$ , then  $C_j$  and  $C_m$  are different cells of  $\mathcal{T}$ .

It is obvious that  $\mathcal{C}_1$  has the properties (i)–(iii). Suppose now that for some  $k$ ,  $1 \leq k \leq 119$ , we have a cell complex  $\mathcal{C}_k$  with the properties (i)–(iii), and furthermore  $\iota_k$  is an isomorphism between  $\mathcal{C}_k$  and  $\bar{\mathcal{C}}_k$ . Let  $\mathcal{C}_k^*$  be the subcomplex of  $\mathcal{C}_k$  which corresponds to  $\bar{\mathcal{C}}_k^*$  at the isomorphism  $\iota_k$ . Let  $F$  be an arbitrary face of the cell complex  $\mathcal{C}_k^*$ . Let  $\bar{F}$  be the face of  $\bar{\mathcal{C}}_k^*$  corresponding to  $F$  at the isomorphism  $\iota_k$ . Then there is a unique cell  $\bar{\mathcal{C}}$  of  $\bar{\mathcal{C}}_k$  joining to the face  $\bar{F}$ , and a cell  $C$  of  $\mathcal{C}_k$  corresponding to  $\bar{C}$  at the isomorphism  $\iota_k$ . Since the tiling  $\mathcal{T}$  is face-to-face, there is a unique cell of  $\mathcal{T}$  different from  $C$  joining to the face  $F$ . We shall denote this cell of  $\mathcal{T}$  by  $C_{k+1}$ , the notion indicating the fact, that the resulting cell of  $\mathcal{T}$  is independent of the choice of  $F$ .

In order to see this last statement, we observe that the cell complex  $\bar{\mathcal{C}}_k^*$  is connected in the sense, that to any two faces  $\bar{F}$  and  $\bar{F}'$ , of  $\bar{\mathcal{C}}_k^*$  there is a sequence  $\bar{F}_1 = \bar{F}, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n = \bar{F}'$  of faces of  $\bar{\mathcal{C}}_k^*$  such that for  $i = 1, \dots, n-1$   $\bar{F}_i$  and  $\bar{F}_{i+1}$  have a common edge. By the isomorphism of  $\bar{\mathcal{C}}_k^*$  and  $\mathcal{C}_k^*$  the same holds for the complex  $\mathcal{C}_k^*$ . Therefore it suffices to show that for any two faces  $F$  and  $F'$  of  $\mathcal{C}_k^*$  to which there is an edge  $E$  of  $\mathcal{C}_k^*$  such that  $E < F$  and  $E < F'$ , the cells of  $\mathcal{T}$  associated by the above procedure to  $F$  and  $F'$ , are identical.

Denote by  $\bar{F}'$  the face of  $\bar{\mathcal{C}}_k^*$  and by  $\bar{E}$  the edge of  $\bar{\mathcal{C}}_k$  corresponding at the isomorphism  $\iota_k$  to  $F'$  and  $E$ , respectively. Now  $\bar{F}$  and  $\bar{F}'$  are two faces of  $\bar{\mathcal{C}}_k^*$  with the common edge  $\bar{E}$ . It follows immediately by the definition of  $\bar{\mathcal{C}}_k^*$  that at  $\bar{E}$  two cells of  $\bar{\mathcal{C}}_k$  meet; the cell  $\bar{C}$  joining to  $\bar{F}$  and the cell  $\bar{C}'$  joining to  $\bar{F}'$ . Moreover,  $\bar{C}$  and  $\bar{C}'$  have a common face. Then the cells  $C$  and  $C'$  of  $\mathcal{C}_k$  corresponding to  $\bar{C}$  and  $\bar{C}'$  have also a face in common, and whence, they are different. Now the cells associated with  $F$  and  $F'$  are different from  $C$  and  $C'$  and they share with these cells the edge  $E$ . Therefore, since at each edge of  $\mathcal{T}$  exactly three cells meet, they must be identical, as claimed.

We obtain a cell complex  $\mathcal{C}_{k+1}$  by joining the cell  $C_{k+1}$  of  $\mathcal{T}$  together with its faces, edges and vertices not contained in  $\mathcal{C}_k^*$  to the cell complex  $\mathcal{C}_k$ , and extending the relation  $<$  as follows: If  $X$  is a vertex, an edge or a face of  $C_{k+1}$  which does not belong to  $\mathcal{C}_k$ , or  $X = C_{k+1}$  and  $Y$  and  $Z$  are arbitrary elements of  $\mathcal{C}_{k+1}$ , then we have  $Y < X < Z$  if and only if  $Y$  and  $Z$  are vertices, edges or faces of  $C_{k+1}$ , or they are identical with  $C_{k+1}$  and  $Y \subset X \subset Z$ .

It is obvious that  $\mathcal{C}_{k+1}$  satisfies the conditions (i)–(iii). Furthermore, we can extend the isomorphism  $\iota_k$  in a straightforward way to an isomorphism  $\iota_{k+1}$  between  $\mathcal{C}_{k+1}$  and  $\bar{\mathcal{C}}_{k+1}$ . As a result of this inductive procedure we obtain a cell complex  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{120}$  isomorphic to  $\bar{\mathcal{C}}$ . This means that the cells of  $\mathcal{C}$  form a finite subset of the cells of  $\mathcal{T}$  with the property that if  $V$  is a vertex of a cell of  $\mathcal{C}$  then at  $V$  four different cells of  $\mathcal{C}$  meet. Let  $U$  be the union of the cells of  $\mathcal{C}$ , and  $W$  a vertex of the convex hull of  $U$ . Then  $W$  is a vertex of a cell of  $\mathcal{C}$ , and in it four cells of  $\mathcal{C}$  meet. It is obvious that these four cells cannot cover a neighbourhood of  $W$ . On the other hand, since in each vertex of  $\mathcal{T}$  exactly four cells meet, there is no further cell of  $\mathcal{T}$  containing  $W$ . Thus there is a ball in a neighbourhood of  $W$  which is not covered by the cells of  $\mathcal{T}$ , which is a contradiction.

This completes the proof of Lemma 3.



Now we turn to the proof of the Theorem. Let  $\mathcal{P}$  be a packing of unit balls, and suppose that the balls of radius  $R_0 = \sqrt{5/3}$  concentric with the balls of  $\mathcal{P}$  cover the space. We associate with each ball  $B$  of  $\mathcal{P}$  the region  $D_B$ , called the *Dirichlet cell* of  $B$ , consisting of those points of the space which lie nearer to the centre of  $B$  than to the centre of any other ball of  $\mathcal{P}$ . It is known [4, 7] that the Dirichlet cells are convex polyhedra forming a tiling of the space. Furthermore,  $B$  is contained in  $D_B$  and the ball of radius  $R_0$  concentric with  $B$  contains  $D_B$ .

First we show that there is no point of the space which belongs to the boundary of more than four Dirichlet cells. For, suppose that the point  $A$  belongs to the boundary of the Dirichlet cells  $D_{B_1}, \dots, D_{B_5}$ . Then  $A$  is at equal distance, say  $d$ , from the centres  $O_i$  of the balls  $B_i$  ( $i=1, \dots, 5$ ). Then a result of Schütte and van der Waerden [9] implies that there are two indices  $j$  and  $k$ ,  $1 \leq j < k \leq 5$ , such that  $\angle O_j A O_k \leq 90^\circ$ . Since, on the other hand, the distance of  $O_j$  and  $O_k$  is at least 2, we have  $AO_i = d > 1/\sin 45^\circ = \sqrt{2} > \sqrt{5/3} = R_0$ , a contradiction. Thus any point of the space belongs to the boundary of at most four Dirichlet cells, as claimed. As a simple consequence we obtain that all vertices of all Dirichlet cells are trihedral.

We continue to show that there is no Dirichlet cell having a face with more than six vertices. We shall show a little more: If  $A_1, A_2$  and  $A_3$  are three consecutive vertices of a face of a Dirichlet cell  $D_B$ ,  $B \in \mathcal{P}$ , then  $\angle A_1 A_2 A_3 \leq 120^\circ$ . For, suppose that  $\angle A_1 A_2 A_3 > 120^\circ$ . Let  $O$  be the centre of  $B$ , and  $O_1, O_2$  and  $O_3$  the centres of the other three balls of  $\mathcal{P}$  to which the Dirichlet cells meeting at  $A_2$  belong, choosing the notations so that  $OO_1$  is perpendicular to the plane  $A_1 A_2 A_3$ . Then the dihedral angle at the edge  $OO_1$  of the tetrahedron  $OO_1 O_2 O_3$  is equal to  $180^\circ - \angle A_1 A_2 A_3$  which is less than  $60^\circ$ . Therefore Lemma 1 implies that  $OA_2 > R_0$ , which is impossible.

Next we are going to show that there is a Dirichlet cell  $D_B$ ,  $B \in \mathcal{P}$ , having a hexagonal face. Euler's formula implies that the number of edges of a convex polyhedron with  $n$  faces and trihedral vertices is equal to  $3n-6$ . It immediately follows that any Dirichlet cell  $D_B$  with more than 12 faces has a face with more than five vertices, which must be, by the considerations above, a hexagon. Thus we have to exclude the case that each Dirichlet cell has at most 12 faces but no face with more than five edges.

First we prove that there is no Dirichlet cell with less than 11 faces. For, suppose that  $D_B$  is such a cell. Let the half-lines drawn from the centre  $O$  of  $B$  perpendicular to the faces of  $D_B$  intersect the boundary of  $B$  in the points  $F_1, \dots, F_n$ ,  $n \leq 10$ . A result of L. Fejes Tóth [3] implies that the spherical caps of angular radius  $\arccos 1/R_0$  centred at the points  $F_1, \dots, F_n$  cannot cover the boundary of  $B$ . If  $P$  is a point of the boundary of  $B$  not covered by the caps, and  $A$  is the intersection of the half-line  $OP$  with the boundary of  $D_B$ , then we have  $OA > R_0$ , which is a contradiction.

A Dirichlet cell with 11 faces, each of them having at most five edges, is bounded, in view of Euler's theorem, by one quadrangular and 10 pentagonal faces. This case is ruled out by Lemma 2.

It remains to investigate the case that each Dirichlet cell has exactly 12 faces and each face has at most 5 edges. Now, Euler's theorem implies that each face of each cell is a pentagon. But also this case is impossible, by Lemma 3. This finishes the proof of the proposition that there is a Dirichlet cell with a hexagonal face.

Let  $F = A_1 A_2 \dots A_6$  be a hexagonal face of the Dirichlet cell  $D_B$ . Since no angle of  $F$  can be greater than  $120^\circ$ , each angle of  $F$  is equal to  $120^\circ$ . Let  $O$  be the centre of  $B$  and  $O_1$  the point obtained by reflecting  $O$  in the plane of  $F$ . Write  $A_7 = A_1$ . Let  $O_i$ ,  $i = 2, \dots, 7$ , be the point for which the line  $A_{i-1} A_i$  is the radical axis of the unit balls centred at  $O$ ,  $O_1$  and  $O_i$ . We consider the six tetrahedra  $OO_1 O_2 O_3, \dots, OO_1 O_7 O_2$ . All these tetrahedra satisfy the conditions of Lemma 1, and their circumradius is not greater than  $R_0$ . Therefore all these tetrahedra are congruent to  $T$ , and in particular, we have  $OO_1 = 2$ . It follows that all the points  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , are at distance  $\sqrt{2/3}$  from the midpoint of the segment  $OO_1$ . This, together with the property that the angles of  $F$  are equal to  $120^\circ$ , implies that  $F$  is a regular hexagon. Moreover, we can draw a regular truncated octahedron  $R$  of side-length  $\sqrt{2/3}$  and centre of symmetry  $O$ , such that  $F$  is a face of  $R$  and the faces of  $R$  and  $D_B$  adjacent to  $F$  lie in the same planes. Without loss of generality we may suppose that along the edges  $A_1 A_2$ ,  $A_3 A_4$  and  $A_5 A_6$  quadrangular faces of  $R$  join to  $F$ .

We shall show that  $D_B$  is identical with  $R$ . First we show that the faces of  $D_B$  joining to  $F$  along the edges  $A_1 A_2$ ,  $A_3 A_4$  and  $A_5 A_6$  are squares. Consider, e.g. the face  $F_1$  with the edge  $A_1 A_2$ . Since  $OO_2 = b > 2$ , Lemma 1 implies that each angle of  $F_1$  is less than  $120^\circ$ . This, together with the fact that the angles of  $F_1$  at  $A_1$  and  $A_2$  are equal to  $90^\circ$ , implies that  $F_1$  is a quadrangle  $A_1 A_2 B_2 B_1$ . Let  $O_8$  be the point for which the line  $B_1 B_2$  is the radical axis of the unit balls centred at  $O$ ,  $O_2$  and  $O_8$ . Consider the triangle  $OO_2 O_8$ . Since  $OO_8 \geq 2$ ,  $O_2 O_8 \geq 2$  and  $OO_1 = b = 4/\sqrt{3}$ , we have  $\angle OO_8 O_2 < \pi/2$ . It follows that the distance of the centre of the circumcircle of  $OO_2 O_8$  from the line  $OO_2$  attains its minimum, namely  $\sqrt{1/6}$ , when  $OO_8 = O_2 O_8 = 2$ . This means that the line  $B_1 B_2$  does not intersect the open circle  $C$  of radius  $\sqrt{1/6}$  drawn in the plane of  $F_1$  with centre at the midpoint of the segment  $OO_2$ . On the other hand, the distance of  $O$  from a point of the plane of  $F_1$  lying outside the circle  $C'$  of radius  $\sqrt{1/3}$  concentric with  $C$ , is greater than  $R_0$ . Therefore  $B_1$  and  $B_2$  lie in  $C'$ . We observe that  $C$  and  $C'$  are nothing else than the incircle and circumcircle of the square face of  $R$  with the edge  $A_1 A_2$ . Therefore the fact that  $B_1$  and  $B_2$  lie in  $C'$  but the line  $B_1 B_2$  does not intersect  $C$  implies that  $F_1$  is identical with the corresponding square face of  $R$ .

We continue to show that the faces of  $D_B$  joining to  $F$  along the edges  $A_2 A_3$ ,  $A_4 A_5$  and  $A_6 A_1$  are also identical with the corresponding (hexagonal) faces of  $R$ . Consider, e.g. the face  $F_2$  with the edge  $A_2 A_3$ . Let  $E_2, B_2, A_2, A_3, B_3$  and  $E_3$  be consecutive vertices of  $F_2$ . From the above considerations we know that the edges  $A_2 B_3$ ,  $A_2 A_3$  and  $A_3 B_3$  are identical with the corresponding edges of  $R$ , and the edges  $E_2 B_2$  and  $B_3 E_3$  lie in the same lines as the corresponding edges of  $R$ . It cannot occur that the vertices  $E_2$  and  $E_3$  coincide, since the intersection of the lines  $B_2 E_2$  and  $B_3 E_3$  is a point at distance  $\sqrt{3} > R_0$  from  $O$  which cannot be a vertex of  $D_B$ . Thus  $F_2$  is a hexagon. Now the argument which we used to prove that  $F$  is a regular hexagon applies also in this case and shows that  $F_2$  is also regular.

Recapitulating, we have shown that if  $F$  is a hexagonal face of  $D_B$  then  $F$  is regular, and the faces of  $D_B$  and  $R$  adjacent to  $F$  are identical. Applying this to the hexagonal faces of  $D_B$  adjacent to  $F$  we see that all faces of  $R$  but the hexagon opposite to  $F$  are faces of  $D_B$ . But this face of  $R$  is uniquely determined by the neighbouring faces and the property that the polyhedron is trihedral, so that it must also be a face of  $D_B$ . Thus  $D_B$  is identical with  $R$ , as claimed.



We observe that there is a unique tiling  $\mathcal{T}$  with congruent and homothetic copies of  $R$  which contains  $D_B$  as a tile. The centroids of the tiles of this tiling form a space-centred cubic lattice of side-length  $4/\sqrt{3}$ . It is clear from the considerations above that the Dirichlet cells joining to  $D_B$  along hexagonal faces are also regular truncated octahedra and are tiles of  $\mathcal{T}$ . But the same holds for the Dirichlet cells joining to  $D_B$  along square faces, since these join along hexagonal faces to a Dirichlet cell which has a hexagonal face in common with  $D_B$ . Thus, all Dirichlet cells which are neighbours of  $D_B$  are tiles of  $\mathcal{T}$ . Similarly, we see that the second, third, ... neighbours of  $D_B$ , that is all Dirichlet cells, are tiles of  $\mathcal{T}$ .

This completes the proof of the theorem.

#### REFERENCES

- [1] BRUGGESSER, H. and MANI, P., Shellable decompositions of cells and spheres, *Math. Scand.* **29** (1971), 197—205. *MR* **48** # 7286.
- [2] COXETER, H. S. M., *Regular polytopes*, Third edition, Dover Publications, Inc., New York, 1973. *MR* **51** # 6554.
- [3] FEJES TÓTH, L., Über eine Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems, *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **53** (1943), 66—68. *MR* **8**—167.
- [4] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Zweite verbesserte und erweiterte Auflage, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 65, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1972. *MR* **50** # 5603.
- [5] FEJES TÓTH, L., Close packing and loose covering with balls, *Publ. Math. Debrecen* **23** (1976), 323—326. *MR* **55** # 1224.
- [6] FEJES TÓTH, L., Remarks on the closest packing of convex discs, *Comment. Math. Helv.* **53** (1978), 536—541. *MR* **58** # 24019.
- [7] ROGERS, C. A., *Packing and covering*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 54, Cambridge University Press, New York, 1964. *MR* **30** # 2405.
- [8] RYŠKOV, S. S., The polyhedron  $\mu(m)$  and some elementary problem in the geometry of numbers, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **194** (1970), no. 3, 514—517.
- [9] SCHÜTTE, K. and WAERDEN, B. L. VAN DER, Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz?, *Math. Ann.* **123** (1951), 96—124. *MR* **13**—61.

(Received February 1, 1977; in revised form January 23, 1984)

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
 TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR  
 GEOMETRIAI TANSZÉK  
 RÁKÓCZI ÚT 5.  
 H-1088 BUDAPEST  
 HUNGARY



## INVERSIVE GEOMETRY AND THE HOPF FIBRATION

J. B. WILKER

*Dedicated to Professor L. Fejes Tóth on the occasion of his seventieth birthday*

### 1. Introduction

Geometrical objects are creatures of the day; they can be seen and handled and they obey our intuition. Topological objects are creatures of the night; they are the more shadowy creations of our imagination and they regularly defy our intuition. One can often *see* a geometrical relationship just as one sees a basic feature of the landscape. But on the topological side it is more frequently the case that one *understands* a relationship in the sense that one understands a clause in a legal contract.

Now if seeing is believing then it is certainly a worthwhile project to try and bring objects of topological interest out into the geometrical light, so to speak, so that they can be appreciated more fully. There have been some spectacular successes in this endeavour. An example of a perfect set really does become visible under Cantor's middle thirds construction. And certainly Peano's area-filling curve is the more tangible for Hilbert's meander-pattern approximations.

Recently, Whitehead began his *Fifty years of homotopy theory* [6] from the date of Hopf's fibration of the 3-sphere [2]. This important discovery is already fairly geometrical by its very nature. But we shall try to make its topologically significant features even more clearly visible by the use of stereographic projection and 3-dimensional inversive geometry. This account is very nearly self contained but additional information on inversive geometry is available in [7]. The author would like to express thanks for valuable discussions with H.S.M. Coxeter, Z.A. Melzak and B.R. Monson.

### 2. The Hopf fibration

The 3-sphere  $S^3$  in  $\mathbb{R}^4$  is the set of points  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  which satisfy the equation  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ . If we introduce complex coordinates by writing  $z_1 = x_1 + ix_2$  and  $z_2 = x_3 + ix_4$  then we can regard  $S^3$  as the set of points  $(z_1, z_2)$  which satisfy the equation  $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ . This allows us to define a distance preserving flow on  $S^3$ : for any  $t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,

$$(z_1, z_2) \rightarrow (e^{it} z_1, e^{it} z_2).$$

The orbit of  $(1, 0)$  under this flow is the great circle  $(e^{it}, 0)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Since the unitary transformations provide isometries of  $S^3$  which are transitive on points and commute with this flow, all the orbits of the flow must be great circles. This partition of  $S^3$  into great circles gives the fibres of the Hopf fibration.

---

1980 *Mathematics Subject Classifications*. Primary 57N12.

*Key words and phrases*. Hopf fibration, inversive geometry.

It remains to show that the circles we have just produced are indexed in a continuous way by the points of the 2-sphere  $S^2$ . But our complex coordinates make this easy as well. The level sets of the mapping

$$S^3 \rightarrow S^2$$

$$(z_1, z_2) \mapsto z = z_1 z_2^{-1}$$

coincide with the circles of the fibration. The mapping is well-defined and surjective provided we interpret  $\infty$  as the image of  $(1, 0)$ .

None of this is hard to understand but it *is* fairly difficult to visualize. And one more hurdle still remains. The topologically significant fact about the great circles in the Hopf fibration is that every pair of them is linked. Can you see that? Well, in a moment you shall see it, and very clearly, too, for we are going to stereographically project these circles into a beautiful fibration of  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ .

### 3. Circles on the torus

The results to be quoted in this section will help to build up our picture in easy steps. However, after this has been done, we shall point out that these results are really a consequence of the present treatment. We are, as a side benefit, adding yet another to the growing list of proofs of existence of the circles of Villarceau (cf. Coxeter [1] pp. 132–133, Melzak [3] pp. 154–155 and Reed [5]).

A torus is usually described as a surface of revolution. One takes a circle of radius  $b$  and rotates it about an axis in its plane at a distance  $a > b$  from its centre. The construction makes it clear that every point on the torus lies on one longitude circle of radius  $b$  and one latitude circle of radius  $r$  where  $a - b \leq r \leq a + b$ . The surprise is that each point also lies on two more circles on the torus, both of radius  $a$ .

To locate these circles, take a plane which cuts the torus in two circles of radius  $b$ . Now tilt this plane about the line through the centres of these circles so that the section deforms into a pair of kidney-shaped curves, and keep tilting until the plane assumes the bitangent position shown in Figure 3.1. The kidneys evolve into cres-

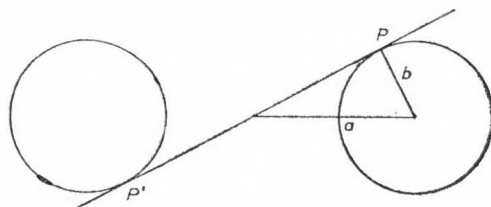


Fig. 3.1. A torus and one of its bitangent planes

cent moons and when the bitangent position is reached the horns of the crescents just touch. In this position the outer boundary of each crescent forms a circle with the inner boundary of the other crescent: the bitangent plane contains the two diagonal circles of Villarceau shown in Figure 3.2. The interested reader may refer

to [4] pp. 70, 71 for an informative sequence of figures depicting the evolution of the torus section described in this paragraph.

As the bitangent plane turns through  $2\pi$  about the axis of revolution of the torus, the diagonal circles described in the last paragraph cover the torus twice. In fact these circles belong to two families in just the same way as the lines which appear on a ruled quadric surface. (There is more to this than mere analogy, but we must not digress.) Any two circles of opposite families meet twice, an instance being the two circles which lie in a given bitangent plane. A moment's consideration shows that any two circles of the same family do not meet but are linked. In the next section we shall build on the picture of a torus covered by a single family of pairwise linked diagonal circles like the ones shown in Figure 3.3.

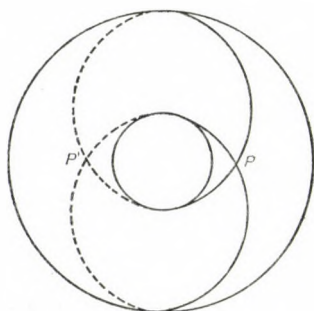


Fig. 3.2. The two circles of Villarceau common to the torus and bitangent plane of Figure 3.1

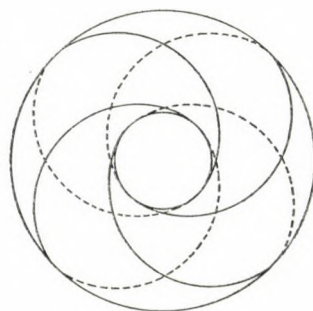


Fig. 3.3. Our torus covered by a single family of pairwise linked diagonal circles

#### 4. The fibration of $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$

Let  $F_1$  and  $F_2$  be two points in a plane. For any number  $k$ ,  $0 < k < \infty$ , the locus of points  $P$  such that  $PF_1/PF_2 = k$  is either a line, the right bisector of  $F_1F_2$  ( $k=1$ ), or a circle surrounding  $F_1$  ( $k < 1$ ), or a circle surrounding  $F_2$  ( $k > 1$ ). The totality of these circles (it is customary to regard the line as a special circle) constitute the non-intersecting pencil of circles with limiting points  $F_1$  ( $k \rightarrow 0$ ) and  $F_2$  ( $k \rightarrow \infty$ ) shown in Figure 4.1.

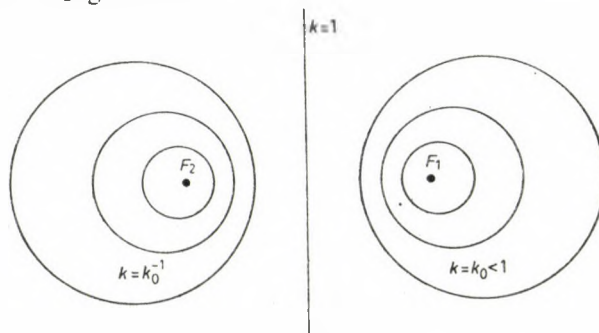


Fig. 4.1. The pencil of circles with limiting points  $F_1$  and  $F_2$



An alternative definition and a useful fact is that the circles of this pencil are the orthogonal trajectories of all circles through  $F_1$  and  $F_2$ . We shall return later to the consequences of this remark.

Now we want to visualize a non-intersecting pencil of circles in the  $(x_2, x_3)$ -plane of  $\mathbf{R}^3$  with limiting points  $F_1 = (0, 1, 0)$  and  $F_2 = (0, -1, 0)$ . The right bisector of  $F_1 F_2$  is the  $x_3$ -axis and if we rotate the pencil about this axis, what happens? The  $x_3$ -axis turns on itself to produce a line; the limiting points  $F_1$  and  $F_2$  sweep out a circle; and the congruent circles with parameters  $k$  and  $k^{-1}$  sweep out a torus with  $a = \frac{k^2 + 1}{|k^2 - 1|}$  and  $b = \frac{2k}{|k^2 - 1|}$ . If we keep the line and the circle and replace each torus with the collection of circles described at the close of the last section, then we arrive at a beautiful fibration of  $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$  into circles.

Just think about it for a moment and you will see that every pair of these circles is linked. In the next sections we shall see that these circles, considered to lie in the 3-space  $x_4 = 0$ , are just the images of the circles in the Hopf fibration of  $S^3$  under stereographic projection from  $(0, 0, 0, 1)$ .

## 5. Stereographic projection

One of the nicest ways to develop the properties of stereographic projection from  $S^n$  to  $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$  is to observe that it is induced by a familiar transformation of the ambient  $(n+1)$ -space, namely, inversion in an  $n$ -sphere (in our case — inversion in the 3-sphere with centre  $(0, 0, 0, 1)$  and radius  $\sqrt{2}$ ). This shows us instantly that stereographic projection maps  $m$ -spheres to  $m$ -spheres or  $m$ -flats,  $1 \leq m \leq n-1$ ; that it preserves angles and cross ratio; and that it conjugates the group generated by inversions on  $S^n$  to the group generated by inversions and reflections on  $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ , i.e. the conformal group of  $S^n$  to the conformal group of  $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ . In particular it conjugates rotations of  $S^n$  to ordinary rotations of  $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$  or their conformal conjugates.

An ordinary rotation of  $\mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$  has 2 fixed points  $F_1$  and  $\infty$ . It can be written as the product of reflections in lines through  $F_1$  (and  $\infty$ ) inclined at half the rotation angle. The orbits lie on circles perpendicular to these lines (circles with centre  $F_1$ ) and the rays from  $F_1$  (to  $\infty$ ) advance like the spokes of a wheel by an amount equal to the rotation angle (see Figure 5.1).

I have given this peculiar, detailed description because it applies, with only the natural changes, to the less familiar conformal conjugate of an ordinary rotation.

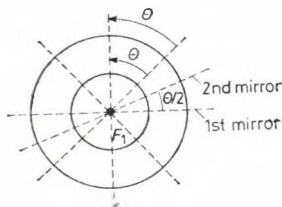


Fig. 5.1. An ordinary rotation through  $\theta$  about  $F_1$  and  $\infty$

This transformation has 2 fixed points  $F_1$  and  $F_2$  (both in  $\mathbf{R}^2$ ) and can be written as the product of inversions in circles through  $F_1$  and  $F_2$  inclined at half the rotation angle. The orbits lie on circles of the orthogonal pencil and arcs of circles from  $F_1$  to  $F_2$  in the original pencil advance by an amount equal to the rotation angle (see Figure 5.2).

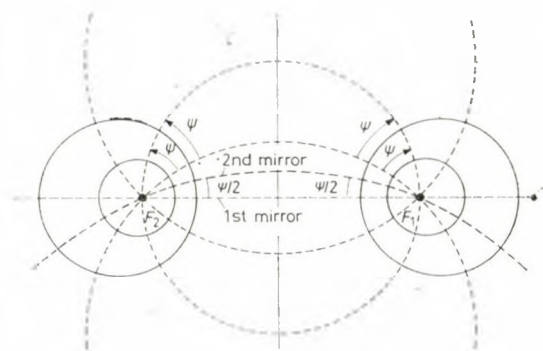


Fig. 5.2. A conformally conjugated rotation through  $\psi$  about  $F_1$  and  $F_2$

An ordinary rotation of  $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$  has a line of fixed points and its action in any plane perpendicular to this line is that of an ordinary rotation of  $\mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$ . The conformal conjugate of such a transformation has a circle of fixed points so for simplicity let us refer to it as rotation about a circle. To picture the action of rotation about a circle, take any plane perpendicular to the circle and what you see in this section is just the action of a 2-dimensional conformally conjugated rotation of the same angle with fixed points located where the plane cuts the circle.

## 6. The connection

Now we are ready to show that stereographic projection really does map the circles of Section 2 to those of Section 4.

In Section 2 we introduced the distance preserving flow

$$(z_1, z_2) \rightarrow (e^{it} z_1, e^{it} z_2)$$

on  $S^3$ . This is a special case of the double rotation,

$$(z_1, z_2) \rightarrow (e^{i\theta} z_1, e^{i\psi} z_2),$$

the commuting product of a  $\theta$ -rotation and a  $\psi$ -rotation. Under stereographic projection the  $\theta$ -rotation conjugates to ordinary rotation through  $\theta$  about the  $x_3$ -axis. But the  $\psi$ -rotation is more interesting: it conjugates to a rotation through  $\psi$  about the circle  $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0$ . Figure 6.1 shows the situation schematically.

The tori described in Section 4 have the  $x_3$ -axis as common axis of rotation so they are all invariant under the  $\theta$ -rotation of  $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$ . Moreover, any plane section of these tori through the  $x_3$ -axis consists of two circles and our parenthetical Section 4 remark about these circles being orthogonal trajectories fits with our Section 5 de-

scription of rotation about a circle, to show that the tori are also invariant under the  $\psi$ -rotation of  $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$ .

The circles of the Hopf fibration of  $S^3$  are orbits of the distance preserving flow with  $\theta = \psi = t$ . The stereographic images of these circles must therefore be the orbits of the stereographically conjugate conformal flow on  $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$ . Since stereographic projection maps circles to circles the conformal orbits must be circles. Since the tori are invariant under arbitrary  $\theta$  and  $\psi$  rotations these circles must lie on the tori. Finally, since 3 points determine a circle, the parameter values  $t=0$ ,  $t=\frac{\pi}{2}$ ,  $t=\pi$  serve to identify the conformal orbits with the circles of Villarceau as shown in Figure 6.2.

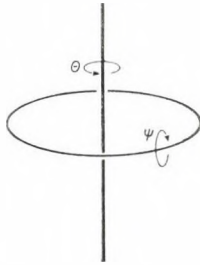


Fig. 6.1. The  $\theta$  and  $\psi$  components of the conformal flow on  $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$

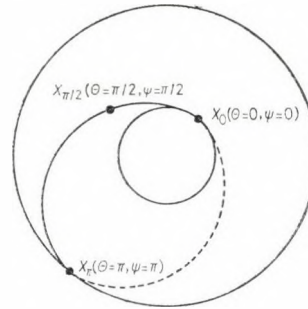


Fig. 6.2. The orbits of the conformal flow with  $\theta = \psi = t$  are circles of Villarceau

## 7. More torus geometry

The first order of business is to justify our claim that the preceding Hopf and conformal considerations are enough to give an independent proof of the existence of the circles of Villarceau. This is certainly the case for every torus generated in Section 4: the conformal orbits give one family of circles and their images under reflection in the plane  $x_3=0$  give the other. To complete our proof we need only observe that the tori of Section 4 represent every similarity class of tori because  $b/a = 2k/(k^2+1)$  assumes every value in the interval  $0 < b/a < 1$ .

If we write  $\cos \phi = b/a$  then  $\phi$  is the angle of tilt of the bitangent plane of the torus in question (cf. Figure 7.1) and also the colatitude of the "northern hemisphere"

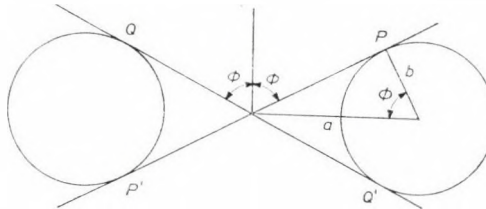


Fig. 7.1. The bitangent planes are tilted at  $\phi = \cos^{-1} b/a$

circle in which that torus meets the 2-sphere  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ . We shall return to this second observation in a moment, but for now let us concentrate on the torus itself for there is more to be said about the circles of Villarceau.

We have a conformal flow on the torus and the orbits of this flow are one family of diagonal circles. But conformal transformations in  $\mathbf{R}^3$  preserve circles so the effect of the flow must be to permute cyclically the circles of the opposite family. Since conformal transformations also preserve angles (of course) this means that any two circles from opposite families meet at the same angle. The special case of a circle and its image under reflection in  $x_3 = 0$ , which is drawn in Figure 7.2, shows us that this angle must be  $2\varphi$ .

Returning to 4-dimensional considerations, we can use this information to perform an amusing calculation. The 3-sphere  $S^3$  meets the 3-flat  $x_4 = 0$  in the 2-sphere  $S^2$  given by  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ ,  $x_4 = 0$ . Thus the points of  $S^2$  are fixed under stereographic projection from  $S^3$  to  $x_4 = 0$ . Since our torus meets  $S^2$  orthogonally, we see that its preimage on  $S^3$  does likewise and can therefore be described as the set of points at distance  $\varphi$  from the circle  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $x_3^2 + x_4^2 = 1$  and distance  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  from the circle  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ,  $x_3 = x_4 = 0$ . Also this preimage is doubly ruled by two families of great circles meeting at  $2\varphi$  as in Figure 7.3 and hence its area must be  $4(1/2)\pi^2 \sin 2\varphi = 2\pi^2 \sin 2\varphi$ . It follows that the volume of  $S^3$  must be  $\int_0^{\pi/2} 2\pi^2 \sin 2\varphi d\varphi = 2\pi^2$ .

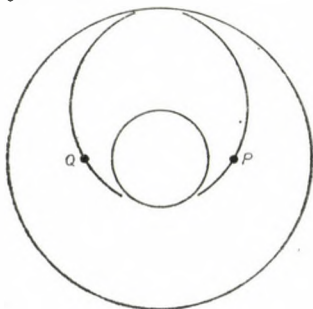


Fig. 7.2. The angle between diagonal circles in opposite families must be  $2\varphi$

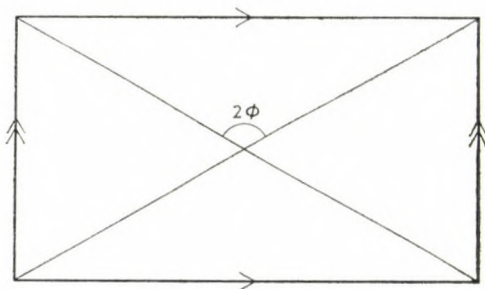


Fig. 7.3. Two diagonal circles from opposite families together with a longitude and latitude circle divide the torus into four triangles

## 8. The mapping $S^3 \rightarrow S^2$

In Section 2 we introduced the mapping

$$(z_1, z_2) \rightarrow z = z_1 z_2^{-1}$$

which we used to index the circles of the Hopf fibration by the points of a 2-sphere. Of course this mapping really has extended complex numbers for values and hence there is a stereographic projection implicit in the assertion that its values are points on a 2-sphere. Let us choose the  $(x_1, x_2)$ -plane of  $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$  for the extended com-

plex plane; the 2-sphere  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  which we have already christened  $S^2$ , for the target space; and let us complete the mapping by using stereographic projection from  $(0, 0, -1)$ .

The sphere  $S^2$  is the intersection of our two spaces  $S^3$  and  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  and so regardless of whether you want to picture the circles of the Hopf fibration as lying in  $S^3$  or in  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  they each have an intersection with  $S^2$ . Most of the fibres meet  $S^2$  at a pair of antipodal points and one of them, the circle  $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0$ , actually lies in  $S^2$ . This suggests a very natural way of associating each fibre with a single point of  $S^2$ : just double the colatitude of the intersection point in the northern hemisphere and allow the equator to collapse to the south pole. This mapping carries Figure 8.1 to Figure 8.2.

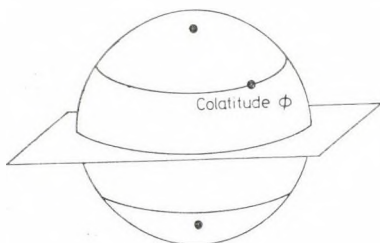


Fig. 8.1. The equator of  $S^2$  is an anomalous fibre. The others meet  $S^2$  once in the northern hemisphere and once in the southern hemisphere

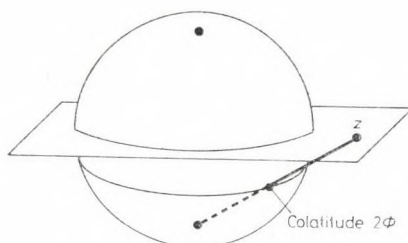


Fig. 8.2. Stereographic projection and colatitude-doubling agree

The object of this section is to show that our two descriptions of the mapping  $S^3 \rightarrow S^2$  agree. A typical fibre on the torus with colatitude  $\phi$  meets  $S^2$  at a point  $(z_1, z_2) = (\sin \phi e^{i\theta}, \cos \phi)$  and so it maps to  $z = \tan \phi e^{i\theta}$ . Figure 8.3 shows that the stereographic image of this point is just  $(\sin 2\phi e^{i\theta}, \cos 2\phi)$  as required.

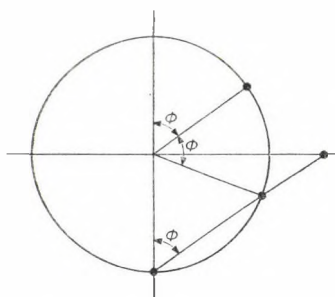


Fig. 8.3. The proof that stereographic projection and colatitude-doubling agree



### 9. Fibre equivalence

Our geometrical description of the Hopf fibration is open to one possible misinterpretation. It definitely seems to specialize two of the fibres, the axis of the  $\theta$ -rotation and the axis of the  $\psi$ -rotation. But in point of fact these two fibres are not really different from the rest. Any two circles in the fibration at mutual distance  $\pi/2$  could serve as axes for an analogous description and would lead to a similar partition of the other fibres into a nest of tori. Let us prove that this is so and determine where these other tori may be found.

We begin by looking once more at the Hopf flow on  $S^3$ . For each value of  $t$  the transformation

$$(z_1, z_2) \rightarrow (e^{it} z_1, e^{it} z_2)$$

is an isometry which leaves the Hopf fibres invariant. It follows that the distance from a point to any fibre must be constant along the fibre of the point. Thus pairs of fibres have a well defined mutual distance which can be measured in exactly the same way as the distance between pairs of parallel lines in the Euclidean plane.

We have mentioned briefly that the unitary transformations give isometries of  $S^3$  which commute with the Hopf flow and therefore act as symmetries of the fibration. Since a complex factor of absolute value 1 can be absorbed as part of the Hopf flow we consider only the special (i.e. determinant 1) unitary transformations

$$(z_1, z_2) \rightarrow (z_1, z_2) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & \bar{a} \end{pmatrix},$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Since these transformations are transitive on the points of  $S^3$ , they are certainly transitive on the fibres of the Hopf fibration. Thus any fibre can take the place of our circle  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $x_3^2 + x_4^2 = 1$  and when it does, its uniquely determined mate at distance  $\pi/2$  will take the place of  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ,  $x_3 = x_4 = 0$ .

In order to get a feeling for the action of a special unitary transformation on the points of  $S^3$  we consider the particular case with  $a = e^{iu}$  and  $b = 0$ . This mapping can be written

$$(z_1, z_2) \rightarrow (e^{iu} z_1, e^{-iu} z_2)$$

and if we vary  $u$  we obtain a flow like the original Hopf flow but with  $\psi = -\theta$  instead of  $\psi = \theta$ . This flow leaves invariant the tori we already have before us but it has for its orbits the opposite family of circles on these tori. The transformation therefore fixes what we have been calling the  $\theta$ -axis and the  $\psi$ -axis and cyclically permutes the other fibres on their tori.

Now let us use our fibre labelling

$$S^3 \rightarrow S^2$$

$$(z_1, z_2) \rightarrow z = z_1 z_2^{-1}$$

to investigate the action of a special unitary transformation on the fibres. It is simply

$$z = z_1 z_2^{-1} \rightarrow \frac{az_1 + bz_2}{-\bar{b}z_1 + \bar{a}z_2} = \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}$$

which we recognize as a rotation of  $S^2$ .

In the particular case with  $a=e^{iu}$  and  $b=0$  the rotation is  $z \rightarrow e^{2iu}z$  which has 0 and  $\infty$  for its fixed points and the latitude circles  $\varphi=\text{constant}$  for its other orbits. The general rotation  $z \rightarrow \frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}}$  is conjugate to this one and so we conclude that its fixed points represent two fibres on  $S^3$  separated by a distance of  $\pi/2$  and its circular orbits represent the nest of tori which partition the other fibres according to their distance from these two.

### 10. The hidden tori

We have shown that an arbitrary circle of angular radius  $\tau$  on  $S^2$  represents a torus of area  $2\pi^2 \sin \tau$  on  $S^3$ . This torus lies a distance  $\tau/2$  from one great circle and a distance  $\frac{\pi-\tau}{2}$  from another. There are two families of great circles on this torus and each member of the one family meets each member of the other family at an angle  $\tau$ . Either family can be incorporated as a subset of the fibres of a unique Hopf fibration of  $S^3$ . One point on each fibre of the actual torus can be obtained by applying the colatitude halving map to the representative circle.

A pencil of circles on  $S^2$  such as the plane sections

$$\sin \varphi_0 x'_2 + \cos \varphi_0 x'_3 = \cos \tau, \quad 0 \leq \tau \leq \pi$$

corresponds to a nest of tori on  $S^3$ , and we can locate these tori explicitly by applying the colatitude halving map

$$x'_1 = \sin \varphi \cos \theta \quad x_1 = \sin \frac{\varphi}{2} \cos \theta$$

$$x'_2 = \sin \varphi \sin \theta \rightarrow x_2 = \sin \frac{\varphi}{2} \sin \theta$$

$$x'_3 = \cos \varphi \quad x_3 = \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Since  $x'_2 = 2x_2x_3$  and  $x'_3 = 2x_3^2 - 1$ , the curves where the tori of this nest meet the northern hemisphere of  $S^2$  are its sections by the hyperbolic cylinders

$$2 \sin \varphi_0 x_2 x_3 + \cos \varphi_0 (2x_3^2 - 1) = \cos \tau$$

or equivalently

$$\left(x_3 + \frac{1}{2} \tan \varphi_0 x_2\right)^2 - \frac{1}{4} \tan^2 \varphi_0 x_2^2 = \frac{\cos \varphi_0 + \cos \tau}{2 \cos \varphi_0}.$$

We close by drawing attention to two features of this mapping illustrated in Figures 10.1 and 10.2. First, the points  $\tau=0$  and  $\tau=\pi$  map to the points

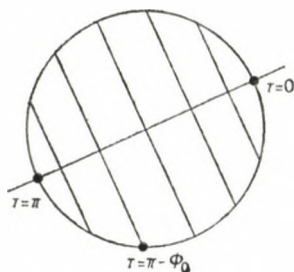


Fig. 10.1. Parallel plane sections give a pencil of circles on  $S^2$

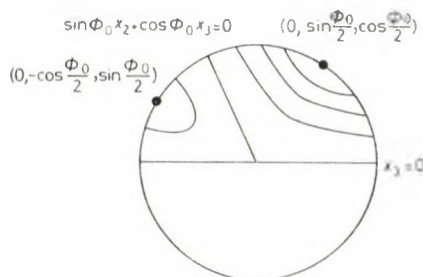


Fig. 10.2. The colatitude halving map carries the circles of Figure 10.1 into sections of  $S^2$  by hyperbolic cylinders. These curves locate hidden tori

$\left(0, \sin \frac{\varphi_0}{2}, \cos \frac{\varphi_0}{2}\right)$  and  $\left(0, -\cos \frac{\varphi_0}{2}, \sin \frac{\varphi_0}{2}\right)$  which are separated by a distance of  $\pi/2$  as expected. Second, the point  $(0, 0, -1)$  blows up into the circle in the plane  $x_3=0$  and the rest of the circle  $\tau=\pi-\varphi_0$  through  $(0, 0, -1)$  maps to the northern hemisphere semicircle in the plane

$$\sin \varphi_0 x_2 + \cos \varphi_0 x_3 = 0.$$

These two planes are just the asymptotes to our hyperbolic cylinders.

#### REFERENCES

- [1] COXETER, H. S. M., *Introduction to geometry*, Second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969. MR 49 # 11369.
- [2] HOPF, H., Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, *Math. Ann.* **104** (1931), 637–665. Zbl 1. 407.
- [3] MELZAK, Z. A., *Companion to concrete mathematics*, Mathematical techniques and various applications, Pure and applied mathematics, Vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1973. MR 57 # 2797.
- [4] MELZAK, Z. A., *Invitation to geometry*, Pure and Applied Mathematics, Wiley & Sons, New York, 1983. MR 84g: 51002.
- [5] REED, N., Peaucellier and the torus, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* **4** (1982), 87–91. MR 83f: 51011.
- [6] WHITEHEAD, J. H. C., Fifty years of homotopy theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* **8** (1983), 1–29.
- [7] WILKER, J. B., *Inversive geometry, The geometric vein*, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1981, 379–442. MR 83j: 51009.

(Received February 28, 1984)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
SCARBOROUGH COLLEGE  
UNIVERSITY OF TORONTO  
TORONTO, ONTARIO  
M1C 1A4  
CANADA



# THE MEASURES OF THE PROJECTIONS OF A CUBE

G. D. CHAKERIAN and P. FILLIMAN

*Dedicated with deep admiration and respect to Professor L. Fejes Tóth on the occasion of his 70th birthday*

## 1. Introduction

In  $n$ -dimensional Euclidean space  $E^n$ ,  $n \geq 3$ , let  $C^n$  be the standard unit cube, given by

$$C^n = \{(x_1, \dots, x_n): 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}.$$

Let  $L^k$  be any  $k$ -dimensional subspace, where  $1 \leq k \leq n-1$ , and let  $P$  be the orthogonal projection of  $C^n$  into  $L^k$ . We are interested in determining bounds on the measure of  $P$ . We can obtain a crude bound immediately by applying Bieberbach's inequality, which implies that of all convex bodies having a given diameter, the ball of that diameter has maximum volume. Since  $C^n$  has diameter  $\sqrt{n}$ , we see that  $P$  has diameter at most  $\sqrt{n}$ . Thus if we let  $v_k(P)$  denote the  $k$ -dimensional Lebesgue measure of  $P$  and  $\omega_k$  the  $k$ -dimensional measure of the  $k$ -dimensional unit ball, Bieberbach's inequality gives

$$(A) \quad v_k(P) \leq \omega_k \left( \frac{\sqrt{n}}{2} \right)^k.$$

The bound in (A) can be improved by a direct application of Urysohn's inequality (see [1, p. 109]). In Section 2 we shall show in fact that

$$(B) \quad v_k(P) \leq \frac{\omega_{k-1}}{\omega_k^{k-1}} \left( \frac{n}{k} \right)^{k/2}.$$

It turns out that in case  $k \geq 2$  this bound is better than that given in (A). Indeed, to show that the right-hand side of (B) is strictly less than the right-hand side of (A), it suffices to prove that  $\omega_{k-1}/\omega_k < \sqrt{k}/2$  when  $k \geq 2$ . Using the formula for the volume of the unit ball,

$$\omega_k = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)},$$

and applying the Legendre duplication formula for the Gamma function, one has

$$\frac{\omega_{k-1}}{\omega_k} = \frac{2^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)^2}{\pi k!}.$$



It follows that the required inequality is equivalent to

$$\Gamma\left(1+\frac{k}{2}\right)^2 < \frac{\pi(k!)\sqrt{k}}{2^{k+1}}, \quad k \geq 2.$$

This last inequality is easily established by induction, with a direct verification for  $k=2, 3$ , and checking that its validity for any  $k$  implies its validity for  $k+2$ .

It is easy to obtain a sharp bound on the  $(n-1)$ -dimensional measures of the orthogonal projections of  $C^n$  into  $(n-1)$ -dimensional subspaces  $L^{n-1}$ . Indeed, if  $\mathbf{u}=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  is a unit vector orthogonal to  $L^{n-1}$ , then a facet of  $C^n$  orthogonal to the  $i$ -th coordinate axis projects to an  $(n-1)$ -dimensional parallelotope in  $L^{n-1}$  with  $(n-1)$ -dimensional measure  $|\alpha_i|$ . Then the projection  $P$  has measure

$$v_{n-1}(P) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|.$$

From Cauchy's inequality we then obtain

$$v_{n-1}(P)^2 \leq n \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = n,$$

so we have the bound

$$v_{n-1}(P) \leq \sqrt{n}.$$

Equality is attained by a projection into a hyperplane orthogonal to the main diagonal of  $C^n$ . We give in Section 3 what amounts to a generalization of this argument to establish the result

$$(C) \quad 1 \leq v_k(P) \leq \sqrt{\binom{n}{k}},$$

where the lower bound is obviously best possible for all  $k$ , while the upper bound is best possible for  $k=1$  and  $k=n-1$ . For any fixed  $k$ , (C) gives a better upper bound than (B) for a finite set of values of  $n$  (including  $n=k+1$ ), but (B) is better for all sufficiently large  $n$  when  $k$  is fixed.

It is to be noted that the upper bounds in (A), (B), and (C), while not in general sharp, are asymptotically of the correct order of magnitude for fixed  $k$  as  $n \rightarrow \infty$ . Indeed, for fixed  $k$ , each of these bounds behaves, as a function of  $n$ , like a constant times  $n^{k/2}$ . To see that  $C^n$  has projections into  $k$ -dimensional subspaces whose  $k$ -dimensional measures behave like a constant times  $n^{k/2}$  with  $k$  fixed and  $n$  large,

suppose  $n > k$  and write  $n = a(k+1) + b$ , where  $a = \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$  and  $0 \leq b < k+1$ . For  $i=1, 2, \dots, k+1$ , let  $p_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$  be the vertex of  $C^n$  with coordinates

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i-1)a+1 \leq j \leq ia, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then  $p_1, \dots, p_{k+1}$  are the vertices of a regular  $k$ -simplex  $S$  of edglength  $\sqrt{2a}$ . But since  $p_1, \dots, p_{k+1}$  are among the vertices of  $C^n$ , the simplex  $S$  is contained in  $C^n$ . Consequently, the  $k$ -dimensional measure of the orthogonal projection of  $C^n$  into the linear hull of  $S$  is at least as large as  $v_k(S)$ . But since  $S$  has edglength  $\sqrt{2a}$ ,

we have  $v_k(S) = c_k a^{k/2}$ , where  $c_k$  depends only on  $k$ , so  $v_k(S)$  behaves asymptotically like a constant times  $n^{k/2}$  as  $n \rightarrow \infty$  with  $k$  fixed, since  $a = \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$ .

It is to be noted in this connection that Richard Beigel [personal communication] has established that  $C^n$  contains  $k$ -dimensional subsets of  $k$ -measure  $(n/k)^{k/2}$  but does not contain any  $k$ -dimensional subset of  $k$ -measure larger than  $(4n/k)^{k/2}$ , assuming  $n \geq 2k$ .

In Section 4 we shall establish the sharp bound

$$(D) \quad v_k(P) \leq \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) \quad \text{if } k=2 \text{ or } k=n-2.$$

The authors are indebted to Larry Zalcman and David Scheim for directing their attention to the problem and to Michael Kallay for several stimulating conversations about the problem. In particular the crucial observation that the problem is symmetric in  $k$  and  $n-k$  (see Section 3) was made by Kallay.

## 2. Proof of (B)

Rather than consider projections of the fixed  $C^n$  into variable subspaces  $L^k$ , it will be more convenient for our purposes to let a unit cube vary with one vertex at the origin and consider its projections into a fixed coordinate  $k$ -plane. To this end, let  $u_1, \dots, u_n$  be an orthonormal set in  $E^n$ . Then  $u_1, \dots, u_n$  generate a unit cube  $C$  given by

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, n \right\}.$$

If for  $x \in E^n$  we let  $[x]$  be the line segment with endpoints at  $x$  and the origin, that is,  $[x] = \{\lambda x : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ , then we have

$$C = \sum_{i=1}^n [u_i],$$

the Minkowski sum of  $n$  mutually orthogonal line segments of unit length.

Let  $L^k$  be the subspace of  $E^n$  given by

$$(2.1) \quad L^k = \{(x_1, \dots, x_n) : x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0\}.$$

Let  $a_i$  be the orthogonal projection of  $u_i$  into  $L^k$ , so if  $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{in})$ , then  $a_i = (u_{i1}, \dots, u_{ik}, 0, \dots, 0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Then the orthogonal projection of  $C$  into  $L^k$ , which we shall denote by  $P$ , is given by

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, n \right\}.$$

For the purposes of calculating the  $k$ -dimensional volume of  $P$ , we now identify  $L^k$  with  $E^k$  by disregarding the last  $n-k$  coordinates. Then  $a_i$  may be viewed as the point in  $E^k$  given by  $a_i = (u_{i1}, \dots, u_{ik})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , and  $P$  is the zonotope in  $E^k$

given by the Minkowski sum of the  $n$  line segments  $[\mathbf{a}_1], \dots, [\mathbf{a}_n]$ , that is,

$$(2.2) \quad P = \sum_{i=1}^n [\mathbf{a}_i].$$

Since the matrix  $(u_{\alpha\beta})$  whose rows are  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  is an orthogonal matrix, its columns are unit vectors. Hence, letting  $\|\mathbf{a}_i\|$  denote the norm of  $\mathbf{a}_i$ , we have

$$\sum_{i=1}^n \|\mathbf{a}_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^k u_{ij}^2 \right\} = \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{i=1}^n u_{ij}^2 \right\} = \sum_{j=1}^k 1 = k.$$

Let  $l_i = \|\mathbf{a}_i\|$ . Then  $l_i$  is the length of the line segment  $[\mathbf{a}_i]$ , and the preceding tells us that the zonotope  $P$  is a sum of line segments whose lengths satisfy

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^n l_i^2 = k.$$

Associated with a convex body  $K$  in  $E^k$  we have the Quermassintegral  $W_{k-1}(K)$ , which is proportional to the mean width of  $K$ . Since  $W_{k-1}$  is additive under Minkowski addition (see [4, p. 213]) we have from (2.2)

$$(2.4) \quad W_{k-1}(P) = \sum_{i=1}^n W_{k-1}([\mathbf{a}_i]).$$

But for any line segment  $\sigma$  of length  $l$  in  $E^k$  the relations in [4, p. 215] give

$$W_{k-1}(\sigma) = \frac{\omega_{k-1}}{k} l.$$

Thus (2.4) yields

$$(2.5) \quad W_{k-1}(P) = \frac{\omega_{k-1}}{k} \sum_{i=1}^n l_i.$$

Applying Cauchy's inequality to (2.5) and using (2.3), we have

$$(2.6) \quad W_{k-1}(P) \leq \frac{\omega_{k-1}}{k} \sqrt{n \left( \sum_{i=1}^n l_i^2 \right)^{1/2}} = \omega_{k-1} \sqrt{\frac{n}{k}}.$$

The Urysohn inequality in  $E^k$  (see [1, p. 109], or [4, p. 278] for a generalization) implies that

$$W_{k-1}^k(P) \geq \omega_k^{k-1} v_k(P).$$

Using this in (2.6) gives

$$v_k(P) \leq \frac{W_{k-1}^k(P)}{\omega_k^{k-1}} \leq \frac{\omega_{k-1}^k}{\omega_k^{k-1}} \left( \frac{n}{k} \right)^{k/2},$$

which is the required inequality (B).

### 3. Proof of (C)

We use the same formulation of the problem as in Section 2. From the representation (2.2) for the projection  $P$  it is possible to show that  $P$  is dissectable into  $\binom{n}{k}$  parallelotopes  $P_i$ , each  $P_i$  being a translate of a sum of the form

$$(3.1) \quad [\mathbf{a}_{i_1}] + \dots + [\mathbf{a}_{i_k}],$$

with  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  (see [6] for this dissection and the volume formula (3.2) that follows). Some of the  $P_i$  might be degenerate, with zero  $k$ -dimensional volume. In any case, we have  $v_k(P) = \sum v_k(P_i)$ . Now let  $[\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}]$  denote the determinant whose rows are  $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}$ . Then if  $P_i$  is a sum of the form (3.1), we have  $v_k(P_i) = |[\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}]|$ . Thus

$$(3.2) \quad v_k(P) = \sum_{i=1}^N |D_i|,$$

where the  $N = \binom{n}{k}$  and the  $D_i$  are the  $N$  determinants  $[\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}]$  obtained as  $\{i_1, \dots, i_k\}$  ranges over the  $k$ -membered subsets of  $\{1, \dots, n\}$ .

The determinants  $D_i$  are obtained by fixing the first  $k$  columns of the orthogonal matrix  $(u_{\alpha\beta})$  and forming all the  $k \times k$  subdeterminants of the resulting  $n \times k$  matrix. For each such  $D_i$ , let  $D'_i$  be the algebraic complement of  $D_i$ , that is, the  $(n-k) \times (n-k)$  subdeterminant formed from the entries of  $(u_{\alpha\beta})$  that remain after striking out the rows and columns used to form  $D_i$ , multiplied by an appropriate sign depending on the choice of the rows and columns (see [5, p. 32]). Then the Laplace expansion theorem for the determinant (see [5, p. 34]) gives

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^N D_i D'_i = \det(u_{\alpha\beta}).$$

Furthermore (see [5, p. 148]), for an orthogonal matrix  $(u_{\alpha\beta})$  one has

$$(3.4) \quad D'_i = D_i \det(u_{\alpha\beta}), \quad i = 1, \dots, N.$$

In conjunction with (3.3) this yields

$$(3.5) \quad \sum_{i=1}^N D_i^2 = 1.$$

It might be noted here that the property (3.5) of orthogonal matrices has the following geometric interpretation. Let  $A$  be an  $n \times k$  matrix whose rows are  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ . Let  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  be the columns of  $A$ . We may view  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  as vectors in  $E^n$ , and there they span a  $k$ -dimensional parallelotope  $\tilde{P}$ . Then each  $|D_i|$  is the  $k$ -dimensional measure of the orthogonal projection of  $\tilde{P}$  into one of the  $k$ -dimensional coordinate planes of  $E^n$ . We then have

$$v_k(\tilde{P})^2 = \sum_{i=1}^N D_i^2.$$

In our particular case,  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  are orthonormal vectors, so  $v_k(\tilde{P}) = 1$ , giving (3.5).

The bounds in (C) now follow directly from (3.2) and (3.5). If we apply Cauchy's inequality to (3.2) and use (3.5) we have

$$(3.6) \quad v_k(P)^2 \leq N \sum_{i=1}^N D_i^2 = N = \binom{n}{k},$$

giving the required upper bound in (C).

It is evident that this bound is sharp for  $k=1$ , since the orthogonal projection of a unit  $n$ -cube into its principal diagonal has length  $\sqrt{n}$ .

We now observe that our problem is symmetric in  $k$  and  $n-k$ . Indeed, let  $L=L^k$  be the coordinate plane (2.1) and let  $L'$  be the complementary  $(n-k)$ -dimensional coordinate plane given by

$$L' = \{(x_1, \dots, x_n): x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0\}.$$

Let  $P$  be the orthogonal projection of our unit cube  $C$  into  $L$  and  $P'$  the orthogonal projection of  $C$  into  $L'$ . Then we have, using (3.2) and (3.4),

$$(3.7) \quad v_{n-k}(P') = \sum_{i=1}^N |D'_i| = \sum_{i=1}^N |D_i| = v_k(P).$$

Thus the  $k$ -dimensional measure of the orthogonal projection of an  $n$ -cube into a  $k$ -dimensional subspace  $L$  is equal to the  $(n-k)$ -dimensional measure of its projection into the orthogonal complement of  $L$ . Consequently, the problem of maximizing  $k$ -dimensional projections of the cube is equivalent to that of maximizing  $(n-k)$ -dimensional projections.

It follows that the orthogonal projection of a unit  $n$ -cube into the  $(n-1)$ -dimensional subspace perpendicular to its principal diagonal achieves the maximum possible  $(n-1)$ -dimensional measure of  $\sqrt{n}$ . Thus the upper bound in (C) is also sharp if  $k=n-1$ .

The lower bound in (C) can be obtained by squaring (3.2) and invoking (3.5):

$$v_k(P)^2 = \sum D_i^2 + 2 \sum \sum |D_i| |D_j| = 1 + 2 \sum \sum |D_i| |D_j| \geq 1.$$

Observe that equality holds precisely when some  $|D_i|=1$  and the others are 0, corresponding to orthogonal projection into a  $k$ -flat determined by a  $k$ -face of the cube.

#### 4. Proof of (D)

Because of the symmetry of the problem in  $k$  and  $n-k$  (see Section 3), it suffices to show only that

$$(4.1) \quad v_2(P) \leq \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

This will follow from the isoperimetric inequality for  $2n$ -gons in  $E^2$ .

We begin by observing that  $P$  is a convex polygon which is the sum of  $n$  line segments as in (2.2), where the lengths  $l_i$  of the generating segments satisfy

$$(4.2) \quad \sum_{i=1}^n l_i^2 = 2,$$



from (2.3). If we let  $L$  denote the perimeter of  $P$ , we have what amounts to the case  $k=2$  of (2.4), namely

$$(4.3) \quad L = 2 \sum_{i=1}^n l_i.$$

The Cauchy inequality, in conjunction with (4.2), then gives

$$(4.4) \quad L^2 = 4 \left( \sum_{i=1}^n l_i \right)^2 \leq 4n \sum_{i=1}^n l_i^2 = 8n.$$

The isoperimetric inequality for  $m$ -gons in  $E^2$  (see [3, p. 159]) tells us that for any  $m$ -gon of area  $A$  and perimeter  $L$  we have

$$(4.5) \quad 4m \left( \tan \frac{\pi}{m} \right) A \leq L^2.$$

The required inequality (4.1) now results when we combine (4.5), with  $m=2n$  and  $A=v_2(P)$ , with (4.4).

Since equality holds in (4.4) if and only if  $l_1=l_2=\dots=l_n=\sqrt{(2/n)}$ , and in (4.5) if and only if  $P$  is a regular  $2n$ -gon, to show that the bound in (4.1) is sharp it suffices to exhibit a projection  $P$  of  $C$  which is a regular  $2n$ -gon with edglength  $\sqrt{(2/n)}$ . Such a projection (described in a similar fashion in [2]) is obtained as follows.

Let  $z_1, \dots, z_n$  be the complex numbers given by

$$(4.6) \quad z_k = \sqrt{\frac{2}{n}} e^{((k-1)\pi i)/n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Writing  $z_k = x_k + iy_k$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , we have

$$(4.7) \quad \sum x_k^2 - \sum y_k^2 + 2i \sum x_k y_k = \sum z_k^2 = \frac{2}{n} \sum e^{(2\pi i(k-1))/n} = 0,$$

where the sums are over  $1 \leq k \leq n$ . We also have

$$(4.8) \quad \sum x_k^2 + \sum y_k^2 = \sum |z_k|^2 = n \cdot \frac{2}{n} = 2.$$

It follows from (4.7) and (4.8) that

$$(4.9) \quad \sum x_k^2 = \sum y_k^2 = 1 \quad \text{and} \quad \sum x_k y_k = 0.$$

In other words  $\mathbf{v}_1 = (x_1, \dots, x_n)$  and  $\mathbf{v}_2 = (y_1, \dots, y_n)$  are orthogonal unit vectors in  $E^n$ . Thus we may choose vectors  $\mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n$  such that  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  is an orthonormal set. Let  $V$  be the orthogonal matrix whose *columns* are  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ . Let  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  be the *rows* of  $V$ , and  $C$  the cube generated by  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  as in Section 2. Then the orthogonal projection of  $C$  into the coordinate plane  $L^2$  (given by (2.1) with  $k=2$ ) is the polygon  $P$  generated by line segments  $[\mathbf{a}_1], \dots, [\mathbf{a}_n]$  as in (2.2). But our construction was such that  $\mathbf{u}_k$  projects to  $\mathbf{a}_k = z_k$ ,  $k=1, \dots, n$ , and it is easy to check that in this case  $P$  is a regular  $2n$ -gon of edglength  $\sqrt{(2/n)}$ , as we wanted.

Since the preparation of this article, there has appeared a paper by Peter McMullen, Volumes of projections of unit cubes, *Bull. London Math. Soc.* **16** (1984), 278—280, in which he gives a proof of the equality of the measures of the cube projections into complementary subspaces which we obtain in our Section 3.

## REFERENCES

- [1] BONNESEN, T. and FENCHEL, W., *Theorie der konvexen Körper*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 3, Heft 1, Springer, Berlin, 1934. *Zbl* **8**. 077.
- [2] COXETER, H. S. M., *Regular polytopes*, Third edition, Dover Publications, Inc., New York, 1973. *MR* **51** # 6554.
- [3] FEJES TÓTH, L., *Regular figures*, Pergamon Press, London, 1964. *MR* **29** # 2705.
- [4] HADWIGER, H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 93, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1957. *MR* **21** # 1561.
- [5] KOWALEWSKI, G., *Einführung in die Determinantentheorie einschliesslich der Fredholmschen Determinanten*, 4te Auflage, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1954. *MR* **16**—210.
- [6] SHEPHARD, G. C., Combinatorial properties of associated zonotopes, *Canad. J. Math.* **26** (1974), 302—321. *MR* **50** # 14496.

(Received April 13, 1984)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
UNIVERSITY OF CALIFORNIA  
DAVIS, CA 95616  
U.S.A.

# ZUR LÖSUNG DES GALLAISCHEN PROBLEMS ÜBER KREISSCHEIBEN IN DER EUKLIDISCHEN EBENE

L. DANZER

*Meinem verehrten Freund und Lehrer László Fejes Tóth zum 70. Geburtstag*

## Summary

An old problem of T. Gallai is as follows: Given a family  $\mathcal{F}$  of circular discs  $K_v$  in the euclidean plane, *every* two of which meet. How many needles does one need in order to pierce all members of  $\mathcal{F}$ ? In the sequel it is shown, that four needles will always do, while in some cases three are not enough. In fact more is shown: Even on the 2-sphere four needles are enough and they can be found by a construction that is completely invariant under Möbius-transformations. Strictly speaking the proof of Theorem 1 is reduced to two inequalities (A) and (B). While (B) is proved rigorously, (A) has only been established by numerical computations.

## 1. Einleitung

Gegeben sei eine Familie  $\mathcal{F}$  von Kreisscheiben in der euklidischen Ebene  $\mathbb{E}^2$  mit der Eigenschaft, daß je zwei Mitglieder von  $\mathcal{F}$  sich treffen. Wie L. Fejes-Tóth in seinem Buch ([2], p. 97) berichtet, hat T. Gallai vermutet, daß es eine von  $\mathcal{F}$  unabhängige natürliche Zahl  $n$  gibt, derart daß „ $\mathcal{F}$  mit  $n$  Nadeln durchstochen werden kann“; mit anderen Worten: Zu jeder solchen Familie  $\mathcal{F}$  soll es eine  $n$ -punktige Menge  $P$  geben, derart daß  $K_v \cap P$  für jedes Mitglied  $K_v$  von  $\mathcal{F}$  nichtleer wird.

Um das Gallaische Problem in einen etwas allgemeineren Zusammenhang zu stellen (cf. [8] Section 4, vor allem 4.12, [7], bzw. [7a] und Abschnitt 8 der vorliegenden Arbeit), definieren wir für jedes natürliche  $k$

$\Pi_k$  als die Klasse aller Familien  $\mathcal{F}$  mit der Eigenschaft, daß der Durchschnitt von je  $k$  Mitgliedern von  $\mathcal{F}$  nichtleer ist, und

$\Pi^n$  als die Klasse aller Familien  $\mathcal{F}$ , die mit  $n$  Punkten *erfaßbar* sind.  $\mathcal{F}$  liegt also in  $\Pi^n$  genau dann, wenn  $\mathcal{F}$  mit  $n$  Teilfamilien  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$  derart überdeckbar ist, daß für jedes  $v$  der Durchschnitt aller Mitglieder von  $\mathcal{G}_v$  nichtleer ist.

Ferner bezeichnen wir für  $k, d$  aus  $\mathbb{N}$  mit

$\gamma_k^d$  die kleinste natürliche Zahl  $n$ , für die gilt: Ist  $\mathcal{F}$  eine Familie von Kugeln<sup>1</sup> im euklidischen Raum  $\mathbb{E}^d$  und ist  $\mathcal{F}$  aus  $\Pi_k$ , so ist  $\mathcal{F}$  auch aus  $\Pi^n$ .

<sup>1</sup> Gemeint sind stets *abgeschlossene* Kugeln (bzw. Kreisscheiben); der Radius Null ist zugelassen.

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52—XX; Secondary 52A35, 51F99.

*Key words and phrases*. Gallai-type problems, intersection properties of convex sets, intersection properties of circular discs on the 2-sphere, discrete geometry in euclidean space.

Die folgenden Aussagen sind trivial:  $\gamma_1^d = \infty$ ; aus  $k \leq m$  folgt  $\gamma_k^d \geq \gamma_m^d$ ;  $\gamma_{d+1}^d = 1$  (das letztere wegen des Satzes von Helly (cf. [1], [8])).

Das ursprüngliche Problem von Gallai — und das Hauptziel dieser Arbeit — besteht also in der Bestimmung von  $\gamma_2^2$ .

Betrachtet man statt des  $E^d$  die euklidische Sphäre  $S^d$  und versteht man unter einer *Kugel* auf der  $S^d$  jeden nichtleeren Durchschnitt der  $S^d$  mit einem Halbraum des  $E^{d+1}$ , so kann man analog zu den  $\gamma_k^d$  die Stichzahlen  $\hat{\gamma}_k^d$  definieren. Die stereographische Projektion zeigt sofort, daß  $\gamma_k^d \leq \hat{\gamma}_k^d \leq \gamma_k^d + 1$  ist (der Summand 1 repräsentiert alle diejenigen Kugeln aus  $\mathcal{K}$ , welche das Projektionszentrum enthalten, also auf das *Äußere* einer  $(d-1)$ -Sphäre abgebildet werden<sup>2</sup>). Das wichtigste Ergebnis dieser Arbeit (Satz 1) ist die Ungleichung

$$(1) \quad \hat{\gamma}_2^2 \leq 4;$$

zusammen mit  $\gamma_2^2 \geq 4$  (Satz 2) ergibt sich damit als Antwort auf die Frage von Gallai

$$(2) \quad \gamma_2^2 = \hat{\gamma}_2^2 = 4.$$

Es liegt nahe, den Beweis von (1) so zu führen, daß er gegenüber allen Kreisverwandtschaften invariant ist.

Dies setzt einige Begriffsbildungen voraus, deren Studium der erste Teil von Abschnitt 2 gewidmet ist. Erst damit können die Ergebnisse exakt formuliert werden. In Abschnitt 4 wird der Beweis von (1) auf zwei Ungleichungen (A) und (B) zurückgeführt. Während sich (B) auf eine Ungleichung in einer Variablen zurückführen läßt (der Beweis wird in Abschnitt 6 gegeben), bezieht sich (A) auf das Verhalten einer Funktion  $g$  zweier Variablen in einem kompakten Bereich  $D$ . In Abschnitt 5 werden  $D$  und  $g$  näher untersucht, doch bleibt es derzeit bei numerischen Bestätigungen von (A). Die Arbeit schließt mit dem Beweis von  $\gamma_2^2 \geq 4$  (Satz 2) im siebten und ergänzenden Bemerkungen im achten Abschnitt.

## 2. Die Sätze

Bevor wir die Ergebnisse dieser Arbeit exakt formulieren können, benötigen wir einige Definitionen und Hilfssätze. Sie sind invariant gegenüber allen Kreisverwandtschaften (einschließlich der Spiegelungen), wie auch gegenüber der stereographischen Projektion beziehungsweise ihrer Inversen. Wir formulieren sie der Einfachheit halber in der Sprache der euklidischen Ebene  $E^2$ , die durch *einen* Punkt  $\infty$  zu  $\overline{E}^2$  kompaktifiziert sei. Eine *Kreisscheibe* sei demgemäß das Innere *oder* das Äußere eines Kreises<sup>3</sup>. Der Rand einer Kreisscheibe  $K^\nu$  wird stets mit  $C^\nu$  bezeichnet, ihr Mittelpunkt mit  $m^\nu$ , ihr Radius mit  $q^\nu$ .

**DEFINITION 1** (Doppelverhältnis). Es seien  $K^1$  und  $K^2$  zwei einander fremde Kreisscheiben,  $N$  ein zu  $C^1$  und  $C^2$  orthogonaler Kreis.  $N$  schneide  $C^1$  in  $a$  und  $b$ , sowie  $C^2$  in  $c$  und  $d$ ; falls weder  $K^1$  noch  $K^2$  einpunktig ist, trenne das Paar  $\{a, c\}$

<sup>2</sup> Besitzt eine Familie die Eigenschaft  $\Pi_k$  bzw.  $\Pi^n$ , so besitzt ihr Bild unter dieser bijektiven Projektion von  $S^d$  auf  $E^d$  natürlich dieselbe Eigenschaft.

<sup>3</sup> Geraden zählen in diesem Kontext natürlich als Kreise und Halbebenen als Kreisscheiben.

auf  $N$  das Paar  $\{b, d\}$ . Schließlich sei  $G$  eine beliebige Gerade,  $z$  ein nicht auf  $G$  liegender Punkt von  $N$  und seien  $a', b', c', d'$  die Bilder von  $a, b, c, d$  bei Projektion aus dem Zentrum  $z$  auf  $G$ . Dann sei

$$DV(C^1, C^2) := DV(K^1, K^2) := \frac{a' - d'}{a' - c'} : \frac{b' - d'}{b' - c'}.$$

Bekanntlich ist dieses Doppelverhältnis unabhängig von der Wahl von  $N, G$  und  $z$ . Die folgenden Aussagen setzen wir als bekannt voraus.

HILFSSATZ 1. a) Ist  $K^1 \cap K^2 = \emptyset$ , so ist

$$0 < DV(K^1, K^2) = DV(K^2, K^1) \leq 1.$$

b) Das Doppelverhältnis ist genau dann gleich eins, wenn mindestens eine der beiden Kreisscheiben einpunktig ist.

c) Ist  $\hat{K}^1 \not\subseteq K^1$  und auch noch  $\hat{K}^1 \cap K^2 = \emptyset$ , so ist

$$DV(\hat{K}^1, K^2) < DV(K^1, K^2).$$

d) Im Grenzfall  $C^1 = C^2$  wird das Doppelverhältnis gleich Null.

DEFINITION 2. Drei Kreisscheiben haben die Eigenschaft  $\mathcal{A}$  genau dann, wenn ihr Durchschnitt leer ist, aber je zwei von ihnen sich treffen.

Bekanntlich gilt der

HILFSSATZ 2. Besitzen  $K^1, K^2, K^3$  die Eigenschaft  $\mathcal{A}$ , so gibt es genau einen gemeinsamen Orthogonalkreis  $N$  zu  $K^1, K^2, K^3$  und genau zwei Kreisscheiben  $K_1^b$  und  $K_2^b$ , deren jede  $K^1, K^2$  und  $K^3$  berührt;  $K_1^b$  und  $K_2^b$  sind Spiegelbilder bezüglich  $N$  und treffen  $N$  nicht.

DEFINITION 3 (Funktion  $f$ ). Besitzen die drei Kreisscheiben  $K^1, K^2, K^3$  die Eigenschaft  $\mathcal{A}$ , berührt  $K^b$  alle drei und ist  $N$  der gemeinsame Orthogonalkreis zu  $K^1, K^2, K^3$ , so sei

$$f(K^1, K^2, K^3) := DV(N, K^b);$$

anderenfalls sei  $f(K^1, K^2, K^3) = 1$ .

Offensichtlich ist  $f$  symmetrisch in allen drei Variablen. Ist  $\{K^1, K^2, K^3\}$  aus  $\Pi_2$ , so ist  $f$  also genau dann gleich eins, wenn sogar der Durchschnitt aller drei Kreisscheiben nichtleer ist. Dies ist wegen des Satzes von Helly (cf. Fall 1 im Beweis von Corollar 1) für unser Problem der einfachste Fall. Je kleiner der Wert von  $f$  ist, desto weiter ist das Tripel  $\{K^1, K^2, K^3\}$  davon entfernt.

Wir werden, weil die Voraussetzung  $\mathcal{F} \in \Pi_2$  kaum voll auszunützen ist, die entscheidende Ungleichung (1) dadurch beweisen, daß wir zunächst aus  $\mathcal{F}$  ein „schwierigstes“ Tripel  $\mathcal{F}_0$  auswählen, allein aus ihm kanonisch vier Punkte  $p_1$  bis  $p_4$  konstruieren und dann zeigen, daß diese Punkte jede Kreisscheibe erfassen, die einzeln zu  $\mathcal{F}_0$  adjungiert erstens noch eine Familie aus  $\Pi_2$  bildet und zweitens mit keinen zwei Mitgliedern von  $\mathcal{F}_0$  ein „schwierigeres“ Tripel als  $\mathcal{F}_0$  ergibt. Genauer benötigen wir noch die

DEFINITION 4. Es seien  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  zwei Familien von Kreisscheiben und  $\mathcal{F}$  aus  $\Pi_2$ .  $\mathcal{G}$  heiße zu  $\mathcal{F}$  adjungierbar genau dann, wenn auch  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} \in \Pi_2$  gilt.

Natürlich ist jede Teilfamilie von  $\mathcal{F}$  zu  $\mathcal{F}$  adjungierbar.

SATZ 1.  $\mathcal{F}_0 := \{K_1, K_2, K_3\}$  sei eine Familie von Kreisscheiben auf der euklidischen 2-Sphäre mit der Eigenschaft  $\mathcal{A}$ .  $C_4$  sei der gemeinsame Orthogonalkreis zu  $K_1, K_2, K_3$  und  $K_4$  eine der beiden Kreisscheiben mit  $C_4 = \partial K_4$ . Dann lassen sich aus  $K_1$  bis  $K_4$  in eindeutiger und gegenüber Kreisverwandtschaften invarianter Weise vier Punkte  $p_1$  bis  $p_4$  konstruieren, für die gilt:

Ist  $K_5$  eine zu  $\mathcal{F}_0 \cup \{K_4\}$  adjungierbare Kreisscheibe, und nimmt die Funktion  $f$  aus Definition 3 für keine drei der Kreisscheiben  $K_1$  bis  $K_5$  einen kleineren Wert als  $f(K_1, K_2, K_3)$  an, so enthält  $K_5$  einen der Punkte  $p_1$  bis  $p_4$ .

COROLLAR 1. Ist  $\mathcal{F}$  eine Familie von Kreisscheiben auf der euklidischen 2-Sphäre und ist  $\mathcal{F}$  aus  $\Pi_2$ , so ist  $\mathcal{F}$  aus  $\Pi^4$ . Das heißt, es gilt

$$(1) \quad \tilde{\gamma}_2^2 \leq 4.$$

COROLLAR 2. Ist  $\mathcal{F}$  eine Familie von Kreisscheiben in  $E^2$  mit  $\mathcal{F} \in \Pi_2$ , so folgt  $\mathcal{F} \in \Pi^4$ ; das heißt, es ist

$$\gamma_2^2 \leq 4.$$

SATZ 2. In der euklidischen Ebene  $E^2$  gibt es

a) eine Familie  $\mathcal{F}_6$ , bestehend aus sechs Kreisscheiben mit

$$\mathcal{F}_6 \in \Pi_2 \setminus \Pi^2,$$

b) eine  $\mathcal{F}_6$  umfassende Familie  $\mathcal{F}_{10}$  aus zehn Kreisscheiben mit

$$\mathcal{F}_{10} \in \Pi_2 \setminus \Pi^3.$$

Die Radien aller Kreisscheiben liegen zwischen 1 und 6,5.

Demnach ist

$$\gamma_2^2 \leq 4.$$

Hieraus und aus (1) ergibt sich nun (wegen  $\gamma_k^d \leq \tilde{\gamma}_k^d$ )

$$(2) \quad \gamma_2^2 = \tilde{\gamma}_2^2 = 4.$$

Wir werden Satz 1 in den Abschnitten 3 bis 6 und Satz 2 in Abschnitt 7 beweisen. Daß das zweite aus dem ersten Corollar folgt, ist, wie schon oben erwähnt, eine direkte Folge der stereographischen Projektion. brig bleibt damit nur der

BEWEIS des Corollars 1 aus Satz 1:

Fall 1. Es ist  $\mathcal{F}$  aus  $\Pi_3$ .

Dann sei  $\mathcal{F}'$  die Teilfamilie derjenigen Mitglieder von  $\mathcal{F}$ , die einen gewissen festen Punkt  $z_1$  nicht enthalten. Die stereographische Projektion aus dem Zentrum  $z_1$  bildet  $\mathcal{F}'$  auf eine Familie (konvexer) Kreisscheiben in  $E^2$  ab. Auf diese ist der Satz von Helly anwendbar; also ist  $\mathcal{F}'$  mit einem Punkt  $z_2$  und folglich  $\mathcal{F}$  mit zwei Punkten erfassbar.



Fall 2. Es ist  $\mathcal{F}$  aus  $\Pi_2 \setminus \Pi_2$ .

Dann folgt zunächst, daß in  $\mathcal{F}$  keine Kreisscheibe vom Radius Null liegt; vielmehr enthält  $\mathcal{F}$  dann drei Kreisscheiben  $K^1, K^2, K^3$  mit der Eigenschaft  $\mathcal{A}$ . Also ist nach Hilfssatz 1 ab

$$(3) \quad 0 < f(K^1, K^2, K^3) < 1.$$

Nun sei  $\mathcal{G}$  die Familie aller zu  $\mathcal{F}$  adjungierbaren Kreisscheiben. Weil die 2-Sphäre kompakt und  $f$  stetig ist, nimmt  $f$  auf den Tripeln aus  $\mathcal{G}$  sein Minimum  $\varphi$  an, etwa

$$\varphi =: f(K_1, K_2, K_3) \quad (K_1, K_2, K_3 \in \mathcal{G}).$$

Wegen (3) ist  $\varphi < 1$ , also hat (cf. Definition 3)  $\mathcal{F}_0 := \{K_1, K_2, K_3\}$  die Eigenschaft  $\mathcal{A}$ , und wir haben  $\mathcal{F}_0 \in \Pi_2$ . Nun sei  $C_4$  der gemeinsame Orthogonalkreis zu  $\mathcal{F}_0$ , sowie  $K_4$  und  $K'_4$  die beiden von  $C_4$  berandeten Kreisscheiben. O. B. d. A. dürfen wir  $K_4 \in \mathcal{G}$  annehmen, denn anderenfalls gäbe es ein  $K$  aus  $\mathcal{F}$  mit  $K \cap K_4 = \emptyset$ , also  $K \subset K'_4$ , woraus wegen  $\mathcal{F} \in \Pi_2$  sofort  $K'_4 \in \mathcal{G}$  folgte.

Auf  $\mathcal{F}_0$  und  $K_4$  ist also Satz 1 anwendbar, so daß nur noch zu zeigen bleibt: Ist  $K$  aus  $\mathcal{F}$ , so erfüllt  $K$  die in Satz 1 über  $K_5$  gemachten Voraussetzungen.

Tatsächlich trifft  $K$  jede der Kreisscheiben  $K_1$  bis  $K_4$ , denn diese sind alle in  $\mathcal{G}$ . Wegen  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  ist auch  $K$  aus  $\mathcal{G}$ , also kann  $f$  auf  $\{K_1, \dots, K_4, K\}^3$  keinen kleineren Wert als  $\varphi$  annehmen.

### 3. Hilfssätze über die Funktion $f$

Wir wollen den Beweis des Satzes 1 durch einige Hilfssätze entlasten, deren Bedeutung freilich erst anläßlich ihrer Anwendung in Abschnitt 4 ganz deutlich werden wird.

**HILFSSATZ 3.** *Besitzen die Tripel  $\{K^1, K^2, K^3\}$  und  $\{K^1, K^2, \tilde{K}^3\}$  beide die Eigenschaft  $\mathcal{A}$ , und ist  $\tilde{K}^3 \subsetneq K^3$ , so ist*

$$f(K^1, K^2, \tilde{K}^3) < f(K^1, K^2, K^3).$$

**BEWEIS.** Es sei  $K^b$  die eine gemeinsame Berührkreisscheibe,  $N$  der Orthogonalkreis zu  $K^1, K^2, K^3$ ; entsprechend  $\tilde{K}^b$  und  $\tilde{N}$  zu  $K^1, K^2, \tilde{K}^3$ . Wegen der Eigenschaft  $\mathcal{A}$  liegt  $\tilde{K}^b$  ganz in dem einen (Kreisbogen-) Dreieck  $\tilde{\Delta}$ , das  $K^1, K^2, \tilde{K}^3$  freilassen (cf. Fig. 1). Nach Voraussetzung ist das entsprechende Dreieck  $\Delta$  Teilmenge von  $\tilde{\Delta}$ , so daß wir  $K^b \subset \tilde{\Delta}$  annehmen dürfen.

Fall 1. Es ist  $\tilde{K}^b = K^b$ .

Dann wird  $K^b$  von  $K^3$  und von  $\tilde{K}^3$  im selben Punkt  $p$  berührt. Wir dürfen o. B. d. A. annehmen, wir seien in  $E^2$  und  $K^b$  sei konvex und konzentrisch zu  $N$ . Es sei  $o$  der gemeinsame Mittelpunkt und  $L$  die Gerade durch  $o$  und  $p$ . Die zu  $L$  und  $N$  senkrechten Kreise bilden ein elliptisches Büschel, und weil  $C^3$  diesem angehört, folgt  $\alpha > \pi/2$ . Auch die zu  $C^1$  und  $C^2$  senkrechten Kreise bilden ein elliptisches Büschel, und ihre Mittelpunkte liegen auf der Potenzgeraden  $G$  durch  $o, s_1, s_2$ .



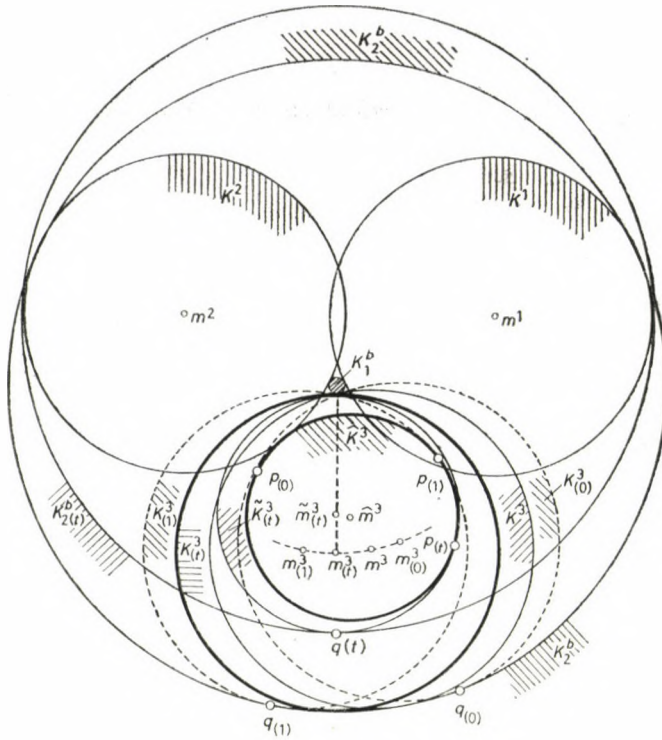


Fig. 2

$$\begin{aligned}
 f(K^1, K^2, K^3) &= f(K^1, K^2, K^3(t_0)) && \text{(denn } K_1^b \text{ und } K_2^b \text{ berühren alle vier Kreisscheiben, also besitzen beide Tripel denselben Orthogonalkreis)} \\
 &> f(K^1, K^2, \bar{K}^3(t_0)) && \text{(nach Fall 1, cf. (4))} \\
 &> f(K^1, K^2, \bar{K}^3) && \text{(nach Fall 1 mit } K_2^b \text{ in der Rolle von } K^b, \text{ cf. (5)), w.z.b.w.}
 \end{aligned}$$

**HILFSSATZ 4.** Es seien  $K^1$  bis  $K^5$  fünf Kreisscheiben in folgender Lage (cf. Fig. 3):  $C^2$  und  $C^3$  schneiden sich in zwei Punkten  $s$  und  $t$  mit  $s \in K^1$ ,  $t \notin K^1$ ;  $K^4$  und  $K^5$  liegen beide in  $K^1$  und berühren sowohl  $K^2$  wie auch  $K^3$ . Endlich sei derjenige Kreis  $N$  durch  $s$  und  $t$ , der auf  $K^4$  senkrecht steht, auch orthogonal zu  $K^1$  (die Spiegelung an  $N$  vertauscht also  $K^2$  mit  $K^3$  und läßt  $K^1$ ,  $K^4$  und  $K^5$  fest). Liegt dann  $K^4$  (in  $K^1$ ) näher an  $s$  als  $K^5$ , so ist

$$DV(C^1, K^5) < DV(C^1, K^4).$$

**BEWEIS.** O. B. d. A. dürfen wir annehmen, es sei  $s$  der Nullpunkt,  $N$  die  $\xi$ -Achse und  $t = \infty$ , also  $K^2$  und  $K^3$  zwei Halbebenen. Dann ist nach Definition 1

$$DV(C^1, K^4) = \frac{(a-d)(b-c)}{(a-c)(b-d)}.$$



BEWEIS. O. B. d. A. dürfen wir annehmen,  $N$  und  $W$  seien zwei orthogonale Geraden, und  $u$  habe von  $W$  keinen größeren Abstand als  $v$ .  $u^*$  sei das Spiegelbild von  $u$  an  $N$ . Nun sei  $\hat{C}^4$  der Kreis durch  $u$  und  $u^*$ , der  $C^4$  in  $u$  berührt, und es sei  $\hat{K}^4 \supset K^4$ . Also ist nach Hilfssatz 3 zunächst einmal

$$(7) \quad f(K^1, K^2, K^4) \cong f(K^1, K^2, \hat{K}^4).$$

Es sei  $K^b$  die eine gemeinsame Berührungskreisscheibe zu  $K^1, K^2, K^3$  und  $\hat{K}^b$  die entsprechende zu  $K^1, K^2, \hat{K}^4$ . Es ist  $a$  aus  $K^4$ , weil sonst  $K^4 \cap K^1$  leer wäre. Der Berührungspunkt  $p$  von  $K^b$  und  $K^3$  liegt auf der anderen Seite von  $W$  als  $a$ , denn sonst trafen sich  $K^2$  und  $K^3$  nicht, oder berührten sich nur, und  $K^4 \cap K^2$  wäre leer. Also ist  $a$  aus  $\hat{K}^4$ , nicht aber  $p$ , und folglich liegt  $K^b$  ganz im Inneren des Komplements von  $\hat{K}^4$ . Also ist der Hilfssatz 4 auf  $N, K^1, K^2, K^b, \hat{K}^b$  (anstelle von  $C^1, K^2$  bis  $K^5$ ) anwendbar und liefert

$$\begin{aligned} f(K^1, K^2, \hat{K}^4) &:= DV(N, \hat{K}^b) < DV(N, K^b) \\ &:= f(K^1, K^2, K^3). \end{aligned}$$

Zusammen mit (7) ergibt dies (6), w. z. b. w.

Der letzte Hilfssatz hält unter anderem die Werte von  $f$  in zwei speziellen Situationen fest.

HILFSSATZ 6.a) *Es ist stets*

$$f(K^1, K^2, K^3) \cong \frac{1}{3},$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn  $K^1, K^2$  und  $K^3$  sich paarweise berühren.

b) Ist  $C^1 \perp C^2$  und berührt  $K^3$  die ersten beiden Kreisscheiben, so ist

$$f(K^1, K^2, K^3) = \frac{9-4\sqrt{2}}{7} =: \varphi_0 \quad (\approx 0,47759).$$

c) Das Tripel  $\{K^1, K^2, K^3\}$  liege in  $\overline{\mathbb{E}^2}$  und besitze die Eigenschaft  $\mathcal{A}$ . Die gemeinsame konvexe Berührungskreisscheibe  $K^b$  und der gemeinsame Orthogonalkreis  $N$  seien konzentrisch. Dann ist  $\varrho^1 = \varrho^2 = \varrho^3 =: \sigma$ . Hat  $N$  den Radius eins, so gelten zwischen  $\varphi := f(K^1, K^2, K^3)$ , dem Radius  $\varrho$  von  $K^b$  und dem gemeinsamen Radius  $\sigma$  folgende Beziehungen:

$$(8) \quad \sigma = \frac{1-\varrho^2}{2\varrho},$$

$$(9) \quad \varphi = \left( \frac{1-\varrho}{1+\varrho} \right)^2, \quad \text{beziehungsweise} \quad \varrho = \frac{1-\sqrt{\varphi}}{1+\sqrt{\varphi}}.$$

d) In der Bezeichnung von Teil c) ist also

$$(10) \quad 0 < \varrho \leq 2 - \sqrt{3} \quad (\approx 0,26795),$$

und im Spezialfall von Teil b) hat  $\varrho$  den Wert

$$(11) \quad \varrho_0 := \sqrt{8} - \sqrt{7} \quad (\approx 0,18268)$$







auch  $K_v$  berührt, falls

$$(13) \quad \varphi := f(K_1, K_2, K_3) \leq \varphi_0$$

ist, beziehungsweise  $f(K_v^*, K_v, K_4) = \varphi$  erfüllt, falls  $\varphi \geq \varphi_0$  ist.

Es ist  $q$  aus  $K_1^* \cap K_2^* \cap K_3^*$ , so daß das Komplement von  $K_1^* \cup K_2^* \cup K_3^*$  ein Kreisbogendreieck ist. Seine Ecken seien  $p_1, p_2, p_3$ , wobei  $p_v$  dem Teilbogen des Dreiecks auf  $C_v^*$  gegenüber liege.

Diese Konstruktion ist, wie behauptet, invariant unter der Gruppe der Kreisverwandtschaften und ist überdies symmetrisch in den Indices  $v=1, 2, 3$ . Während die Gesamtheit der in Corollar 1 zugelassenen Familien unüberschaubar groß ist, hängt die Familie  $\mathcal{F}_0$  aus Satz 1 — modulo Äquivalenz unter Kreisverwandtschaften — von nur drei Parametern ab: von  $\varphi$  und von den Winkeln unter denen sich  $A_1, A_2, A_3$  in  $p_4$  schneiden.

Satz 1 ist offensichtlich äquivalent mit der folgenden Implikation:

$$(14) \quad \text{Ist die Kreisscheibe } K_5 \text{ zu } \mathcal{F}_0 \cup \{K_4\} \text{ adjungierbar, und wird } K_5 \text{ nicht von } P := \{p_1, \dots, p_4\} \text{ erfaßt, so gibt es zwei Indices } \lambda, \mu \text{ aus } \{1, \dots, 4\} \text{ mit}$$

$$(15) \quad f(K_5, K_\lambda, K_\mu) < \varphi.$$

Die Konfiguration der Kreisscheiben  $K_1$  bis  $K_5$  hängt also im wesentlichen von insgesamt sechs Parametern ab. Während die Konstruktion von  $P$  — sieht man von der Alternative in (13) ab — ohne jede Fallunterscheidung erfolgte, läßt sich eine solche bezüglich der Lage von  $K_5$  relativ zu  $\mathcal{F}_0$  wohl nicht vermeiden.

Durch fortgesetzte Monotoniebetrachtungen, denen die Hilfssätze 1c und 3 bis 5 dienen, und die den Zweck haben, die Anzahl der Parameter zu reduzieren, werden wir zu vier Fällen gelangen, von denen der erste (Fall 1.1) noch zwei Parameter enthält, der zweite und dritte auf den ersten zurückgeführt werden, während der letzte (Fall 2.2) von nur einer Variablen abhängt.

Sei also  $K_5$  gegeben und erfülle (14). Aufgrund von Hilfssatz 3 dürfen wir  $K_5$  durch eine sie umfassende Kreisscheibe  $K_6$  (und diese gegebenenfalls durch eine noch größere) ersetzen, wenn es uns nur gelingt, mit der letzten Kreisscheibe anstelle von  $K_5$  (15) nachzuweisen. — Auf Anhieb ist klar, daß aus (14) die Existenz einer Kreisscheibe  $K_6$  mit

$$(16) \quad \begin{array}{ll} \text{a)} & K_6 \supseteq K_5, \\ \text{b)} & P \cap \text{int}(K_6) = \emptyset \quad \text{und} \\ \text{c)} & \text{card}(P \cap C_6) \geq 2 \end{array}$$

folgt.

Wir dürfen wieder o.B.d.A. annehmen, wir seien in  $\overline{\mathbb{E}^2}$ . Die Koordinaten seien so gewählt, daß  $q = \infty$ ,  $p_4$  der Ursprung und  $C_4$  der Einheitskreis werden. Es gelten also (8) bis (10) aus Hilfssatz 6. Folglich haben die drei Kreise  $C_v^*$  denselben Radius, etwa

$$\sigma^* := \varrho_1^* = \varrho_2^* = \varrho_3^*.$$

Die Potenzgerade der Kreise  $C_2$  und  $C_3$  ist notwendig zugleich Potenzgerade von  $C_2^*$  und  $C_3^*$ ; sie fällt demnach mit  $\overline{p_1 p_4}$  zusammen (in Fig. 5 wurde sie als  $\xi$ -Achse gewählt). Entsprechendes gilt für  $\overline{p_2 p_4}$  und für  $\overline{p_3 p_4}$ .

$p_2$  liegt notwendig auf derselben Seite der Geraden  $\overline{p_1 p_4}$  wie  $m_2$ ; also ist derjenige Winkel  $p_1 p_4 p_2$ , der  $a_3$  enthält, kleiner als  $\pi$  und dasselbe gilt für die beiden Winkel  $p_2 p_4 p_3$  und  $p_3 p_4 p_1$ . Folglich enthält jede Halbebene, auf deren Rand  $p_4$  liegt, mindestens einen der Punkte  $p_1$  bis  $p_3$  im Inneren. Enthält also  $C_6 p_4$  und einen der anderen Punkte aus  $P$ , so ist  $K_6$  wegen (16b) sicher konvex<sup>4</sup>. Daher und wegen der Symmetrie in den Indices 1, 2, 3 können wir uns auf die folgenden beiden Hauptfälle beschränken.

Fall 1.  $p_1, p_4 \in C_6$  und  $K_6$  ist konvex.

Fall 2.  $p_1, p_2 \in C_6$  und  $p_4 \notin K_6$ .

Im Falle 1 könnten wir zusätzlich  $p_2, p_3 \notin \text{int}(K_6)$  fordern. Wir werden dies aber im Unterfall 1.1 bewußt nicht tun, um später die Fälle 1.2 und 2.1 auf diesen zurückführen zu können.

Zu Fall 1. Wir beginnen mit

Fall 1.1. Das Tripel  $\{K_6, K_2, K_3\}$  hat die Eigenschaft  $\mathcal{A}$ .

Wegen der verbliebenen Symmetrie in den Indices 2 und 3 dürfen wir o.B.d.A. annehmen,  $m_6$  liege auf derselben Seite von  $\overline{p_1 p_4}$  wie  $m_2$ .

Weil  $\overline{p_1 p_4}$  mit  $C_2$  und  $C_3$  in einem Kreisbüschel liegt, ist der gemeinsame Orthogonalkreis  $C_7$  zu  $C_2, C_3, C_6$  für alle möglichen  $C_6$  der selbe. Er schneide  $C_3$  in den Punkten  $b_1$  und  $b_2$ , wobei  $b_2$  in  $K_2$  liege.

Nun sei  $K_{6,1}$  diejenige konvexe Kreisscheibe mit  $p_1, p_4 \in C_{6,1}$ , welche  $K_3$  in  $b_1$  berührt. Aufgrund der Unterfallvoraussetzung besitzt auch das Tripel  $\{K_{6,1}, K_2, K_3\}$  die Eigenschaft  $\mathcal{A}$ . Endlich sei  $K_8$  die konvexe der beiden gemeinsamen Berührungskreisscheiben zu  $K_6, K_2, K_3$ , und analog sei  $K_{8,1}$  definiert. Weil  $m_{6,1}$  notwendig weiter von  $\overline{p_1 p_4}$  entfernt ist als  $m_6$ , ist  $K_{8,1}$  kleiner als  $K_8$  und Hilfssatz 4 liefert

$$DV(C_7, K_8) < DV(C_7, K_{8,1}).$$

Folglich haben wir

$$f(K_5, K_2, K_3) < f(K_6, K_2, K_3)$$

(nach Hilfssatz 3 und (16a))

$$< DV(C_7, K_{8,1}).$$

Der Beweis zu Fall 1.1 ist also vollständig (cf. (15)), falls gilt:

$$(A) \quad DV(C_7, K_{8,1}) \equiv \varphi.$$

Diese Ungleichung werden wir in Abschnitt 5 diskutieren.

Fall 1.2. Es ist  $K_6 \cap K_2 \cap K_3 \neq \emptyset$ .

Da  $K_6$  nach (14) und (16a) jede der Kreisscheiben  $K_1$  bis  $K_4$  trifft, ist dies die einzige Alternative zu Fall 1.1.

<sup>4</sup> Mit anderen Worten:  $q \notin K_6$ , bzw.:  $K_6$  ist nicht das Äußere von  $C_6$ .



es sei  $K_6 \cap K_3 \cap K_1$  nichtleer. Also liegen  $K_6$  und  $p_4$  auf derselben Seite der Tangente an  $K_6$  in  $p_1$ , und es gibt eine Kreisscheibe  $K_9$  mit folgenden Eigenschaften:

$$K_9 \supset K_6; \quad p_1, p_4 \in C_9; \quad K_9 \text{ ist konvex.}$$

Auf  $K_9$  anstelle von  $K_6$  ist also erneut Fall 1 anwendbar. Wir kommen daher zu

Fall 2.2.  $K_6$  ist nicht konvex.

Wegen (16b) liegt  $p_3$  nicht im Inneren von  $K_6$ , also im Inneren von  $C_6$  oder auf  $C_6$ . Da andererseits  $K_4 \cap K_6$  nichtleer ist, und  $C_4$  der Inkreis des Kreisbogensdreiecks  $p_1 p_2 p_3$  ist, folgt  $a_3 \in K_6$  und damit  $\varrho_6 \equiv \sigma^*$ . Wäre  $\varphi \equiv \varphi_0$ , so wäre nach der Konstruktion von  $K_3^*$ , und weil  $K_6 \cap K_3$  nichtleer ist, auch  $\varrho_6 \equiv \sigma^*$ , also  $K_6 = K_3^*$  und damit wegen (16a) entweder  $K_5 \cap K_3$  oder  $K_5 \cap K_4$  leer. Es ist also notwendigerweise

$$\varphi > \varphi_0.$$

Wegen  $a_3 \in K_6$  und  $K_6 \cap K_3 \neq \emptyset$  erfüllt also die Konfiguration  $(K_4, K_3, K_3^*, K_6)$  alle Voraussetzungen von Hilfssatz 5, falls

(B) aus  $\varphi > \varphi_0$  folgt, daß  $p_2$  auf derselben Seite des winkelhalbierenden Kreises  $W$  zu  $K_3$  und  $K_4$  liegt, wie  $a_3$ ;

denn dasselbe gilt dann natürlich auch für  $p_1$ . Hilfssatz 5 liefert dann

$$f(K_4, K_3, K_6) < f(K_4, K_3, K_3^*) = \varphi \quad (\text{nach Konstruktion von } K_3^*).$$

Wegen  $f(K_5, K_4, K_3) = f(K_4, K_3, K_5) < f(K_4, K_3, K_6)$  ist dies, w. z. b. w.

Die Aussage (B) wird in Abschnitt 6 bewiesen.

## 5. Zur Aussage (A)

In diese Ungleichung geht die Lage von  $K_1$  nicht ein. Alles hängt nur von  $\varrho$  und dem Winkel  $m_2 p_4 m_3$  ab. Setzen wir diesen gleich  $4\alpha$  (cf. hier und im Folgenden Fig. 5), so haben wir nachzuweisen (cf. Hilfssatz 6c), daß die Funktion

$$g(\varrho, \alpha) := \left( \frac{1-\varrho}{1+\varrho} \right)^2 - DV(C_7, K_{8,1})$$

in dem durch

$$(17a) \quad 0 \leq \varrho \leq 2 - \sqrt{3} \quad (\text{cf. (10)}) \quad \text{und}$$

$$(17b) \quad \frac{2\varrho}{1+\varrho^2} =: s_{\min} \leq \sin \alpha \leq s_{\max} := \sqrt{\frac{1-s_{\min}}{2}}$$

gegebenen Bereich  $D$  nirgends negative Werte annimmt. Dabei entspricht  $s_{\max}$  dem Falle  $|m_2 - m_3| = 2\sigma$ , und es ist allgemein

$$\sin(2\alpha) \leq \frac{\sigma}{\sigma + \varrho} = \frac{1 - \varrho^2}{1 + \varrho^2}.$$

Dagegen ergibt sich das Minimum von  $\alpha$ , wenn  $|m_3 - m_1| = |m_1 - m_2| = 2\sigma$ , also  $\alpha = \pi/2 - 2\alpha_{\max}$  ist. Im Falle  $\varrho = 2 - \sqrt{3}$  wird natürlich  $s_{\min} = s_{\max} = 1/2$ .

Für jeden Punkt  $\left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)$  aus  $D$  läßt sich  $g(\varrho, \alpha)$  berechnen, indem man der Reihe nach  $\sigma^*$ ,  $p_1$ ,  $m_{6,1}$  und  $q_{8,1}$ , sowie  $m_{8,1}$  und  $q_{8,1}$  bestimmt. Die beiden Punkte  $a$  und  $b$ , in denen  $C_7$  die  $\xi$ -Achse schneidet, können ohne Kenntnis von  $C_7$  direkt berechnet werden, weil das Paar  $\{a, b\}$  sowohl mit  $\{s, t\}$ , wie auch mit  $\{p_1, p_4\}$  ein harmonisches Quadrupel bildet ( $\{s, t\} = C_2 \cap C_3$ ). Schließlich ist

$$DV(C_7, K_{8,1}) = \frac{(a - m_{8,1} + q_{8,1})(b - m_{8,1} - q_{8,1})}{(a - m_{8,1} - q_{8,1})(b - m_{8,1} + q_{8,1})}.$$

Im Falle  $\varrho_0 \leq \varrho \leq 2 - \sqrt{3}$  ist

$$\sigma^* = \frac{1}{2}(2\sigma + \varrho + 1) = \frac{1 + \varrho}{2\varrho}.$$

Im Falle  $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$  ergibt eine längere, wenn auch elementare Rechnung

$$(18) \quad \sigma^* = (1 + \varrho) \frac{-2\varrho + \sqrt{1 + 6\varrho^2 + \varrho^4}}{-6\varrho + 2\varrho^2 + (1 + \varrho)\sqrt{1 + 6\varrho^2 + \varrho^4}}.$$

Umfangreiche numerische Rechnungen haben ergeben, daß für jedes feste  $\varrho$  das Doppelverhältnis von  $C_7$  und  $K_{8,1}$  als Funktion von  $\alpha$  allein im Inneren des Intervalls (17b) kein lokales Maximum besitzt. Außerdem ergeben die Rechnungen im gesamten Intervall (17a) (ohne  $\varrho = 2 - \sqrt{3}$ )

$$g(\varrho, \alpha_{\max}) < g(\varrho, \alpha_{\min}).$$

Für den linken dieser beiden Werte, auf den allein es also ankommt, gilt die folgende Tabelle:

$\varrho$	0	0,02	0,04	0,06	0,08
$g(\varrho, \alpha_{\max})$	0 <sup>6</sup>	0,026 176	0,041 068	0,047 840	0,048 823
0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	$\varrho_0$ (cf. (11))
0,045 742	0,039 870	0,032 158	0,023 314	0,013 872	0,012 586 5
0,20	0,22	0,24	0,26	$2 - \sqrt{3}$	
0,012 541	0,010 758	0,007 277	0,002 226	0	

Der letzte Wert entspricht der bemerkenswerten Tatsache, daß im Falle paarweiser Berührung der Kreisscheiben  $K_1, K_2, K_3$  genau ein Kreis  $C_6$  durch  $p_1$  und  $p_4$  existiert, der  $K_2$  und  $K_3$  berührt. Hier ist also  $f(K_1, K_2, K_3) = f(K_6, K_2, K_3) = 1/3$ , und es gibt keine Kreisscheibe  $K_5$ , die unter Fall 1.1 fiele.  $p_1 p_2 p_3$  wird hier zu einem Reuleaux-Dreieck.

<sup>6</sup> Für kleine  $\varrho$  wird  $g(\varrho, \alpha_{\max}) \approx 1,6\varrho$ .



Die Rechnungen lassen sich wie folgt noch vereinfachen. In der Definition von  $K^*$  ersetze man (13) durch: „In der Koordinatenwahl von Figur 5 sei  $K^*$  konvex und habe den Radius  $\sigma^*$ .“ Dann wird  $\varphi = DV(C_7, K_{8,1})$  eine Funktion der drei Variablen  $\varrho, \alpha, \sigma^*$ , wobei die beiden letzteren nur in das Doppelverhältnis eingehen. Nun läßt sich mit mäßigem Aufwand zeigen, daß dieses als Funktion von  $\sigma^*$  allein monoton wächst. Ersetzt man also die durch (18) gegebene Funktion  $\psi(\varrho) := \sigma^*$  durch eine größere, so genügt es, (A) für diese zu beweisen. Man bestätigt leicht, daß  $\psi$  sein einziges Maximum bei  $\varrho = \varrho_0$  mit  $\psi(\varrho_0) = (1 + \sqrt{8} + \sqrt{7})/2 =: \sigma_0^*$  annimmt. Die Rechnungen zeigen, daß (A) für  $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$  noch richtig bleibt, wenn man  $\sigma^*$  unabhängig von  $\varrho$  durch  $\sigma_0^*$  ersetzt. Auf diese Weise ist der unangenehme Ausdruck aus (18) vermeidbar. Allerdings wird das Doppelverhältnis auch dadurch nicht für jedes feste  $\varrho$  zu einer monoton wachsenden Funktion von  $\alpha$ . Wie das Ende der obigen Tabelle zeigt, ist es für  $\varrho$  in der Nähe von  $2 - \sqrt{3}$  nicht mehr möglich,  $\sigma^*$  gegenüber dem Wert aus (18) wesentlich zu vergrößern.

## 6. Beweis der Aussage B

Es sei (cf. Fig. 7 und Fig. 5)

$$\{e, e'\} := C_3 \cap C_4 \quad \text{mit } e \text{ aus } K_2;$$

$u$  der in  $K_2$  gelegene Schnittpunkt von  $W$  mit  $C_3^*$  und  $C_{10}$  derjenige Kreis, der  $C_3$  in  $e'$  berührt und durch  $u$  geht;  $\{v\} := K^b \cap K_2$  und  $K_{11}$  diejenige Kreisscheibe, die  $K_3$  ebenfalls in  $v$  berührt und senkrecht auf  $C_{10}$  steht; der Kreis  $A_3$  steht also in  $v$  auf  $C_3$ ,  $C^b$  und  $C_{11}$  und in  $a_3$  auf  $C_4$  und  $C_3^*$  senkrecht. — Endlich sei  $K_3^b$  diejenige Kreisscheibe, die  $K_4$ ,  $K_3$  und  $K_3^*$  berührt und  $K_2^*$  nicht trifft.

Dann ist nach Konstruktion von  $K_3^*$  (cf. (13), zweite Alternative)<sup>8</sup>

$$DV(A_3, K_3^b) = f(K_4, K_3, K_3^*) = DV(C_4, K^b) = \varphi.$$

Die Aussage (B) bedeutet  $K_{11} \subset K^b$ ; sie ist also nach Hilfssatz 1c äquivalent mit der Ungleichung

$$\begin{aligned} (B') \quad & DV(A_3, K_3^b) \leq DV(C_4, K_{11}) \\ & \text{für} \\ & \varphi_0 \leq \varphi \leq DV(A_3, K_3^b) < 1. \end{aligned}$$

Durch eine geeignete Kreisverwandtschaft läßt sich die Situation der Figur 7 erreichen ( $W$  wird gerade, also werden  $C_3$  und  $C_4$  gleich groß,  $A_3$  wird doppelt so groß). Im Grenzfall  $\varphi = \varphi_0$  wird  $m_3^* = e$ , und  $K_3^*$  berührt  $K_3$  nur noch; es ist dann  $\varrho_3^* = 2x = 2\varrho_4 = 2\sqrt{2}$ . Im anderen Grenzfall  $\varphi = 1$  entarten  $K^b, K_3^b$  und  $K_{11}$  zu Punkten, und in (B') tritt dann natürlich Gleichheit ein.

Nun sei  $\hat{K}_3^b$  diejenige Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $\hat{m}_3^b := \frac{1}{2}(u + e) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4+x \end{pmatrix}$ , die  $K_4$  und  $K_3$  berührt. Um Hilfssatz 4 anwenden zu können, wollen wir zeigen, daß

$$(19) \quad \hat{K}_3^b \cap K_3^* = \emptyset$$

<sup>8</sup> Der Geraden  $\overline{e'p_4}$  in Fig. 5 entspräche in Fig. 7 der Kreis aus dem Büschel  $\langle C_3, C_{10} \rangle$ , der senkrecht auf  $C^b$  steht.





Folglich ist wegen (20)  $\left(\text{und } \frac{x^4}{2} \leq x^2\right)$

$$\begin{aligned} |\dot{m}_3^b - m_3^*| + \varrho_3^b &< \sqrt{(h+x)^2 + h^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{8}x^2 \\ &= \sqrt{2} \frac{\sqrt{4+4x+\frac{x^4}{2}+x+\frac{3}{4}x^2+\frac{x^3}{8}}}{2+x} \equiv \\ &\equiv \sqrt{2} \frac{2+x+x+\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)x^2}{2+x} < \varrho_3^*, \end{aligned}$$

und das bedeutet gerade (19). Nach Hilfssatz 4 ist also

$$DV(A_3, K_3^b) < DV(A_3, \tilde{K}_3^b),$$

und es genügt, anstelle von (B')

$$(B'') \quad DV(A_3, \tilde{K}_3^b) < DV(C_4, K_{11}) \quad \text{für } 0 < x \leq \sqrt{2}$$

nachzuweisen.

Es ist (auf der  $\eta$ -Achse  $W$  gemessen, (cf. Figur 7)

$$DV(A_3, \tilde{K}_3^b) = \frac{(4+x+\varrho_3^b - (-2\sqrt{2}))(4+x-\varrho_3^b - 2\sqrt{2})}{(4+x+\varrho_3^b - 2\sqrt{2})(4+x-\varrho_3^b - (-2\sqrt{2}))}.$$

Das Doppelverhältnis fällt als Funktion von  $\varrho_3^b$  monoton (cf. Hilfssatz 1c), so daß aus (20) folgt:

(21)

$$\begin{aligned} DV(A_3, \tilde{K}_3^b) &< \frac{\left(4+x+\frac{\sqrt{2}}{2}x+0,07\sqrt{2}x^2+2\sqrt{2}\right)\left(4+x-\frac{\sqrt{2}}{2}x-0,07\sqrt{2}x^2-2\sqrt{2}\right)}{\left(4+x+\frac{\sqrt{2}}{2}x+0,07\sqrt{2}x^2-2\sqrt{2}\right)\left(4+x-\frac{\sqrt{2}}{2}x-0,07\sqrt{2}x^2+2\sqrt{2}\right)} = \\ &= \frac{8+4x-0,06x^2-0,14x^3-0,0098x^4}{8+12x+1,06x^2-0,14x^3-0,0098x^4}. \end{aligned}$$

$DV(C_4, K_{11})$  ist leichter zu berechnen. Es ist nämlich  $v = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 2,8 \end{pmatrix}$ , also liegt  $m_{11} =: \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \eta_{11} \end{pmatrix}$  (cf. Fig. 7) auf der Geraden durch  $v$  mit Steigung  $-\frac{1}{7}$  (Tangente an  $A_3$ ), das heißt, wir haben

$$(22) \quad \begin{aligned} \xi_{11} &= 20 - 7\eta_{11} \quad \text{und} \\ \varrho_{11} &= |m_{11} - v| = (14 - 5\eta_{11})\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$C_{10}$  ist gegeben durch

$$m_{10} = \begin{pmatrix} -1-x \\ 3+x \end{pmatrix}, \quad \varrho_{10} = \sqrt{2}(1+x).$$

Weil  $C_{11}$  nach Definition von  $K_{11}$  orthogonal zu  $C_{10}$  ist, haben wir

$$(m_{11} - m_{10})^2 = \varrho_{11}^2 + \varrho_{10}^2,$$

also

$$(21 - 7\eta_{11} + x)^2 + (-3 + \eta_{11} - x)^2 = 2(1+x)^2 + 2(14 - 5\eta_{11})^2.$$

Hieraus ergibt sich

$$\eta_{11} = \frac{14+11x}{5+4x} \quad \text{und weiter wegen (22)}$$

$$(23) \quad \xi_{11} = \frac{2+3x}{5+4x} \quad \text{und}$$

$$\varrho_{11} = \frac{\sqrt{2}x}{5+4x}.$$

Für  $DV(C_4, K_{11})$  benötigen wir schließlich noch den Abstand  $\delta$  zwischen den Punkten  $m_{11}$  und  $m_4$ . Es ist

$$\delta^2 = (m_4 - m_{11})^2 = \left(1 - \frac{2+3x}{5+4x}\right)^2 + \left(3 - \frac{14+11x}{5+4x}\right)^2 = \frac{10+8x+2x^2}{(5+4x)^2}.$$

Damit ergibt sich, gemessen auf der Geraden  $\overline{m_4 m_{11}}$ ,

$$DV(C_4, K_{11}) = \frac{(\sqrt{2} + \delta - \varrho_{11})(-\sqrt{2} + \delta + \varrho_{11})}{(\sqrt{2} + \delta + \varrho_{11})(-\sqrt{2} + \delta - \varrho_{11})}$$

und nach kurzer Rechnung (cf. (23))

$$DV(C_4, K_{11}) = \frac{2+x}{2+3x}.$$

Unter Benützung von (21) (die dort auftretenden Nenner sind für  $0 < x \leq \sqrt{2}$  positiv) ist also (B'') bewiesen, falls

$$\begin{aligned} (8+4x-0,06x^2-0,14x^3-0,0098x^4)(2+3x) &< \\ &< (8+12x+1,06x^2-0,14x^3-0,0098x^4)(2+x) \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist, falls

$$0 < 2,24x^2 + 1,24x^3 + 0,28x^4 + 0,0196x^5$$

ist. Dies aber ist offensichtlich richtig, womit (B) bewiesen ist.

## 7. Beweis von Satz 2

Wir gehen aus von drei gleich großen Kreisscheiben  $K_1, K_2, K_3$  in  $E^2$ , die sich paarweise berühren.  $K_4$  berühre  $K_1$  bis  $K_3$  und es sei

$$(24) \quad \varrho_4 = 1, \text{ also } \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 3 + 2\sqrt{3} \quad (< 6,5).$$

Wir erweitern die Familie  $\mathcal{F}_4 := \{K_1, \dots, K_4\}$  zu immer größeren Familien  $\mathcal{F}_n := \{K_1, \dots, K_n\}$ , indem wir fortgesetzt Gebrauch machen von

DEFINITION 5. Es sei  $\mathcal{F}$  eine endliche Familie von Kreisscheiben in  $E^2$ ,  $K^1, K^2, K^3 \in \mathcal{F}$ ;  $K^1$  berühre  $K^2$  in  $b$  und  $K^3$  in  $c$  und der<sup>9</sup> Bogen  $B := \widehat{bc}$  von  $C^1$  sei frei von Berührungspunkten zwischen  $K^1$  und anderen Mitgliedern von  $\mathcal{F}$ . Dann sei

$$\mathcal{D}(K^1; K^2, K^3; \mathcal{F})$$

die Familie derjenigen Kreisscheiben  $K$ ,

- die  $K^2$  und  $K^3$  berühren,
- dabei fremd zu  $B$  sind,
- die jedes Mitglied von  $\mathcal{F}$  treffen, das von  $K^1$  getroffen wird, und
- die keinen Durchschnitt von Mitgliedern von  $\mathcal{F}$  treffen, der nicht schon von  $K^1$  getroffen wird.

Wegen der Endlichkeit von  $\mathcal{F}$  ist  $\mathcal{D}$  nichtleer. Es gibt eine Kreisscheibe  $K$  in  $\mathcal{D}$ , die sich von  $K^1$  beliebig wenig unterscheidet. Im übrigen gilt natürlich:

Ist  $K$  aus  $\mathcal{D}(K^1; K^2, K^3; \mathcal{F})$  und  $\mathcal{F}$  aus  $\Pi_2$ , so ist auch  $\mathcal{F} \cup \{K\}$  aus  $\Pi_2$ , aber

$$(25) \quad K \cap K^1 \cap K^2 = K \cap K^1 \cap K^3 = \emptyset.$$

Wir wählen nun

$$K_5 \text{ aus } \mathcal{D}(K_1; K_2, K_3; \mathcal{F}_4)$$

und

$$K_6 \text{ aus } \mathcal{D}(K_2; K_3, K_1; \mathcal{F}_5)$$

(cf. Fig. 9, wo die Verhältnisse der Deutlichkeit halber nur topologisch korrekt wiedergegeben sind). Der Berührungspunkt von  $K_6$  mit  $K_3$  sei  $j$ . Mit Rücksicht auf die später zu wählende Kreisscheibe  $K_8$  gehen wir zunächst von  $K_6$  zu einer unwesentlich größeren Kreisscheibe  $K_6$  über, die  $K_3$  ebenfalls in  $j$  berührt; sie trifft also das Innere von  $K_1$ .

Offensichtlich erfüllt  $\mathcal{F}_6$  die Behauptung von Satz 2a.

Wie auch Stachó in [10] bemerkte, sind unter fünf Kreisscheiben, die  $\Pi_2$  erfüllen, stets drei mit nichtleerem Durchschnitt; die Mitgliederzahl sechs ist also minimal für die Aussage des Satzes 2a.

<sup>9</sup> In den Anwendungen wird stets nur der eine der beiden Bögen diese Eigenschaft haben.

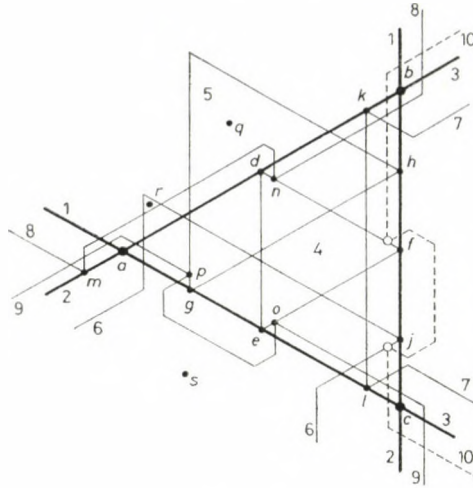


Fig. 9

Um Teil b zu beweisen, wählen wir

$K_7$  aus  $\mathcal{D}(K_3; K_1, K_2; \mathcal{F}_6)$ ,

$K_8$  aus  $\mathcal{D}(K_1; K_2, K_4; \mathcal{F}_7)$  und

$K_9$  aus  $\mathcal{D}(K_2; K_4, K_6; \mathcal{F}_8)$ .

Dann hat die Familie  $\mathcal{F}_9$  die bemerkenswerte Eigenschaft, daß je vier ihrer Mitglieder einen leeren Durchschnitt bilden. Soll also  $\mathcal{F}_9$  mit drei Punkten erfaßt werden, so muß jeder dieser Punkte genau ein Tripel aus  $\mathcal{F}_9$  erfassen, und die drei Tripel müssen disjunkt sein. Die folgende Tabelle gibt alle nichtleeren Tripel aus  $\mathcal{F}_9$  (genauer: die zugehörigen Indices) und einen erfassenden Punkt an:

1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
2	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7	8	4	5	6	5	6	6
9	8	5	8	8	8	9	6	6	9	9	9	7	7	7	8	9	9
a	b	d	q	r	k	c	e	g	s	l	m	f	h	j	n	o	p

Die (im wesentlichen) einzigen Tripel, die  $\mathcal{F}_9$  erfassen, sind demnach

$$\{a, j, n\}, \{d, m, j\} \text{ und } \{q, s, f\}.$$

In jedem Falle wird  $K_3$  von  $j$  oder von  $f$  erfaßt. Wählen wir nun

$K_{10}$  aus  $\mathcal{D}(K_3; K_4, K_6; \mathcal{F}_9)$ ,

so folgt nach (25), daß  $\mathcal{F}_{10}$  nicht mit drei Punkten erfaßbar ist, w. z. b. w.

Ob es eine Familie mit neun Mitgliedern und derselben Eigenschaft gibt, bleibt offen; ich glaube es nicht. Jede Familie von acht Kreisscheiben, die sich paarweise treffen, ist nach dem zu  $\mathcal{F}_6$  Gesagten notwendig mit drei Punkten erfaßbar.

### 8. Ergänzende und historische Bemerkungen

Die in der Einleitung erwähnte ursprüngliche Vermutung von Gallai wurde zunächst von P. Ungár und G. Szekeres mit  $n=7$  und bald darauf von A. Heppes mit  $n=6$  bestätigt (danach war also  $\gamma_2^2 \leq 6$ ). Gallai hat seine Vermutung sodann zu  $\gamma_2^2 \leq 5$  verschärft. Nach Erscheinen des Buches [2] von L. Fejes Tóth habe ich selbst einen ersten Beweis für  $\gamma_2^2 \leq 4$ , sowie die oben in Abschnitt 7 beschriebene Familie  $\mathcal{F}_{10}$  gefunden und habe diese Ergebnisse am 21. Juli 1956 in Oberwolfach vorgetragen. Im wesentlichen verlief der Beweis so: Man betrachte in  $E^2$  die kleinste zu  $\mathcal{F}$  adjungierbare Kreisscheibe  $K_0$ . Weil sie minimal ist — es darf  $\varrho_0=1$  angenommen werden —,

- (26) wird  $K_0$  notwendig von drei Mitgliedern  $K_1, K_2, K_3$  aus  $\mathcal{F}$  berührt, und  $m_0$  liegt in der konvexen Hülle der Berührungspunkte.

In Abhängigkeit von  $\mathcal{F}_0 := \{K_1, K_2, K_3\}$  werden die Punkte  $p_1, \dots, p_4$  konstruiert und gezeigt, daß jede zu  $\mathcal{F}_0$  adjungierbare Kreisscheibe  $K$  mit Radius  $\varrho \geq 1$  einen der Punkte  $p_\lambda$  enthält. Der Beweis enthielt viele Fallunterscheidungen und hat mich nie befriedigt, so daß ich ihn nicht publiziert habe. Immerhin ist es auf diese Weise möglich zu zeigen: Jedes solche  $K$  enthält sogar eine Kreisscheibe  $K_\lambda$  mit Radius  $\tau=0,055$  und Mittelpunkt  $p_\lambda$ .

Mit weitgehend denselben Grundgedanken hat L. Stachó in [10] unter anderem  $\gamma_2^2 \leq 5$  gezeigt. Auch er weist darauf hin, daß noch Spielraum bleibe. Rechnet man seinen Beweis daraufhin durch, so ergibt sich ein Radius  $\tau = (2\sqrt{6} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{2} - 3)/3$  ( $\approx 0,114$ ); die Punkte  $p_2$  bis  $p_5$  bilden dann allerdings ein zu  $p_1$  symmetrisch gelegenes Quadrat der Diagonallänge  $4-4\tau$ , also etwas mehr als die  $2\sqrt{3}$  in [10]. In dieser Arbeit hat er auch schon auf die Ungleichung  $\bar{\gamma} \leq \gamma + 1$  hingewiesen. Kürzlich hat Stachó mit denselben Methoden wie in [10] sogar  $\gamma_2^2 \leq 4$  gezeigt (cf. [12]).

In der vorliegenden Arbeit wird nicht die kleinste Kreisscheibe ausgezeichnet, sondern das Tripel mit dem kleinsten Wert der Funktion  $f$ . Es wurde darauf verzichtet, ein Analogon zu (26) heranzuziehen, was in höheren Dimensionen als zwei vielleicht doch nützlich wäre. Übrigens bilden Tripel  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  mit  $f(\mathcal{T}_1) = f(\mathcal{T}_2)$  im allgemeinen Kreisbogendreiecke mit *verschiedener* Winkelsumme. Ob es vorteilhaft wäre, die Winkelsumme anstelle von  $f$  zu benützen, weiß ich nicht. Für höhere Dimensionen dürfte das Analogon zu  $f$  die stärkere Relevanz besitzen. Wie der Fall  $f(K_1, K_2, K_3) = 1/3$  zeigt, (cf. p. 21 oben), bleibt in Satz 1 kein Spielraum in dem Sinne, daß die erfassenden Punkte durch Kreisscheiben mit einem von  $f(K_1, K_2, K_3)$  unabhängigen, positiven Radius  $\tau$  ersetzt werden könnten. Vermutlich gilt das Entsprechende auch für das Corollar 1 zu Satz 1.

Kehrt man zurück zur Auszeichnung der kleinsten Kugel in  $\mathcal{F}$ , ohne (26) oder Ähnliches benützen zu wollen, so gelangt man zur Definition von  $\bar{\gamma}_2^d$  als der kleinsten Anzahl von Punkten, mit denen man die Familie aller Kugeln erfassen kann, welche die Einheitskugel  $B^d$  treffen und nicht kleiner sind als diese. Hierzu sei auf



[7a] und [8, p. 146 ff.] verwiesen. Die am Ende von [7a] angegebene obere Schranke (der exponentiellen Größenordnung  $(1+\sqrt{3})^d$ ) verbessert sich aufgrund der Überdeckungsmethode von C. A. Rogers (cf. [4] und [9]) zu

$$\gamma_2^d \leq 2^d d^{3/2} (\log d + \log \log d + 1) \sqrt{\frac{3\pi}{2}}$$

(für alle genügend großen  $d$ ).

Die folgende Verallgemeinerung des Gallaischen Problems wurde in [8] p. 128 betrachtet. Ist  $\mathcal{E}$  eine „Grundfamilie“ von Mengen, so sei  $\gamma_k(\mathcal{E})$  die kleinste Kardinalzahl  $n$ , für die gilt: Ist  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  aus  $\Pi_k$ , so ist  $\mathcal{F}$  aus  $\Pi^n$ . Besteht  $\mathcal{E}$  speziell aus den Translaten, beziehungsweise aus den Homotheten eines konvexen Körpers  $K$  in  $\mathbb{R}^d$ , so geht  $\gamma_k$  über in die Funktion  $h(K)$  beziehungsweise in  $H(K)$ , die B. Grünbaum in [5] eingeführt hat. Für andere  $K$  als  $\mathbb{B}^d$  scheint heute kaum mehr bekannt zu sein als 1963 (cf. [8], p. 144 ff.).

Das älteste Ergebnis dieser Art ist wohl die Gleichung

$$\gamma_2(\overline{\mathbf{T}^2}(\mathbb{B}^2)) = 3 \quad (\text{d.h. } h(\mathbb{B}^2) = 3)$$

von H. Hadwiger und H. Debrunner in [3]. Am Ende von [5] hatte Grünbaum vermutet, es sei allgemein  $\gamma_2(\overline{\mathbf{T}^d}(K)) = d+1$ . In [11] habe ich gezeigt, daß sogar  $\delta_2^d(\overline{\mathbf{T}^d}(\mathbb{B}^d)) > 1,003^d$  ist. Dabei ist  $\delta_k^d(\mathcal{E})$  definiert als die kleinste Kardinalzahl  $n$ , für die gilt: Ist  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  aus  $\Pi_k$ , so läßt sich  $\mathcal{F}$  in  $n$  Teilfamilien zerlegen, deren jede in  $\Pi_j$  ist (für Familien  $\mathcal{E}$  mit Hellyzahl  $d+1$  ist also  $\gamma_2 = \delta_2^{d+1} \geq \delta_2^d$ ).

Ich habe Herrn Gábor Fejes-Tóth, den Kollegen B. Grünbaum, G. Wegner und J. Wills, sowie Frau R. Osthoff, die sich der Mühe unterzogen haben, eine erste Fassung dieser Arbeit zu lesen, für wertvolle Hinweise, Korrekturen und Verbesserungsvorschläge sehr vielmals zu danken.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] HELLY, E., Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten, *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **32** (1923), 175—176.
- [2] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 65, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953. *MR* **15**—248. Zweite verbesserte und erweiterte Auflage, 1972. *MR* **50** # 5603.
- [3] HADWIGER, H. und DEBRUNNER, H., Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie in der Ebene, *Enseignement Math.* (2) **1** (1955), 56—89. *MR* **17**—887.
- [4] ROGERS, C. A., A note on coverings, *Mathematika* **4** (1957), 1—6. *MR* **19**—877.
- [5] GRÜNBAUM, B., On intersections of similar sets, *Portugal. Math.* **18** (1959), 155—164. *MR* **23** # A2792.
- [6] HADWIGER, H. und DEBRUNNER, H., *Kombinatorische Geometrie in der Ebene*, Monographies de L'Enseignement Mathématique, No. 2, Institut de Mathématiques, Université, Genève, 1960. Erweiterte Fassung in Englisch: *Combinatorial geometry in the plane*, Translated by Victor Klee, with a new chapter and other additional material supplied by the translator, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964. *MR* **29** # 1577.
- [7] DANZER, L., Über zwei Lagerungsprobleme; Abwandlungen einer Vermutung von T. Gallai, Dissertation, TH München, 1960. — Der erste Teil erschien als
- [7a] DANZER, L., Über Durchschnittseigenschaften  $n$ -dimensionaler Kugelfamilien, *J. Reine Angew. Math.* **208** (1961), 181—203. *MR* **25** # 5453.
- [8] DANZER, L., GRÜNBAUM, B. and KLEE, V. L., Helly's theorem and its relatives, *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. 7, American Math. Soc., Providence, R. I., 1963, 101—180. *MR* **28** # 524.

- [9] ROGERS, C. A., Covering a sphere with spheres, *Mathematika* **10** (1963), 157—164. *MR* **29** # 3960.
- [10] STACHÓ, L., Über ein Problem für Kreisscheibenfamilien, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **26** (1965), 273—282. *MR* **33** # 604.
- [11] DANZER, L., On the  $k$ -th diameter in  $E^d$  and a problem of Grünbaum, Proc. Colloq. on Convexity, Copenhagen, 1965, p. 41.
- [12] STACHÓ, L., A Gallai-féle körletüzési probléma megoldása, *Mat. Lapok* **32** (1981—1984), 19—47.

(Eingegangen am 19. April 1984)

UNIVERSITÄT DORTMUND  
ABTEILUNG MATHEMATIK  
POSTFACH 50 05 00  
D—4600 DORTMUND  
FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY

## ON AN ANALOGUE OF A PROBLEM OF MORDELL

R. P. BAMBAH, V. C. DUMIR and R. J. HANS-GILL

*Dedicated to Professor L. Fejes Tóth on his seventieth birthday*

### 1. Introduction

Let  $\mathbf{R}^n$  be the  $n$ -dimensional Euclidean space. By a box (rectangle when  $n=2$ ) we mean a rectangular parallelepiped defined by the inequalities  $|x_i - a_i| \leq l_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Let  $L$  be a lattice of determinant 1. Then for any box  $B$  of volume greater than one,  $(B, L)$  is not a packing. Then  $L$  is not admissible for  $2B$ , if  $B$  has centre  $O$ . Mordell [14] considered the converse problem: Does there exist a number  $k_n$  such that for every lattice  $L$  of determinant 1 there exists a box  $B$  of volume  $k_n$  such that  $(B, L)$  is a packing? If so, what is the value of  $\kappa_n = \sup k_n$ , for all admissible values of  $k_n$ . In that paper Mordell proved that such  $k_2$  exist and that  $\kappa_2 \geq 1/2$ . A lower bound on  $\kappa_n$ , for  $n \geq 2$ , follows from Davenport [4] and Hlawka [9]. Clearly,  $\kappa_n \leq 1$  for all  $n$ .  $\kappa_1 = 1$  is trivial.  $\kappa_2 = (\sqrt{5}+1)/2$  was proved by Szekeres [20]. (Also see Szűsz [21], Surányi [17], [18] and Gruber [7].)  $\kappa_3 > 1/4$  is due to Szekeres [19] and Ko [10], Gruber and Ramharther [8] proved that  $\kappa_4 \geq 1/16$ .

In this note we consider the analogous problem for coverings. If  $L$  is any lattice of determinant 1 and  $B$  is a box of volume less than one, then  $(B, L)$  is not a covering. Does there exist a number  $r_n$  such that for any lattice  $L$  of determinant 1 in  $\mathbf{R}^n$  there exists a box  $B$  of volume  $r_n$  such that  $(B, L)$  is a covering? If the answer is yes, what is  $\varrho_n = \inf r_n$ , for all admissible values of  $r_n$ .

$\varrho_1 = 1$  is trivial. We shall prove that  $\varrho_2 = (\sqrt{2}+1)/2$ . In fact we prove that this is isolated (see Theorem 2). From an argument of Mordell [14] it follows that

$$\varrho_n \leq 2^n \kappa_n (m!)^n, \text{ where } m = [1/\kappa_n].$$

We shall obtain improved upper bounds on  $\varrho_n$  for  $n \geq 3$ . We shall also show that  $\varrho_n \geq \varrho_2^{[n/2]}$ .

### 2. Statement of theorems

Let  $L$  be a lattice in  $\mathbf{R}^n$  of determinant  $d(L)$ . Let

$$\lambda(L) = \inf \{|x_1 \dots x_n| : (x_1, \dots, x_n) \in L - \{O\}\}.$$

$\kappa(L) = \sup \{k : \text{there exists a box } B \text{ of volume } kd(L) \text{ such that } (B, L) \text{ is a packing}\}.$

Then

$$\kappa_n = \inf \{\kappa(L) : L \text{ lattice in } \mathbf{R}^n\}.$$

Gruber [7] brought out a connection between  $\kappa(L)$  and  $\lambda(L)$  for  $n=2$ . He also showed that  $\kappa(L)=1$  precisely for the lattices for which  $\lambda(L)=0$ . Here we define  $\varrho(L)=\inf \{\varrho: \text{there exists a box } B \text{ in } \mathbb{R}^n \text{ with volume } \varrho d(L) \text{ for which } L \text{ is a covering}\}$ .

Then

$$\varrho_n = \sup \{\varrho(L): L \text{ lattice in } \mathbb{R}^n\}.$$

We shall prove the following results:

THEOREM 1. Let  $L$  be a lattice in  $\mathbb{R}^n$  of determinant  $d$ . Let  $\lambda=\lambda(L)$ . Then

$$(2.1) \quad \frac{d + \sqrt{d^2 + 4\lambda^2}}{2d} \leq \varrho(L) \leq \frac{2\lambda + d + \sqrt{d^2 - 4\lambda^2}}{2d}.$$

THEOREM 2.  $\varrho_2=(\sqrt{2}+1)/2$ . Moreover, for any lattice  $L$  in  $\mathbb{R}^2$ ,  $\varrho(L) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{21}{\sqrt{221}}\right)$ , except when  $\lambda(L)=d(L)/\sqrt{8}$ , in which case  $\varrho(L)=(\sqrt{2}+1)/2$ .

THEOREM 3.  $\varrho_n \leq 2^n / \kappa_n^{n-1} \leq (n! (n-1)!)^{n-1} 2^{n(n^2+1)/2}$ .

THEOREM 4.  $\varrho_n \leq n^{n/2}$  for  $n=3, 4$  and  $5$ .

THEOREM 5.  $\varrho(L) \leq \max_{1 \leq j \leq n-1} \varrho_j \varrho_{n-j}$ , if  $\lambda(L)=0$ .

THEOREM 6.  $\varrho_n \leq \varrho_1^{[n/2]}$ , for  $n \geq 3$ .

### 3. Proofs of Theorems 1 and 2

PROOF OF THEOREM 1. Let  $\varepsilon > 0$ . We shall first prove that there exists a rectangle  $R$  such that  $(R, L)$  is a covering and

$$(3.1) \quad \text{area of } R = a(R) \leq \frac{2\lambda + d + \sqrt{d^2 - 4\lambda^2}}{2} + \varepsilon.$$

Since  $\lambda = \lambda(L) = \inf \{|x_1 x_2|: (x_1, x_2) \in L, (x_1, x_2) \neq (0, 0)\}$ , there exists a primitive point  $A=(a_1, a_2) \in L$  such that  $\lambda \leq |a_1 a_2| < \lambda + \varepsilon$ . Without loss of generality we can suppose that  $L$  is admissible for the rectangle  $R_1: |x_1| \leq |a_1|, |x_2| \leq |a_2|$  ( $R_1$  may be degenerate). On replacing  $A$  by  $-A$ , reflecting  $L$  in the  $x$ -axis, and interchanging the axes, if necessary, we can suppose that  $a_1 > 0$ ,  $a_2 \geq 0$ .

Let

$$(3.2) \quad a_1 a_2 = \lambda + \delta, \quad 0 \leq \delta < \varepsilon.$$

$R_1$  is contained in a non-degenerate rectangle  $R_2: |x_1| \leq a_1, |x_2| \leq b_2$  for which  $L$  is admissible and  $L$  has a point  $B=(-b_1, b_2)$  in  $R_2$  with  $|b_1| < a_1, b_2 > 0$ . Because  $L$  is admissible for  $R_2$ , by considering  $B-A$  we can suppose that  $b_1 \geq 0$  and  $A, B$  generate  $L$ . Also, by the definition of  $\lambda$ ,

$$(3.3) \quad b_1 b_2 \geq \lambda.$$

Let

$$R: 0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_2 \leq a_2 + b_2.$$

$R$  contains the lattice triangle  $O, A, A+B$ . Hence  $(R, L)$  is a covering.

$$\text{area of } R = a_1(a_2 + b_2) = \lambda + \delta + a_1 b_2 = \sigma (\text{say}).$$

Then

$$(3.4) \quad \sigma - \lambda - \delta = a_1 b_2 > 0.$$

Therefore

$$\begin{aligned} d = d(L) &= a_1 b_2 + a_2 b_1 \geq \\ &\geq a_1 b_2 + \frac{\lambda + \delta}{a_1} \frac{\lambda}{b_2} \quad (\text{by (3.2) and (3.3)}) \end{aligned}$$

$$\geq \sigma - \lambda - \delta + \lambda(\lambda + \delta)(\sigma - \lambda - \delta)^{-1} \quad (\text{by (3.4)}).$$

Thus we have

$$d(\sigma - \lambda - \delta) \geq (\sigma - \lambda - \delta)^2 + \lambda(\lambda + \delta)$$

or

$$(\sigma - \lambda - \delta)^2 - d(\sigma - \lambda - \delta) + \lambda(\lambda + \delta) \leq 0.$$

So we must have

$$\sigma - \lambda - \delta \leq \frac{d + \sqrt{d^2 - 4\lambda(\lambda + \delta)}}{2}.$$

Hence

$$\sigma \leq \frac{2\lambda + d + \sqrt{d^2 - 4\lambda^2}}{2} + \delta$$

and (3.1) follows using (3.2).

Now suppose that  $R$  is any rectangle such that  $(R, L)$  is a covering. We shall prove that

$$(3.5) \quad a(R) \geq \frac{d + \sqrt{d^2 + 4\lambda^2}}{2}.$$

Since  $(R, L)$  is a covering, one can easily see that there exist  $A_1, B_1$  in  $L$  such that  $OA_1B_1$  is a proper triangle and  $R, R-A_1, R-B_1$  have a common point  $P$ . It follows that the rectangle  $R-P$  contains the triangle  $OA_1B_1$ . Thus we can suppose that  $R$  contains a proper lattice triangle. On replacing  $R$  by a smaller rectangle, if necessary, we can suppose that one of the vertices of  $R$  coincides with a vertex of this triangle. We can suppose that this point is  $O$ . Then  $R$  is contained in one of the four quadrants. Replacing  $L$  by its reflection in the  $x$ -axis, if necessary, we can suppose that  $R$  lies in the first quadrant. We can further suppose that  $R$  contains the lattice triangle  $OAB$  which is free of lattice points. Then  $A, B$  generate  $L$ . Let  $A=(a_1, a_2)$ ,  $B=(b_1, b_2)$  and the direction from  $A$  to  $B$  be counterclockwise. We observe that

$$(3.6) \quad a_1 a_2 \geq \lambda, \quad b_1 b_2 \geq \lambda.$$

Now

$$\begin{aligned} v &= \text{area of } R \cong a_1 b_2 > 0, \\ d &= d(L) = a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ &\cong a_1 b_2 - (\lambda/a_1)(\lambda/b_2) \quad (\text{by 3.6}) \\ &\cong v - (\lambda^2/v). \end{aligned}$$

Therefore

$$v^2 - dv - \lambda^2 \cong 0.$$

So we must have

$$a(R) = v \cong \frac{d + \sqrt{d^2 + 4\lambda^2}}{2}.$$

This completes the proof of Theorem 1.

The following corollary follows immediately from Theorem 1.

COROLLARY 1.

- (i)  $\lambda(L)=0$  if and only if  $\varrho(L)=1$ .
- (ii) If  $\lambda(L)=d/\sqrt{5}$  then  $\varrho(L)=(\sqrt{5}+3)/2\sqrt{5}$ .
- (iii)  $\lambda(L)\leq d/\sqrt{5}$ .

(It may be noted that this is a well-known result of Korkine and Zolotareff [12].)

PROOF OF THEOREM 2. By a well-known result of Markoff [13], for any two-dimensional lattice  $L$ ,  $\lambda=\lambda(L)\leq 5d/\sqrt{221}$ , except when  $\lambda=d/\sqrt{5}$  or  $d/\sqrt{8}$ . Let  $f(\lambda)=(2\lambda+d+\sqrt{d^2-4\lambda^2})/2d$ .  $f(\lambda)$  is a strictly increasing function for  $\lambda\leq d/\sqrt{8}$  and a strictly decreasing function for  $\lambda>d/\sqrt{8}$ . Therefore  $f(\lambda)\leq f(d/\sqrt{8})=(\sqrt{2}+1)/2$ , so that  $\varrho_2\leq(\sqrt{2}+1)/2$ . Further if  $\lambda\neq d/\sqrt{8}$ , then  $f(\lambda)\leq \max(f(d/\sqrt{5}), f(5d/\sqrt{221}))=(\sqrt{221}+21)/2\sqrt{221}$ .

Now we shall show that if  $L$  is the lattice generated by  $v^{-1}(1, 1)$  and  $v^{-1}(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , where  $v^2=2\sqrt{2}$ , then  $\varrho(L)\cong(\sqrt{2}+1)/2$ . Here  $d(L)=1$ . Let  $R$  be any rectangle such that  $(R, L)$  is a covering. It is enough to prove that  $a(R)\cong(\sqrt{2}+1)/2$ .

Arguing as in the second part of the proof of Theorem 1, we can suppose that  $R$  contains a proper lattice triangle  $OAB$ ,  $R$  has one vertex at  $O$  and  $R$  lies either in the first or second quadrant. Replacing  $R$  by a suitable smaller rectangle, if necessary, we can suppose that  $L$  has no point in the interior of  $R$  and  $A, B$  lie on the boundary of  $R$ . (To ensure this, among the points of  $L$  other than  $O$  in  $R$  choose a primitive point  $A$  with smallest  $y$  coordinate. Of the points of  $L$  in  $R$  off the line  $OA$  choose  $B$  with smallest  $y$  coordinate and among such point the one nearest to the  $y$ -axis.) We can also suppose that direction from  $A$  to  $B$  is anticlockwise.

Now we discuss the case when  $R$  lies in the first quadrant (the other case is treated similarly). Let

$$A = \frac{1}{v}(m_1 - n_1\sqrt{2}, m_1 + n_1\sqrt{2}),$$

$$B = \frac{1}{v}(m_2 - n_2\sqrt{2}, m_2 + n_2\sqrt{2}).$$



Then

$$\det(A, B) = m_1 n_2 - m_2 n_1 = 1$$

and

$$\begin{aligned} a(R) &= \frac{1}{v^2} (m_1 - n_1 \sqrt{2})(m_2 + n_2 \sqrt{2}) = \\ &= \frac{1}{v^2} [(m_1 - n_1 \sqrt{2})(m_2 + n_2 \sqrt{2}) - (m_1 + n_1 \sqrt{2})(m_2 - n_2 \sqrt{2})] + \\ &\quad + \frac{1}{v^2} (m_1 + n_1 \sqrt{2})(m_2 - n_2 \sqrt{2}) = \\ &= (m_1 n_2 - m_2 n_1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} (m_1 + n_1 \sqrt{2})(m_2 - n_2 \sqrt{2}) = \\ &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} (m_1 + n_1 \sqrt{2})(m_2 - n_2 \sqrt{2}) \cong (1 + \sqrt{2})/2, \end{aligned}$$

because

$$\begin{aligned} (m_1 + n_1 \sqrt{2})(m_2 - n_2 \sqrt{2}) &= m_1 m_2 - 2n_1 n_2 + \sqrt{2}(n_1 m_2 - m_1 n_2) = \\ &= m_1 m_2 - 2n_1 n_2 - \sqrt{2} \cong 0 \end{aligned}$$

and therefore the integer  $m_1 m_2 - 2n_1 n_2 \cong \sqrt{2}$  and so it is at least two, i.e.

$$(m_1 + n_1 \sqrt{2})(m_2 - n_2 \sqrt{2}) \cong 2 - \sqrt{2}.$$

#### 4. Proofs of Theorems 3—6

##### PROOF OF THEOREM 3.

Kneser [11] proved the following result:

**THEOREM A.** *Let  $K$  be a bounded convex body in  $\mathbf{R}^n$  with centre  $O$  and volume  $V$  and  $L$  be a packing lattice for  $K$ . Let  $\tau = 1/V$  and  $\tau_0 = \tau - [\tau]$ . Then  $(\mu, K, L)$  is a covering if  $\mu > [\tau] + \tau_0^{1/n}$ .*

By the definition of  $\kappa_n$ , if  $L$  is any lattice in  $\mathbf{R}^n$  of determinant 1 and  $0 < k < \kappa_n$ , then there exists a box  $B$  with volume  $k$  for which  $L$  is a packing lattice. By Theorem A,  $(\mu, K, L)$  is a covering if  $\mu > 1 + 1/k$ , because  $\tau_0 = \tau - [\tau] < 1$ . Therefore

$$\varrho(L) \leq k(1 + 1/k)^n \leq 2^n/k^{n-1}, \quad \text{because } 0 < k < \kappa_n \leq 1.$$

This is true for all  $k < \kappa_n$ , so we get

$$(4.1) \quad \varrho(L) \leq 2^n/\kappa_n^{n-1}.$$

It follows from Hlawka [9] that

$$(4.2) \quad \kappa_n \equiv \frac{n}{(n!)^2 2^{n(n+1)/2}}.$$

Theorem 3 follows from (4.1) and (4.2).

PROOF OF THEOREM 4. Let  $L$  be a lattice of determinant 1 in  $\mathbf{R}^n$ . For  $n=3$  and 4, and for  $n=5$  when  $\lambda(L) \neq 0$ , it follows from the results of Remak [15], Davenport [5], Dyson [6], Skubenko [16], Woods [22], Bambah and Woods [1], [2] that there exists an ellipsoid  $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i^2 \leq n/4$ , with  $a_1 \dots a_n = 1$ , which provides

a covering by  $L$ . Hence the box  $|x_i| \leq \sqrt{n}/2\sqrt{a_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , of volume  $n^{n/2}$  provides a covering by  $L$ . This proves Theorem 4 for these cases.

For  $n=5$  and  $\lambda(L)=0$ , it follows from Theorem 5.

PROOF OF THEOREM 5. First we give two Lemmas.

LEMMA 1. Let  $\{L_i\}$  be a sequence of lattice in  $\mathbf{R}^n$  converging to a lattice  $L$ . Then

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \varrho(L_i) \leq \varrho(L).$$

PROOF. Let  $\varepsilon > 0$ . We shall prove that there exists  $i_0$  such that  $\varrho(L_i) \leq \varrho(L) + \varepsilon$ , for all  $i \geq i_0$ .

By the definition of  $\varrho(L)$ , there is a box  $B$  of volume  $(\varrho(L) + \varepsilon/2)d(L)$  such that  $(B, L)$  is a covering. Let  $A_1, \dots, A_n$  be a basis of  $L$  and  $A_1^{(i)}, \dots, A_n^{(i)}$  be bases of  $L_i$  such that  $A_r^{(i)} \rightarrow A_r$  for  $1 \leq r \leq n$ . Suppose that  $\mathcal{N}$  is a fixed bounded neighbourhood of the fundamental parallelepiped  $\Pi$  formed by  $A_1, \dots, A_n$ . Suppose  $\mathcal{N} \subset \bigcup_{1 \leq j \leq t} (B + U_j)$ ,  $U_j \in L$ .

Let  $B'$  be a box containing every point of  $B$  in its interior and  $V(B') = V(B) + \frac{\varepsilon}{3}d(L)$ . When  $i$  is large enough, every point of  $\mathcal{N}$  is contained in  $\bigcup_{1 \leq j \leq t} (B' + U_j^{(i)})$ , where  $U^{(i)} = u_1 A_1^{(i)} + \dots + u_n A_n^{(i)}$  if  $U = u_1 A_1 + \dots + u_n A_n$ . Also we can choose  $i_1$  such that for  $i \geq i_1$ , the fundamental parallelepiped  $\Pi^{(i)}$  of  $L_i$  formed by the basis  $A_1^{(i)}, \dots, A_n^{(i)}$  is contained in  $\mathcal{N}$ . So for  $i \geq i_1$ ,  $(B', L_i)$  is a covering and we have

$$\begin{aligned} \varrho(L_i) &\equiv \frac{V(B')}{d(L_i)} = \frac{V(B) + \varepsilon d(L)/3}{d(L_i)} \\ &= \frac{d(L)}{d(L_i)} \frac{V(B) + \varepsilon d(L)/3}{d(L)} \\ &= \frac{d(L)}{d(L_i)} (\varrho(L) + 5\varepsilon/6). \end{aligned}$$

Hence for large enough  $i$ ,  $\varrho(L_i) \leq \varrho(L) + \varepsilon$ .

The following result is contained in the paper of Birch and Swinnerton—Dyer [3].

LEMMA 2. Let  $L$  be a lattice in  $\mathbf{R}^n$  with  $\lambda(L)=0$ . On applying a suitable transformation which permutes the coordinates, we can find a sequence of diagonal

transformations  $D_i$  of determinant 1 such that the sequence  $\{D_i L\}$  converges to a lattice  $AZ^n$ , where  $A$  is of the form  $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ ,  $A_1$  and  $A_2$  being non-singular matrices of order  $i$  and  $n-i$ , respectively,  $1 \leq i < n$ .

Theorem 5 is an immediate consequence of Lemmas 1 and 2, because it is easy to see that

$$\varrho(AZ^n) \equiv \varrho(A_1 Z^i) \varrho(A_2 Z^{n-i}) \equiv \varrho_i \varrho_{n-i}.$$

(In particular, for  $n=5$ , if  $\lambda(L)=0$ , then

$$\varrho(L) \equiv \max(\varrho_1 \varrho_4, \varrho_2 \varrho_3) = \max(\varrho_4, \varrho_2 \varrho_3).$$

Since  $\varrho_2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ ,  $\varrho_3 \leq 3^{3/2}$  and  $\varrho_4 \leq 4^{1/2} = 16$ , it follows that  $\varrho(L) \leq 16 < 5^{5/2}$ .)

THEOREM 6. For  $n \geq 3$ ,  $\varrho_n \equiv \varrho_2^{[n/2]} = \left( \frac{\sqrt{2}+1}{2} \right)^{[n/2]}$ .

PROOF. Let  $L$  be a lattice in  $\mathbb{R}^2$  with  $\varrho(L) = \varrho_2$ . Let  $m = [n/2]$ . Take  $A' = L \oplus \dots \oplus L$ ,  $m$  copies. Suppose  $A = A'$ , if  $n$  is even and  $A = A' \oplus Z$ , if  $n$  is odd. Then  $A$  is a lattice in  $\mathbb{R}^n$  with  $\varrho(A) = \varrho_2^m$ . Hence  $\varrho_n \equiv \varrho(A) = \varrho_2^{[n/2]}$ .

REMARK. A similar argument shows that

$$\varrho_n \equiv \max_{1 \leq i \leq n-1} \varrho_i \varrho_{n-i}.$$

#### REFERENCES

- [1] BAMBAH, R. P. and WOODS, A. C., On a theorem of Dyson, *J. Number Theory* 6 (1974), 422—433. MR 50 # 9802.
- [2] BAMBAH, R. P. and WOODS, A. C., Minkowski's conjecture for  $n=5$ ; a theorem of Skubenko, *J. Number Theory* 12 (1980), 27—48. MR 81g: 10043.
- [3] BIRCH, B. J. and SWINNERTON-DYER, H. P. F., On the inhomogeneous minimum of the product of  $n$  linear forms, *Mathematika* 3 (1956), 25—39. MR 18—22.
- [4] DAVENPORT, H., Note on a result of Siegel, *Acta Arith.* 2 (1936/37), 262—265.
- [5] DAVENPORT, H., A simple proof of Remak's Theorem on the product of three linear forms, *J. London Math. Soc.* 14 (1939), 47—51. Zbl 20. 205.
- [6] DYSON, F. J., On the product of four non-homogeneous linear forms, *Ann. of Math.* (2) 49 (1948), 81—109. MR 10—19.
- [7] GRUBER, P., Bemerkungen zum Umkehrproblem für den Minkowskischen Linearformensatz, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 13 (1970), 5—10. MR 47 # 4935.
- [8] GRUBER, P. and RAMHARTER, G., Beiträge zum Umkehrproblem für den Minkowskischen Linearformensatz, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.* 39 (1982), 135—141. MR 83m: 10046.
- [9] HLAWKA, E., Über Gitterpunkte in Parallelepipeden, *J. Reine Angew. Math.* 187 (1950), 246—252. MR 12—161.
- [10] CHAO KO, Note on lattice points in a parallelepiped, *J. London Math. Soc.* 12 (1937), 40—47.
- [11] KNESER, M., Ein Satz über abelsche Gruppen mit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen, *Math. Z.* 61 (1955), 429—434. MR 16—898.
- [12] KORKINE, A. and ZOLOTAREFF, G., Sur les formes quadratiques, *KXXX* 6 (1873), 366—389.
- [13] MARKOFF, A., Sur les formes quadratiques binaires indéfinies, *Math. Ann.* 15 (1879), 381—406; 17 (1880), 379—399.
- [14] MORDELL, L. J., Note on an arithmetical problem on linear forms, *J. London Math. Soc.* 12 (1937), 34—36.

- [15] REMAK, R., Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes I, II, *Math. Z.* **17** (1923), 1—34; **18** (1923), 173—200.
- [16] SKUBENKO, B. F., A proof of Minkowski's conjecture on the product of  $n$  linear inhomogeneous forms in  $n$  variables for  $n \leq 5$ , Investigations in number theory, 2, *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* **33** (1973), 6—36. *MR* **51** # 3061. *J. Soviet Math.* **6** (1976), 627—650.
- [17] SURÁNYI, J., Über einen Satz von G. Szekeres in der Geometrie der Zahlen, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **3—4** (1960/61), 319—326. *MR* **24** # A2563.
- [18] SURÁNYI, J., Lattice point free rectangles, *Zahlentheorie* (Tagung, Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1970), Ber. Math. Forschungsinst., Oberwolfach, Heft 5, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1971, 195—202. *MR* **53** # 7955.
- [19] SZEKERES, G., Note on lattice points within a parallelepiped, *J. London Math. Soc.* **12** (1937), 36—39. *Zbl* **15**. 391.
- [20] SZEKERES, G., On a problem of the lattice-plane, *J. London Math. Soc.* **12** (1937), 88—93. *Zbl* **16**. 368.
- [21] SZÜSZ, P., Beweis eines zahlengeometrischen Satzes von G. Szekeres, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **7** (1956), 75—79. *MR* **18**—22.
- [22] WOODS, A. C., Lattice coverings of five space by spheres, *Mathematika* **12** (1965), 143—150. *MR* **33** # 1289b.

(Received May 20, 1984)

CENTRE FOR ADVANCED STUDY IN MATHEMATICS  
 PANJAB UNIVERSITY  
 CHANDIGARH—160014  
 INDIA

# FACET-CENTROIDS AND VOLUME MINIMIZATION

VICTOR KLEE

*With warm regards to László Fejes Tóth on the occasion of his seventieth birthday*

As the terms are used here, a *body* is a subset of real  $d$ -space  $\mathbb{R}^d$  that is closed and has nonempty interior, and a *polytope* is a body that is the convex hull of a finite set. The  $(d-1)$ -faces of a  $d$ -polytope  $P$  are its *facets*, and  $P$  is *simple* if each of its vertices is on precisely  $d$  edges or, equivalently, on precisely  $d$  facets.

A *cap* of a convex body  $C$  is a bounded set of the form  $K=C \cap J$ , where  $J$  is a closed halfspace whose bounding hyperplane  $H$  intersects  $C$ 's interior; the intersection  $C \cap H$  is then called the *C-facet* of  $K$ . The main result of this note is the following, where *local* refers to the Hausdorff metric and *minimum* to volume (Lebesgue  $d$ -measure).

**THEOREM.** *If  $B$  is a compact convex subset of a convex body  $C$ , and  $K$  is a local minimum among caps of  $C$  that contain  $B$ , then the centroid of  $K$ 's  $C$ -facet belongs to  $B$ .*

Interest in this theorem stems from the

**OBSERVATION.** *Suppose that  $F$  is a facet of a polytope  $P$ , and  $C$  is the intersection of the closed halfspaces which contain  $P$  and are bounded by hyperplanes determined by  $P$ 's facets other than  $F$ . Then  $P$  is a cap of  $C$ ,  $F$  is a  $C$ -facet of  $P$ , and all caps of  $C$  sufficiently close to  $P$  have the same number of facets as  $P$ . If each vertex of  $F$  is incident to only one edge of  $P$  not in  $F$ , then all caps of  $C$  sufficiently close to  $P$  are of the same combinatorial type as  $P$ .*

See Grünbaum [2] for a discussion of combinatorial type and other basic material on polytopes.

The theorem and observation yield at once the

**COROLLARY.** *If  $B$  is a convex body and*

- (i)  *$P$  is a local minimum among polytopes that contain  $B$  and have the same number of facets as  $P$*
  - or (ii)  *$P$  is a local minimum among simple polytopes that contain  $B$  and are of the same combinatorial type as  $P$ ,*
- then the centroid of each facet of  $P$  belongs to  $B$ .*

Special cases of the corollary have been proved or used by Lindelöf [4], Steinitz [6], Goldberg [1], Klee and Laskowski [3], O'Rourke [5] and others (see [1] for some

---

Research supported in part by the National Science Foundation.

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A20, 52A25, 52A40; Secondary 68E99.

*Key words and phrases*. Centroid, circumscribed, convex body, facet, simplex, volume.

additional references). Because of their essential role in the design of algorithms for volume minimization (e.g. [3], [5]), it seems worthwhile to establish the theorem and its corollary in full generality. The theorem is proved by means of the following technical lemma, which is useful in some nonconvex situations as well.

LEMMA. Suppose that

(i)  $J$  is a closed halfspace in  $\mathbf{R}^d$  with bounding hyperplane  $H$ ;  $G$  is a  $(d-2)$ -flat in  $H$ ;

(ii)  $Q$  is a bounded measurable subset of  $H$ , of positive  $(d-1)$ -measure; the centroid  $q$  of  $Q$  does not belong to  $G$ ;

(iii)  $z$  is an interior point of  $J$ ;  $R$  is the union of all rays that issue from  $z$  and pass through points of  $Q$ ;

(iv) for each  $\lambda \geq 0$ ,  $H_\lambda$  is the hyperplane that contains the  $(d-2)$ -flat  $G$  and the point  $\frac{1}{1+\lambda}(q+\lambda z)$ ,  $J_\lambda$  is the closed halfspace that contains  $z$  and is bounded by  $H_\lambda$ ,  $Q_\lambda = R \cap H_\lambda$  and  $U_\lambda$  is the union of all segments that join  $z$  to points of  $Q_\lambda$ .

Then for all sufficiently small  $\lambda > 0$  it is true that  $U_\lambda = R \cap J_\lambda$  and the  $d$ -measure of  $U_\lambda$  is less than that of  $U_0$ ; in fact,  $\mu(U_0) - \mu(U_\lambda) = \lambda - o(|\lambda|)$ .

PROOF OF THE THEOREM from the Lemma. With hypotheses as in the Theorem, suppose that  $K = C \cap J$  where  $J$  is a closed halfspace with bounding hyperplane  $H$ . Plainly  $B$  is intersected by the  $C$ -facet  $Q = C \cap H$  of  $K$ , and we want to show that  $Q$ 's centroid  $q$  belongs to  $B$ . Suppose the contrary, whence  $q$  is strictly separated from  $B \cap H$  by a  $(d-2)$ -flat  $G$  in  $H$ . Choose an interior point  $z$  of the body  $K$ , let the rest of the notation be as in the lemma, and for each  $\lambda \geq 0$  let  $K_\lambda = C \cap J_\lambda$ . Then  $K_0 = K$ , and for all sufficiently small  $\lambda \geq 0$  the set  $K_\lambda$  is a cap of  $C$  such that  $B \subset K_\lambda$ . Plainly  $K_\lambda \rightarrow K_0$  as  $\lambda \rightarrow 0$ .

It follows from  $C$ 's convexity that for each  $\lambda > 0$ ,

$$K_\lambda \sim K_0 \subset U_\lambda \quad \text{and} \quad U_0 \sim U_\lambda \subset K_0 \sim K_\lambda.$$

With  $\mu$  denoting  $d$ -measure, the lemma asserts that for all sufficiently small  $\lambda > 0$ ,  $\mu(U_\lambda) < \mu(U_0)$ , from which it follows that  $\mu(U_\lambda \sim U_0) < \mu(U_0 \sim U_\lambda)$ ,

$$\mu(K_\lambda \sim K_0) \leq \mu(U_\lambda \sim U_0) < \mu(U_0 \sim U_\lambda) \leq \mu(K_0 \sim K_\lambda),$$

and hence  $\mu(K_\lambda) < \mu(K_0)$ . This completes the proof, for it contradicts the assumed local minimality of  $K_0$ .  $\square$

We turn now to the proof of the lemma, which is itself based on a sublemma concerning affine orthants. An *affine orthant* is a subset of  $\mathbf{R}^d$  that is affinely equivalent to the nonnegative orthant

$$\mathbf{R}_+^d = \{x = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbf{R}^d: x^i \geq 0 \text{ for all } i\}.$$

SUBLEMMA. For each positive integer  $d$  and each  $\delta \in ]0, 1[$  there exists  $g(d, \delta) < \infty$  such that the following is true: If  $H = \{x \in \mathbf{R}^d: x^d = 0\}$ ,  $z = (0, \dots, 0, 1)$ , and



$A$  is an affine orthant whose apex is  $z$  and whose extreme rays pass through the points  $y_1, \dots, y_d$  of  $H$ , where  $|y_i^{d-1}| < 1/\delta$  for all  $i$ , and if for each real  $\lambda$  the intersection of  $A$  with the closed halfspace  $J_\lambda = \{x \in \mathbf{R}^d: x^d \geq \lambda x^{d-1}\}$  is denoted by  $S_\lambda$ , then whenever  $|\lambda| \leq \delta$  the set  $S_\lambda$  is a  $d$ -simplex with

$$\mu(S_\lambda)/\mu(S_0) = \prod_{i=1}^d (1 + \lambda y_i^{d-1}) = 1 - \left( \sum_{i=1}^d y_i^{d-1} \right) \lambda + \eta(y_1, \dots, y_d, \lambda) \lambda^2$$

and

$$|\eta(y_1, \dots, y_d, \lambda)| < g(d, \delta).$$

PROOF OF THE SUBLEMMA. The line through  $z$  and  $y_i$  intersects the bounding hyperplane  $H_\lambda$  of  $J_\lambda$  in the point

$$p_i = (\tau_i y_i^1, \dots, \tau_i y_i^{d-1}, 1 - \tau_i),$$

where  $\tau_i$  is such that  $1 - \tau_i = \lambda y_i^{d-1}$ ; that is,  $\tau_i = (1 + \lambda y_i^{d-1})^{-1}$ . Under the hypotheses, each  $\tau_i$  is positive and hence  $S_\lambda$  is a  $d$ -simplex whose vertex-set is  $\{z, p_1, \dots, p_d\}$  and whose volume is  $(d!)^{-1}$  times the absolute value of the determinant

$$D_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \tau_1 y_1^1 & \dots & \tau_1 y_1^{d-1} & 1 - \tau_1 & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_d y_d^1 & \dots & \tau_d y_d^{d-1} & 1 - \tau_d & 1 \end{bmatrix} = \left( \prod_{i=1}^d \tau_i \right) \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ y_1^1 & \dots & y_1^{d-1} & -1 & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_d^1 & \dots & y_d^{d-1} & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Since all  $\tau_i$ 's are 1 when  $\lambda=0$ , the second determinant is equal to  $D_0$  and hence

$$\mu(S_0)/\mu(S_\lambda) = \prod_{i=1}^d (1 + \lambda y_i^{d-1}) = 1 + \left( \sum_{i=1}^d y_i^{d-1} \right) \lambda + \xi(y_1, \dots, y_d, \lambda) \lambda^2$$

with

$$|\xi(y_1, \dots, y_d, \lambda)| = \left| \sum_{k=2}^d \left( \sum_{I \subset \{1, \dots, d\}, |I|=k} \prod_{i \in I} y_i^{d-1} \right) \lambda^{k-2} \right| < d 2^d / \delta^d.$$

The stated expression for  $\mu(S_\lambda)/\mu(S_0)$  is an immediate consequence of this.  $\square$

Now at last we are ready for the

PROOF OF THE LEMMA. Since volume ratios are invariant under nonsingular affine transformations of  $\mathbf{R}^d$ , we may assume without loss of generality that the  $J$ ,  $H$  and  $z$  of the lemma are those of the sublemma, that

$$G = \{x \in \mathbf{R}^d: x^{d-1} = x^d = 0\},$$

and that the centroid  $q$  of the lemma's  $Q$  has  $q^{d-1}=1$  and all other coordinates equal to 0. This implies that the halfspaces  $J_\lambda$  of the lemma and the sublemma are the same.

Now let us assume temporarily that the bounded measurable set  $Q$  is the union of a finite family  $\{Y(1), \dots, Y(m)\}$  of  $(d-1)$ -simplices whose interiors are pairwise disjoint, and let  $\{y_1(k), \dots, y_d(k)\}$  be the vertex-set of  $Y(k)$ , with always

$$y_i(k) = (y_i^1(k), \dots, y_i^{d-1}(k), 0) \in H.$$

Form  $S_\lambda(k)$  from  $\{y_1(k), \dots, y_d(k)\}$  as  $S_\lambda$  is formed from  $\{y_1, \dots, y_d\}$  in the sublemma, and note that  $U_\lambda = \bigcup_{k=1}^m S_\lambda(k)$ . It follows with the aid of the sublemma that for all sufficiently small  $|\lambda|$ ,

$$\begin{aligned}\mu(U_\lambda) &= \sum_{k=1}^m \mu(S_\lambda(k)) = \sum_{k=1}^m \left[ 1 - \left( \sum_{i=1}^d y_i^{d-1}(k) \right) \lambda + o(|\lambda|) \right] \mu(S_0(k)) = \\ &= \sum_{k=1}^m \mu(S_0(k)) - \left[ \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^d y_i^{d-1}(k) / d \right) (d\mu(S_0(k))) \right] \lambda + o(|\lambda|) = \\ &= \mu(U_0) - \lambda + o(|\lambda|).\end{aligned}$$

The  $-\lambda$  in the final expression arises from the fact that  $d\mu(S_0(k))$  is the  $(d-1)$ -measure of the  $(d-1)$ -simplex  $Y(k)$  and  $\sum_{i=1}^d y_i^{d-1}(k)/d$  is the next-to-last coordinate of the centroid (with respect to  $(d-1)$ -measure) of  $Y(k)$ . But then the expression in the second set of square brackets is just the  $(d-1)$ th coordinate of the centroid of the set  $Q = \bigcup_{k=1}^m Y(k)$ , and by our "normalization" assumption this is 1. This

completes the proof for the case in which the bounded measurable set  $Q$  is the union of a finite family of nonoverlapping simplices, and the same argument applies, replacing certain finite sums by infinite sums, when  $Q$  is an infinite union of the same sort. That covers the case of an arbitrary bounded open  $Q \subset H$ .

Now suppose merely that  $Q$  is a bounded measurable subset of  $H$ , of positive  $(d-1)$ -measure and with centroid  $q = (0, \dots, 0, 1, 0)$ . Then there is a decreasing sequence  $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$  of bounded open sets, each containing  $Q$ , such that as  $i \rightarrow \infty$  the  $(d-1)$ -measure of  $Q_i$  converges to that of  $Q$  and the centroid of  $Q_i$  converges to  $Q$ 's centroid  $q$ . Transforming each  $Q_i$  by a suitable affine transformation, we may assume without loss of generality that the  $(d-1)$ -measure of  $Q_i$  converges to that of  $Q$  and the centroid of  $Q_i$  is equal to  $q$ . (The sets  $Q_i$  may no longer be decreasing, and may now fail to contain  $Q$ , but they will still be close to  $Q$ .) Forming  $U_\lambda(i)$  from  $Q_i$  as  $U_\lambda$  was formed from  $Q$ , and noting the strongly uniform nature of the bound on  $\eta$  in the sublemma, we can follow the reasoning for  $U_\lambda$  to conclude that for all  $i$ ,

$$\mu(U_\lambda(i)) = \mu(U_0(i)) - \lambda + o(|\lambda|),$$

where the convergence of  $o(|\lambda|)/\lambda$  to 0 as  $\lambda \rightarrow 0$  is uniform in  $i$ . It follows that

$$\mu(U_\lambda) = \mu(U_0) - \lambda + o(|\lambda|)$$

and the proof is complete.  $\square$

## REFERENCES

- [1] GOLDBERG, M., The isoperimetric problem for polyhedra, *Tôhoku Math. J.* **40** (1935), 226—236. *Zbl* 10. 410.
- [2] GRÜNBAUM, B., *Convex Polytopes*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 16, Interscience Publishers, New York, 1967. *MR* 37 # 2085.

- [3] KLEE, V. and LASKOWSKI, M. C., Finding the smallest triangles containing a given convex polygon, *J. Algorithms* **6** (1985), 359—375.
- [4] LINDELÖF, L., Propriétés générales des polyèdres etc., *St. Petersburg Bull. Acad. Sci.* **14** (1869), 258—269; *Math. Ann.* **2** (1870), 150—159.
- [5] O'ROURKE, J., AGGARWAL, A., MADDILA, S. and BALDWIN, M., An optimal algorithm for finding minimal enclosing triangles, *J. Algorithms* **7** (1986), 258—269.
- [6] STEINITZ, E., Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern I—II, *J. Reine Angew. Math.* **158** (1927), 129—153; **159** (1928), 133—143.

(Received May 22, 1984)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
UNIVERSITY OF WASHINGTON  
C—138 PADEFORD HALL, GN—50  
SEATTLE, WA 98195  
U.S.A.



## FINITE PACKING AND COVERING

P. GRITZMANN and J. M. WILLS

*Dedicated to László Fejes Tóth on the occasion of his seventieth birthday*

### 1. Introduction

In the present paper we give a survey on results in a branch of the theory of packing and covering in Euclidean  $d$ -space  $E^d$ , for which the following two problems are typical and fundamental: Determine, for a given convex body  $K$  and a given  $k \in \mathbf{N}$

(1) the minimum of the volume of all convex bodies, into which  $k$  translates of  $K$  can be packed (finite packing),

(2) the maximum of the volume of all convex bodies, which can be covered by  $k$  translates of  $K$  (finite covering).

Figures 1 and 2 illustrate these problems in case of the unit ball for  $d=2$  and  $k=11$ .

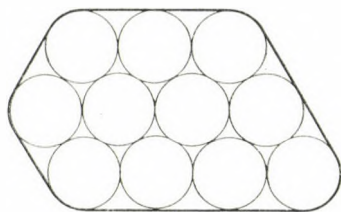


Fig. 1

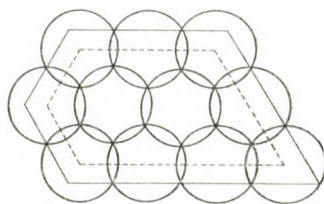


Fig. 2

In the planar case such problems and several ramifications were largely considered [2, 3, 4, 16, 17, 18, 21, 22, 29, 40, 42, 44, 48, etc.], whereas until recently very little was known in higher dimensions. But since L. Fejes Tóth [19] had published his famous “sausage-conjecture” for finite packings of the unit ball  $B^d$  in 1975 and Wills [50b] stated its counterpart for finite coverings with  $B^d$  in 1983, a detailed investigation of such problems has started.

Clearly, there are many interesting questions on packing and covering of finitely many convex bodies (see L. Fejes Tóth [18] and G. Fejes Tóth [14] for general surveys and compare [20] for a further example), but in the sequel finite packing and covering will be restricted to this branch of discrete geometry.

In the present note we have tried to summarize the main results in this young field with special emphasis on problems in higher dimensions. Though we have included results which are still unpublished, in a strict sense, the paper does not

contain any original work, and, of course, for some obvious reasons, we are not giving proofs.

For concepts, notations and results not explained below we refer to L. Fejes Tóth [18], Grünbaum [31], Hadwiger [32] and Rogers [46].

## 2. Definitions and notation

Let  $\mathcal{K}^d$  denote the set of convex bodies of  $E^d$  and let  $\mathcal{K}_0^d$  be the subset of convex bodies with interior points. For  $K \in \mathcal{K}^d$ , and  $j=0, \dots, d$  let  $V_j(K)$  be the  $j$ th intrinsic volume of  $K$  (see [36]). The functionals  $V_j$  are renormalized quermass-integrals  $W_j$ , in fact  $V_j(K) = \omega_{d-1}^{-1} \binom{d}{j} W_{d-j}(K)$ . The intrinsic volumes are independent of the dimension of the space in which  $K$  is embedded. In particular,  $V_d = V$  is the volume,  $V_{d-1} = \frac{1}{2} F$  is half the surface area and  $V_0 = 1$ . Now, let  $K \in \mathcal{K}^d$ ,  $A \subset E^d$ ,  $k \in \mathbb{N}$  and let  $\mathcal{F}$  be any finite family  $[K_1, \dots, K_k]$  of  $k$  translates of  $K$ . If the sets  $\text{int}(K_1), \dots, \text{int}(K_k)$  are mutually disjoint, then  $\mathcal{F}$  is called a  $k$ -packing of  $K$ . If  $A$  is contained in the union  $\bigcup_{i=1}^k K_i$ , then  $\mathcal{F}$  is called a  $k$ -covering of  $A$  with  $K$ . Further, let  $\mathcal{P}_k(K)$ ,  $\mathcal{C}_k(K; A)$  denote the set of all  $k$ -packings with  $K$ ,  $k$ -coverings of  $A$  with  $K$ , respectively. If we do not want to emphasize the number  $k$  of translates we simply speak of finite packings with  $K$  and finite coverings of  $A$  with  $K$  or, sometimes even more relaxed, of finite packing and finite covering.

Now, the two fundamental problems stated in the introduction lead to densities in a natural way as follows.

Let for  $k \in \mathbb{N}$ ,  $K \in \mathcal{K}_0^d$

$$\delta_k(K) := \max \left[ \frac{kV(K)}{V(C)} \mid C \in \mathcal{K}^d \wedge \exists \mathcal{F}: \mathcal{F} \in \mathcal{P}_k(K) \wedge \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset C \right]$$

$$\vartheta_k(K) := \min \left[ \frac{kV(K)}{V(C)} \mid C \in \mathcal{K}^d \wedge \exists \mathcal{F}: \mathcal{F} \in \mathcal{C}_k(K; C) \right].$$

Then  $\delta_k(K)$ ,  $\vartheta_k(K)$  are called  $k$ -packing density of  $K$ ,  $k$ -covering density of  $K$ , respectively.

Let us first remark that these finite densities are well defined since, essentially by Blaschke's selection theorem, maximal or minimal elements of the respective families do exist. Further, let us point out that the slight asymmetry in the two definitions originates from our not defining  $k$ -packings of  $K$  into a subset of  $E^d$ . In fact, for our purpose, such a notion is not necessary, since for any  $k$ -packing  $\mathcal{F}$  with  $K$ ,  $\text{conv}(\bigcup[B|B \in \mathcal{F}])$  is the minimal convex body that contains  $\bigcup[B|B \in \mathcal{F}]$ . On the contrary, maximal convex bodies which are contained in a given  $k$ -covering with  $K$  have not yet been characterized.

There are some nice and interesting ramifications of this concept for coverings. The first one corresponds to the fact that, in our context, the volume, in a sense, loses its unique role. So we may also consider covering problems with respect to the



other intrinsic volumes  $V_j$ , where we only require that the  $j$ -skeleton  $\text{skel}_j(K)$  is covered. Here, as usual,  $\text{skel}_j(K)$  denotes the set of all points of  $K$  which do not lie in the relative interior of any  $(j+1)$ -dimensional convex subset of  $K$ . To unify the notation, further, let  $\text{skel}_d(K) := K$ .

For centrally symmetric convex bodies  $K$ , a second ramification which was introduced in the plane by Bambah, Rogers, Woods and Zassenhaus [2, 3, 4, see also 1] is to require that the convex hull of all translation vectors of the respective  $k$ -coverings should be covered.

As we shall now see, both modifications lead again to densities. Let for  $k \in \mathbb{N}$ ,  $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  with  $j \leq d$  and  $K \in \mathcal{K}^d$  with  $\dim(K) \geq j$

$$\vartheta_{j,k}(K) := \min \left[ \frac{kV_j(K)}{V_j(C)} \mid C \in \mathcal{K}^d \wedge \exists \mathcal{F}: \mathcal{F} \in \mathcal{C}_k(K; \text{skel}_j(C)) \right]$$

and, if further  $K = -K$ ,  $k \geq j+1$

$$\theta_{j,k}(K) := \min \left[ \frac{kV_j(K)}{V_j(C_k)} \mid \exists b_1, \dots, b_k: b_1, \dots, b_k \in E^d \wedge \right. \\ \left. \wedge \mathcal{F} := [b_1 + K, \dots, b_k + K] \wedge C_k := \text{conv}[b_1, \dots, b_k] \wedge \mathcal{F} \in \mathcal{C}_k(K; \text{skel}_j(C_k)) \right].$$

To unify our notation we further set  $\theta_k^d(K) := \theta_{d,k}^d(K)$  and for simplification in the case of the unit ball  $B^d$ , we essentially omit the argument and write

$$\delta_k^d, \vartheta_k^d, \vartheta_{j,k}^d, \theta_k^d, \theta_{j,k}^d.$$

Again, the items are well defined (compare [25]).

Since all other cases are trivial, we always require  $d, k \geq 2$  and  $j \geq 1$ .  $\vartheta_{j,k}(K)$  and  $\theta_{j,k}(K)$  are called  $j$ th  $k$ -covering density of  $K$  and  $j$ th  $k$ -covering density of  $K$ , respectively.

Summarizing these names we often just speak of packing, covering and co-covering densities, these names being justified by the fact that the functionals are invariant under motions and dilatations, definite, continuous, and

$$\delta_k(K) \leq 1 \leq \vartheta_{j,k}(K) \leq \theta_{j,k}(K).$$

Furthermore,  $\delta_k(K)$ ,  $\vartheta_k(K)$  and  $\theta_k(K)$  are invariant under linear transformations and  $\delta_k(K)$ ,  $\vartheta_k(K)$  are also translation-invariant (compare [23, 25]).

Clearly, for finite packings one can also consider extremum problems using intrinsic volumes different from  $V$ . This was done in [50a, 34] where also some partial results were given. Furthermore, Makai jr. announced some interesting results in 1983. But until now there is no satisfying concept of  $j$ th packings in terms of densities.

### 3. Historical remarks and two-dimensional results

In connection with some remarkable work of L. Fejes Tóth [17] on planar convex bodies packed into or covering hexagons, Rogers [44] and Bambah and Rogers [2] considered the two problems of packing  $k$  translates of a centrally symmetric planar convex body  $K$  into a planar convex body  $C$  or covering  $C$  with  $k$

such translates. For the packing problem Rogers obtains the inequality

$$(k-1)d(K)+V(K) \cong V(C),$$

where  $d(K)$  denotes the critical determinant of  $2K$ , and Bambah and Rogers stated for the covering problem

$$2(k-1)V(T)+V(K) \cong V(C),$$

where  $T$  is a triangle of greatest volume which can be inscribed  $K$ . These results are based on complicated theorems about the areas of Jordan-polygons (which in fact reduce to Pick's identity [43] for lattice packings or coverings). In case of coverings, Bambah, Rogers and Zassenhaus [3] gave a simpler proof of this auxiliary theorem, which was subsequently improved by Bambah and Woods [4]. In particular Bambah and Woods considered the special cocovering problem of  $k$  translates of a centrally symmetric convex body in the plane covering the convex hull  $C_k$  of their centres and proved the inequality

$$2\left(k-1-\frac{1}{2}k\right)V(T) \cong V(C_k),$$

where  $T$  is as before and  $k$  denotes the number of centres in  $\text{bd}C_k$ . (For this inequality, the connection to Pick's identity is obvious, since, using a result of Fáry [13] the critical determinant for lattices which provide a covering with  $K$  is  $2V(T)$ .)

The following inequalities for the unit circle may serve as an illustration of these results in terms of densities:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left(1+\frac{3}{2\sqrt{2k}}\right)^{-1} &\cong \delta_k^2 \cong \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{k}\left(1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)\right)^{-1}, \\ \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{k}\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-1\right)\right)^{-1} &\cong \vartheta_k^2 \cong \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(1-\frac{3}{2\sqrt{2k}}\right)^{-1} \\ \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(1-\frac{5}{2k}\right)^{-1} &\cong \theta_k^2 \cong \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(1-\frac{6}{k}\right)^{-1}\left(1-\frac{3}{2\sqrt{2(k-6)}}\right) \quad (k \cong 8). \end{aligned}$$

The upper bound for  $\delta_k^2$  and the lower bounds for  $\vartheta_k^2$  and  $\theta_k^2$  are consequences of the results stated above [2, 3, 4, 44], the remaining 3 bounds essentially come from [28]. (For details see [28].)

Let us remark, that L. Fejes Tóth [16, compare also 18] has given the stronger inequalities

$$\delta_k^2 \cong \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \quad \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \cong \vartheta_k^2$$

which express the fact that finite packings with  $B^2$  cannot be denser while finite coverings with  $B^2$  cannot be thinner than an optimal packing of covering with  $B^2$ , respectively, with respect to the whole plane.

Many authors, cited in detail by L. Fejes Tóth [18] and G. Fejes Tóth [14] investigated related problems, but nothing was mentioned about higher dimensions, and, since even for  $d=3$  and in case of the unit ball densest packings in or thinnest coverings of the space have not yet been determined (unless restricting the problem

to lattice arrangements), the situation for  $d \geq 3$  looked rather hopeless. But in 1975 L. Fejes Tóth [19] pointed out that at least for  $d \geq 7$  a linear arrangement of  $k$  balls yields greater density than the densest infinite lattice-packing and conjectured that such an arrangement of  $k$  balls is best possible ("sausage-conjecture", see Section 4). Although L. Fejes Tóth's sausage-conjecture was well-known to many mathematicians, it was not before 1982 that the first nontrivial results were proved [5, 7]. These theorems were the starting point for a systematic investigation, the results of which will be stated in the following paragraphs.

#### 4. L. Fejes Tóth's sausage-conjecture

Let  $b_1, \dots, b_k \in E^d$ ,  $C_k := \text{conv}(\{b_1, \dots, b_k\})$ ,  $[b_1 + B^d, \dots, b_k + B^d] \in \mathcal{P}_k(B^d)$ , and let  $S_k$  be a line-segment of length  $2(k-1)$ . L. Fejes Tóth [19] conjectured that for  $d \geq 5$

$$(4.1) \quad V(S_k + B^d) \leq V(C_k + B^d),$$

with equality if and only if  $C_k$  is itself a line-segment (which, for simplicity, is often expressed as  $C_k = S_k$ , in the following).

Let us point out that  $C_k + B^d$  is precisely the convex hull of the translates of  $B^d$  under consideration.



Fig. 3

Since  $S_k + B^d$  looks like a "sausage" L. Fejes Tóth called this inequality "sausage-conjecture".

Using Steiner's formula for parallel bodies and some local methods, which has turned out to be applicable for some lattice point problems, Betke, Gritzmann and Wills [7] obtained partial results, which were subsequently improved by Betke and Gritzmann [5] yielding

**THEOREM.** *The inequality (4.1) holds for all  $C_k$  with  $\dim C_k \leq \frac{7}{12}(d-1)$  and for all  $C_k$  with  $\dim C_k \leq 9$  and  $d \geq \dim C_k + 1$ . In both cases, equality holds if and only if  $C_k = S_k$ .*

Some weaker results were obtained by Kleinschmidt, Pachner and Wills [34] by completely different methods and Makai jr. has announced some related results. Further, a sufficient condition is given in [23] which, in particular, shows that (4.1) is true if

$$1+r > \sqrt{2} \left(1 + \frac{R}{2}\right) \left(\frac{(d+2)\sqrt{d+1}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/d},$$

where  $r, R$  are the radii of insphere, circumsphere of  $C_k$ , respectively. Moreover, using some results of McMullen [36, 37] on angle-sum relations and valuations,

in [23] a sausage-criterion equivalent to (4.1) was obtained, which, in particular, proves (4.1) for lattice-zonotopes (see also [6]).

In terms of the  $k$ -packing density, we clearly have

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{d+1}} < \frac{k\omega_d}{2(k-1)\omega_{d-1} + \omega_d} \equiv \delta_k^d,$$

where  $\omega_d := V(B^d)$ , and (4.1) is equivalent to

$$(4.2) \quad \frac{k\omega_d}{2(k-1)\omega_{d-1} + \omega_d} = \delta_k^d.$$

(4.2) has not yet been proved for any dimension, but Gritzmann [23, 26] has shown that it is at least nearly true:

THEOREM.

$$\sqrt{1 - \frac{1}{d+1}} < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{d} \delta_k^d < 2 + \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{d-1}}.$$

In particular, this theorem shows that the sausage-conjecture (4.1) is correct up to a factor at most  $(2 + \sqrt{2}) + \frac{2}{\sqrt{d-1}}$ , i.e. essentially up to the factor  $2 + \sqrt{2}$ .

It is, of course, easy to improve the right bound of this theorem for small dimensions (compare [26]), but it seems to be difficult to obtain asymptotically better factors.

### 5. Sausage- and bone-conjectures for finite coverings and cocoverings

A detailed investigation of the sausage phenomena for finite packings of the unit ball led to the sausage-conjecture for  $k$ -coverings of  $B^d$  [50b] which states that a suitable linear arrangement of unit balls is extremal for coverings as well provided  $d \geq 5$ . Calculating the densities of such arrangements one easily obtains

$$(5.1) \quad \vartheta_k^d < \sqrt{\frac{\pi e}{2}} = 2.066\dots$$

Since convex bodies  $C$  of maximal volume which are covered by a given  $k$ -covering of  $B^d$  are not yet characterized (recall that in case of packings it is simply the convex hull), the sausage-conjecture for coverings seems still harder to prove than for packings. The following partial result was given in [28]:

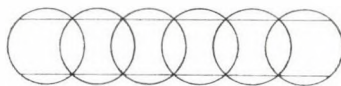


Fig. 4

**THEOREM.** Let  $\tau_d$  denote the ratio of the sum of the volumes of the intersection of  $d+1$  unit balls centred at the vertices of a regular simplex of side  $\sqrt{2(d+1)d^{-1}}$  to the volume of the simplex. Furthermore, let  $0 < \tau < \tau_d$ ,  $C \in \mathcal{K}_d^d$  and let  $[B_1, \dots, B_k]$  be a  $k$ -covering of  $C$  with  $k\omega_d \leq \tau V(C)$ . Then

$$\frac{V(C)}{F(C)} \equiv \left(1 - \frac{\tau}{\tau_d}\right)^{-1}.$$

Thus, if  $\tau$  is the density of the optimal sausage-arrangement, by Daniels' asymptotic formula for  $\tau_d$  (see [46]), the densities of coverings of a convex body  $C$  which (essentially) satisfies the inequality

$$V(C) \equiv \left(1 + \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^2\right) F(C)$$

are greater than the density of the optimal sausage-arrangement, i.e. such coverings cannot provide counterexamples to the sausage-conjecture for finite coverings with  $B^d$ .

For the problem of finite cocoverings, linear arrangements yield  $V(C_k) = 0$ , thus are not even useful to obtain upper bounds for the density. Gritzmann and Wills [28] observed that for cocoverings with  $B^d$  the following arrangements yield very small upper bounds for  $\theta_k^d$  if  $k$  is sufficiently large:

Arrange  $k_0 := k - 2[k^{1-(2/d)}]$  unit balls equally spaced at distance  $\frac{2}{\sqrt{d}}$ . (Here, as usual for numbers,  $[x]$  denotes the greatest integer less than or equal to  $x$ .) Then, in particular, we obtain a  $k_0$ -covering of an orthogonal cylinder of length  $\frac{2k_0}{\sqrt{d}}$  and radius  $\sqrt{1 - \frac{1}{d}}$ . Now place the remaining  $k - k_0$  centres in the boundary of the top and bottom  $(d-1)$ -balls of this cylinder, so as to obtain a good approximation.

In [28] it was conjectured that for sufficiently large  $k$  and  $d \geq 5$  such "bone-shaped" arrangements are best possible ("bone-conjecture").

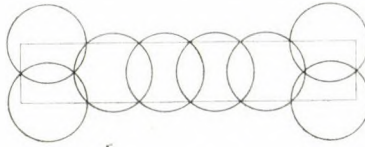


Fig. 5

Obviously, the theorem stated above shows that the "bone-conjecture" is true for a certain class of  $k$ -cocoverings with  $B^d$ .

For the  $k$ -cocovering density of  $B^d$  we obtain

$$\theta_k^d \equiv \sqrt{\frac{\pi e}{2}} (1 - ck^{-2/d}).$$



where  $c$  is a constant only depending on  $d$  showing, in particular, that if the sausage-conjecture for finite coverings with  $B^d$  is true, bones are at least asymptotically optimal for finite cocoverings with  $B^d$ . The best lower bound known so far [15] is

$$1 + 2^{-(1.21d+6.04)} < \vartheta_k^d \cong \theta_k^d.$$

Similar results hold for the  $j$ th  $k$ -covering or  $k$ -cocovering densities, too. In [15] G. Fejes Tóth, Gritzmann and Wills showed the estimate

$$\vartheta_k^j < \vartheta_{j,k}^d < \sqrt{\frac{\pi e}{2}} \sqrt{\frac{d}{j}}$$

and conjectured that for  $1 \leq j < d$  the densities  $\vartheta_{j,k}^d$  are obtained if and only if the centres of the balls lie equidistantly on a line-segment of suitable length ("sausage-skin-conjecture"). They further proved this conjecture for  $d=2$  and  $j=1$  via the following theorem.

**THEOREM.** *Let  $L_k$  denote the maximum of the perimeter of all convex domains in the Euclidean plane whose boundary can be covered by  $k$  closed unit circles. Then we have*

$$L_k = 4 \left( \sqrt{k^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{k} \right).$$

*The optimal arrangement is uniquely determined: the centres of the circles are equally spaced at the distance  $2\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}$  on a straight line.*

Concerning cocoverings, in [28] the existence of a constant  $c=c(d)$  with

$$\theta_{j,k}^d \cong \sqrt{\frac{\pi e}{2}} \sqrt{\frac{d}{j}} (1 + ck^{-2/d})$$

was proved, leading to a "bone-skin-conjecture".

## 6. Sausage catastrophes

Concerning the volume, i.e. concerning  $\delta_k^d$ ,  $\vartheta_k^d$ , for  $d=3$  and 4 the situation is very different from  $d=2$  and  $d \geq 5$ . The following phenomenon seems to hold: For small  $k$  a sausage-arrangement is best possible and for large  $k$  partial configurations of classical densest infinite (lattice) packings, respectively thinnest (lattice) coverings (with respect to the whole space), yield best densities.

If  $k_0$  denotes the largest  $k$  such that for  $k < k_0$  sausage-arrangements are best possible, then we say that for  $k=k_0$  a "sausage-catastrophe" occurs. This phenomenon was first mentioned by Wills [50c], who gave upper bounds for  $k_0$ . In [51] it is shown that for  $\delta_k^3$   $k_0 \leq 56$ , which might be the exact value. For  $\vartheta_k^3$  the expected value of  $k_0$  seems to be somewhat larger, whereas the expected values of  $k_0$  for  $\delta_k^4$  and  $\vartheta_k^4$  seem to be much larger ( $\sim 10^5 - 10^6$ ) which justifies the name "sausage-catastrophe".



### 7. The densities for arbitrary convex bodies

For arbitrary convex bodies, sausage-conjectures cannot be true in general. For an example, just take the cartesian product of the regular hexagon and the ball  $B^{d-2}$ . For sufficiently many translates a 2-dimensional arrangement is, then, obviously better than any 1-dimensional. Similar examples can, of course, be constructed with any convex bodies which tile  $E^d$  by translation, whose finite packing and covering densities differ from 1 (compare Venkows [38] and McMullen [31] and Section 8). But in any case sausage- or bone-arrangements yield good bounds. Gritzmann [23, 24, 25] gave the following three theorems.

**THEOREM.** Let  $K \in \mathcal{K}_0^d$ , then

$$\frac{1}{d} < \frac{k}{d(k-1)+1} \leq \delta_k(K).$$

**THEOREM.** For  $K \in \mathcal{K}_0^d$ ,

$$(7.1) \quad \vartheta_k(K) < e$$

and for  $j \in \mathbb{N}$ ,  $j < d$  and  $K \in \mathcal{K}^d$  with  $\dim K \equiv j$

$$\vartheta_{j,k}(K) < e \left( j + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{d-j} \right) < (d+1)e.$$

**THEOREM.** For  $K \in \mathcal{K}_0^d$  there exists a constant  $c$  such that

$$\theta_k(K) < e(1 + ck^{-2/d})$$

and for  $j \in \mathbb{N}$ ,  $j < d$  and  $K \in \mathcal{K}^d$  with  $\dim K \equiv j$  there is a constant  $c$  such that

$$\theta_{j,k}(K) < e \left( j + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{d-j} \right) (1 + ck^{-2/d}).$$

For  $j=1$  one can "almost" solve the problem for the covering density and even completely solve it in case of cocoverings. G. Fejes Tóth, Gritzmann and Wills [15] proved

$$\left( 1 - \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi d}{2}} \right) \frac{V_1(K)}{D(K)} < \frac{kV_1(K)}{(k-1)D(K) + V_1(K)} \equiv \vartheta_{1,k}(K) \equiv \frac{V_1(K)}{D(K)},$$

where  $D(K)$  denotes the diameter of  $K$ , and in [28]

$$\theta_{1,k}(K) = \left( 1 - \frac{1}{k} \right)^{-1} \frac{V_1(K)}{D(K)}$$

was shown, where equality holds if and only if the  $k$  translation vectors are equally spaced on a straight line of length  $(k-1)D(K)$ , thus proving a sausage theorem.

Now, to end this section, let us point out some interesting features concerning (7.1) and its proof. Compared to the upper bound (5.1) for the unit ball the general bound (7.1) has only increased by about 0.65 showing that every convex body provides a rather efficient finite covering. The proof of (7.1) is based on a certain im-

provement [24] of a theorem of Macbeath [35] on the approximation of convex bodies by cylinders which has been used earlier by Rogers [45, see also 46] to give the upper bound

$$(7.2) \quad \vartheta_L(K) \leq d^{\log_2 \log_e d + c}$$

for the density  $\vartheta_L(K)$  of lattice coverings of space with convex bodies  $K$ . Here,  $c$  is a suitable constant which does not depend on  $d$  and  $K$ .

Applying the improved approximation theorem and using Rogers' techniques, the estimate (7.2) can be sharpened for a certain class of convex bodies. More precisely, in [27] the following result is proved.

**THEOREM.** *Let  $K \in \mathcal{K}^d$ ,  $d > 1$ , and let  $k$  be an integer satisfying  $k > \log_2 \log_e d + 4$ . Furthermore, let  $H_1, \dots, H_k$  denote  $k$  hyperplanes with normals being mutually perpendicular and let  $A$  be an affine transformation.*

(a) *If  $A(K)$  is symmetrical with respect to  $H_1, \dots, H_k$ , respectively, then there is a constant  $c$  such that*

$$\vartheta_L(K) < cd(\log_e d)^{1 + \log_2 e}.$$

(b) *If, for  $i = 1, \dots, k$ ,  $A(K) \cap H_i$  is equal to the orthogonal projection of  $A(K)$  onto  $H_i$  then there is a constant  $c$  such that*

$$\vartheta_L(K) \leq cd(\log_e d)^{2 + \log_2 e}.$$

*In both cases, the constant  $c$  does not depend on  $d$  and  $K$ .*

## 8. Finite tilings

Venkow [47] and independently McMullen [38, see also 39] characterized all convex bodies which tile space by translation (see also [30]). For finite packings and coverings this means to characterize all pairs of convex bodies  $K, C$  such that there exists a  $k$ -packing  $K_1, \dots, K_k$  with  $K$  and  $C = \bigcup_{i=1}^k K_i$ . All such packings are called  $k$ -tilings with  $K$ , or, in general, finite tilings.

Let for  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq d$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_k^{d,n} &:= \{K \mid K \in \mathcal{K}_0^d \wedge \exists b_1, \dots, b_k: b_1, \dots, b_k \in E^d \wedge \dim \{b_1, \dots, b_n\} = \\ &= n \wedge [b_1 + K, \dots, b_k + K] \in \mathcal{P}_k(K) \wedge \bigcup_{i=1}^k (b_i + K) \in \mathcal{K}_0^d\}. \end{aligned}$$

Then  $\mathcal{T}_k^{d,n}$  can be characterized as follows [23].

**THEOREM.** *Let  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq d$  and  $K \in \mathcal{K}_0^d$ . Then  $K \in \mathcal{T}_k^{d,n}$  if and only if there exists a pair of complementary  $n$ - and  $(d-n)$ -dimensional subspaces  $E_1, E_2$  of  $E^d$ , convex bodies  $K_1 \subset E_1$ ,  $K_2 \subset E_2$  and line-segments  $s_1, \dots, s_n$  such that  $K_1 = \sum_{i=1}^n s_i$  and  $K = K_1 + K_2$ .*

Clearly, this theorem also characterizes  $C = \bigcup_{i=1}^k K_i$  for all  $k$ -tilings  $[K_1, \dots, K_k]$ .

In particular, it shows that there is only a very weak dependence on  $k$  and that for all finite tilings the translation vectors belong to a lattice.

### 9. The lattice point enumerator

There is a remarkable connection between finite lattice packings, coverings and cocoverings and the lattice point enumerator. In particular, as pointed out in [23, see also 26], the theory of finite lattice packings yields some interesting applications in the theory of lattice points. (For a survey on lattice point problems we refer to [8].)

The main tool for applications is the following simple theorem [23].

**THEOREM.** Let  $K \in \mathcal{K}_0^d$  and let  $\mathcal{G}$  be a packing-lattice for  $K$ . Then for each convex body  $C$  of  $E^d$  we have

$$G(C)V(K) \leq \delta_{G(C)}(K)V(C+K),$$

where  $G(C)$  denotes the number of lattice points in  $C$ .

In particular, this theorem used for  $K$  being the unit cube yields a well-known result of Davenport [12], who gave an upper bound for  $G(C)$  using projections. In fact, Davenport's theorem may be regarded as a sausage-theorem for the unit cube. In general, the theorem yields an inequality for each  $K$  where  $G(C)$  is essentially bounded by mixed volumes of  $C$  and  $K$ .

Perhaps the most interesting problem in the theory of lattice points is to give an upper bound of the lattice point enumerator as a linear combination of the intrinsic volumes. Since Hadwiger [33] gave a counterexample for the conjecture [49]:

$$(9.1) \quad G(C) \leq \sum_{i=0}^d V_i(C) \quad \text{for } \mathcal{G} = \mathbf{Z}^d,$$

this problem is completely open for  $d \geq 4$  even in the case of the lattice  $\mathbf{Z}^d$ . Still, using the results on finite packings with  $B^d$ , or which is more appropriate, for  $\frac{1}{2}B^d$ , we obtain for each lattice  $\mathcal{G}$  that packs  $\frac{1}{2}B^d$ :

$$G(C) \leq \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2 + \sqrt{2}) \frac{1}{\sqrt{d}} + \frac{2}{\sqrt{d}\sqrt{d-1}} \right) \sum_{i=0}^d 2^i \frac{\omega_{d-i}}{\omega_d} V_i(C).$$

If L. Fejes Tóth's sausage conjecture was proved, we would have an improvement of this inequality of essentially the factor  $(2 + \sqrt{2})$ , or, in other words, for finite lattice packings of  $B^d$ , (4.1) is equivalent to the estimate

$$(9.2) \quad G(C) \leq V_0(C) + V_1(C) + \sum_{i=2}^d 2^{i-1} \frac{\omega_{d-i}}{\omega_{d-1}} V_i(C)$$

for the lattice point enumerator.

In the special case of the lattice  $\mathbb{Z}^d$ , (9.2) seems to hold without any restriction on the dimension. In particular, for dimension 2 it coincides with (9.1), which, in turns, can be interpreted as a sausage theorem.

Furthermore, if proved for  $\mathcal{G} = \mathbb{Z}^d$ , (9.2) could be “mixed” with Bokowski’s inequality [9, 10]

$$(9.3) \quad G(C) \leq \sum_{i=0}^d \omega_d^{(i/d)-1} \omega_{d-i} V_i(C)$$

for  $d \leq 5$  yielding estimates

$$d = 4: G \leq V_0 + 1,14V_1 + 1,46V_2 + 1,63V_3 + 1,46V_4$$

$$d = 5: G \leq V_0 + 1,16V_1 + 1,63V_2 + 2,09V_3 + 2,34V_4 + 2,13V_5,$$

which would be better than (9.3) for “small”  $C$  and better than (9.2) for “large”  $C$ . (For a connection between the lattice point enumerator and multiple infinite covering compare [11].)

## 10. Dispersion

There are other applications of our theory (compare [23]), for which we give the following example of numerical analysis. Given a bounded real function  $f$  on a compact subset  $A$  of  $E^d$ , one wants to give an approximate algorithm to calculate the (say) supremum of  $f$  on  $A$ . Particularly, for non-differentiable functions, where the usual methods fail, one uses Monte-Carlo methods, i.e. algorithms of search, based on a stochastical choice of points. Choosing such points deterministically, one obtains quasi-Monte-Carlo methods. A measure for uniformity of the distribution of the points  $x_1, \dots, x_n$  in  $A$  is the so-called dispersion

$$d_n(A) := \max_{x \in A} \min_{1 \leq i \leq n} |x - x_i|.$$

If  $\omega_A$  denotes the modul of continuity, we simply have

$$y_n \leq \sup_{x \in A} f(x) \leq y_n + \omega_A(d_n(A))$$

(compare Niederreiter [41], where  $y_n := \max[f(x_1), \dots, f(x_n)]$ ). So, for efficient algorithms, one has to work with points of small dispersion.

As Niederreiter remarks, the dispersion of  $x_1, \dots, x_n$  is the minimal radius  $r$ , such that  $x_1 + rB^d, \dots, x_n + rB^d$  cover  $A$ . The only general inequality, known in numerical analysis so far is then obtained from the trivial remark that the  $n$  balls must at least have total volume  $V(A)$ .

Since for  $A \in \mathcal{K}_0^d$  we obviously have

$$d_n^d(A) \leq \frac{1}{n} \frac{V(A)}{\omega_d} g_n^d,$$

the results on  $k$ -coverings with  $B^d$  yield improvements.

Let us finally remark that the special role of  $B^d$  arises from using the Euclidean distance to define the dispersion. For other norms, this problem is related to finite covering problems with other convex bodies.

## REFERENCES

- [1] BAMBAH, R. P., Geometry of numbers, packing and covering and discrete geometry, *Math. Student* **39** (1971), 117—129. *MR* **50** # 2083.
- [2] BAMBAH, R. P. and ROGERS, C. A., Covering the plane with convex sets, *J. London Math. Soc.* **27** (1952), 304—314. *MR* **13**—971.
- [3] BAMBAH, R. P., ROGERS, C. A. and ZASSENHAUS, H., On coverings with convex domains, *Acta Arith.* **9** (1964), 191—207. *MR* **29** # 3959.
- [4] BAMBAH, R. P. and WOODS, A. C., On plane coverings with convex domains, *Mathematika* **18** (1971), 91—97. *MR* **44** # 5862.
- [5] BETKE, U. und GRITZMANN, P., Über L. Fejes Tóths Wurstvermutung in kleinen Dimensionen, *Acta Math. Hungar.* **43** (1984), 299—307.
- [6] BETKE, U. and GRITZMANN, P., An application of valuation theory to two problems of discrete geometry, *Discrete Math.* **58** (1986), 81—85.
- [7] BETKE, U., GRITZMANN, P. and WILLS, J. M., Slices of L. Fejes Tóth's sausage conjecture, *Mathematika* **29** (1982), 194—201. *MR* **84m**: 52017.
- [8] BETKE, U. and WILLS, J. M., Stetige und diskrete Funktionale konvexer Körper, *Contributions to geometry* (Proc. Geom. Sympos., Siegen, 1978), ed. by J. Tölke and J. M. Wills, Birkhäuser, Basel, 1979, 226—237. *MR* **81m**: 10062.
- [9] BOKOWSKI, J., Obere Schranken zur Gitterpunktsanzahl konvexer Körper, Dissertation, Technische Universität Berlin, Berlin, 1973. *MR* **56** # 8517.
- [10] BOKOWSKI, J., Gitterpunktszahl und Parallelkörpervolumen von Eikörpern, *Monatsh. Math.* **79** (1975), 93—101. *MR* **51** # 363.
- [11] BOKOWSKI, J., HADWIGER, H. and WILLS, J. M., Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche und Gitterpunktszahl konvexer Körper im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum, *Math. Z.* **127** (1972), 363—364. *MR* **47** # 4144.
- [12] DAVENPORT, H., On a principle of Lipschitz, *J. London Math. Soc.* **26** (1951), 179—183. *MR* **13**—323.
- [13] FÁRY, I., Sur la densité des réseaux de domaines convexes, *Bull. Soc. Math. France* **78** (1950), 152—161. *MR* **12**—526.
- [14] FEJES TÓTH, G., New results in the theory of packing and covering, *Convexity and its applications*, ed. by P. M. Gruber and J. M. Wills, Birkhäuser-Verlag, Basel—Boston—Stuttgart, 1983, 318—359.
- [15] FEJES TÓTH, G., GRITZMANN, P. and WILLS, J. M., Sausage-skin problems for finite coverings, *Mathematika* **31** (1984), 118—137.
- [16] FEJES TÓTH, L., Über die dichteste Kreislagerung und dünnste Kreisüberdeckung, *Comment. Math. Helv.* **23** (1949), 342—349. *MR* **11**—455.
- [17] FEJES TÓTH, L., Some packing and covering theorems, *Acta Sci. Math. Szeged.* **12** Pars A (1950), 62—67. *MR* **12**—352.
- [18] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Zweite verbesserte und erweiterte Auflage, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1972. *MR* **50** # 5603.
- [19] FEJES TÓTH, L., Research problem 13, *Period. Math. Hungar.* **6** (1975), 197—199.
- [20] FEJES TÓTH, L. and WILLS, J. M., Enclosing a convex body by homothetic copies, *Geometriae Dedicata* **15** (1984), 279—287.
- [21] FOLKMAN, J. H. and GRAHAM, R. L., A packing inequality for compact convex subsets of the plane, *Canad. Math. Bull.* **12** (1969), 745—752. *MR* **41** # 9109.
- [22] GRAHAM, R. L., WITSENHAUSEN, H. S. and ZASSENHAUS, H. J., On tightest packings in the Minkowski plane, *Pacific J. Math.* **41** (1972), 699—715. *MR* **47** # 961.
- [23] GRITZMANN, P., Finite Packungen und Überdeckungen, Habilitationsschrift, Siegen, 1984.
- [24] GRITZMANN, P., Ein Approximationssatz für konvexe Körper, *Geometriae Dedicata* **19** (1985), 277—286.
- [25] GRITZMANN, P., Über die  $j$ -ten  $k$ -Überdeckungsichten konvexer Körper, *Mh. Math.* (to appear).
- [26] GRITZMANN, P., Finite packing of equal balls, *J. London Math. Soc.* **33** (1986) (to appear).
- [27] GRITZMANN, P., Lattice covering of space with symmetric convex bodies, *Mathematika* **32** (1985), 311—315.
- [28] GRITZMANN, P. and WILLS, J. M., On two finite covering problems of Bambah, Rogers, Woods and Zassenhaus, *Monatsh. Math.* **99** (1985), 279—296.
- [29] GROEMER, H., Über die Einlagerung von Kreisen in einen konvexen Bereich, *Math. Z.* **73** (1960), 285—294. *MR* **22** # 1849.



- [30] GROEMER, H., Über die Zerlegung des Raumes in homothetische konvexe Körper, *Monatsh. Math.* **68** (1964), 21—32. *MR* **30** # 4190.
- [31] GRÜNBAUM, B., *Convex polytopes*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 16, Interscience Publishers, New York, 1967. *MR* **37** # 2085.
- [32] HADWIGER, H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 93, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1957. *MR* **21** # 1561.
- [33] HADWIGER, H., Gitterpunktanzahl im Simplex und Wills'sche Vermutung, *Math. Ann.* **239** (1979), 271—288. *MR* **80d**: 52015.
- [34] KLEINSCHMIDT, P., PACHNER, U. and WILLS, J. M., On L. Fejes Tóth's sausage conjecture, *Israel J. Math.* **47** (1984), 216—226.
- [35] MACBEATH, A. M., A compactness theorem for affine equivalence-classes of convex regions, *Canad. J. Math.* **3** (1951), 54—61. *MR* **13**—577.
- [36] McMULLEN, P., Non-linear angle-sum relations for polyhedral cones and polytopes, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **78** (1975), 247—261. *MR* **52** # 15238.
- [37] McMULLEN, P., Valuations and Euler-type relations on certain classes of convex polytopes, *Proc. London Math. Soc.* (3) **35** (1977), 113—135. *MR* **56** # 6548.
- [38] McMULLEN, P., Convex bodies which tile space by translation, *Mathematika* **27** (1980), 113—121. *MR* **82c**: 52016.
- [39] McMULLEN, P., Convex bodies which tile space, *The geometric vein*, Coxeter Festschrift, Springer-Verlag, New York—Berlin, 1981, 123—128. *MR* **83m**: 52021.
- [40] MOLNÁR, J., On the packing of unit circles in a convex domain, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **22/23** (1979/80), 113—123. *MR* **82e**: 52019.
- [41] NIEDERREITER, H., A quasi-Monte-Carlo method for the approximate computation of the extreme values of a function, *Akadémiai Kiadó*, Budapest, 1983, 523—529.
- [42] OLER, N., An inequality in the geometry of numbers, *Acta Math.* **105** (1961), 19—48. *MR* **24** # A2900.
- [43] PICK, G., Geometrisches zur Zahlenlehre, *Naturwiss. Z. Lotos*, Prag, 1899, 311—319.
- [44] ROGERS, C. A., The closest packing of convex two-dimensional domains, *Acta Math.* **86** (1951), 309—321. *MR* **13**—768. Corrigendum **104** (1960), 305—306.
- [45] ROGERS, C. A., Lattice coverings of space, *Mathematika* **6** (1959), 33—39. *MR* **23** # A2130.
- [46] ROGERS, C. A., *Packing and covering*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 54, Cambridge University Press, New York, 1964. *MR* **30** # 2405.
- [47] VENKOV, B. A., On a class of euclidean polyhedra, *Vestnik Leningrad Univ. Ser. Mat. Fiz. Him.* **9** (1954), No. 2, 11—31 (in Russian). *MR* **20** # 1302.
- [48] WEGNER, G., Über endliche Kreispackungen in der Ebene, *Studia Sci. Math. Hungar.* **21** (1986), 1—28.
- [49] WILLS, J. M., Zur Gitterpunktanzahl konvexer Mengen, *Elem. Math.* **28** (1973), 57—63. *MR* **53** # 3898.
- [50] WILLS, J. M., 3 Research problems in *Period. Math. Hungar.* a) Res. problem 30, **13** (1982), 75—76; b) Res. problem 33, **14** (1983), 189—191; c) Res. problem 35, **14** (1983), 312—314.
- [51] WILLS, J. M., On the density of finite packings, *Acta Math. Hungar.* **46** (1985), 205—210.

(Received May 25, 1984)

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK II  
UNIVERSITÄT SIEGEN  
HÖLDERLINSTRASSE 3  
D—5900 SIEGEN  
FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY



# TYPICAL CONVEX BODIES HAVE SURPRISINGLY FEW NEIGHBOURS IN DENSEST LATTICE PACKINGS

PETER M. GRUBER

*Dedicated to my dear friend Prof. Dr. László Fejes Tóth on the occasion of his 70th birthday*

## Summary

Complementing classical results of Minkowski and Swinnerton—Dyer it is shown that 'by far the most' convex bodies in  $E^d$  have not more than  $2d^2$  neighbours in any of their lattice packings of maximal density. This is extended to  $k$ -critical lattices of centrally symmetric convex bodies.

## 1. Introduction and statement of results

A convex body in  $d$ -dimensional euclidean space  $E^d$  is a compact convex subset of  $E^d$  with non-empty interior. The 'natural' topology on the space  $\mathcal{C}$  of all convex bodies in  $E^d$  is induced by, for example, the metric  $\delta^H$ , defined by

$$\delta^H(C, D) = \max \left\{ \max_{x \in C} \min_{y \in D} |x - y|, \max_{y \in D} \min_{x \in C} |x - y| \right\} \quad \text{for } C, D \in \mathcal{C}.$$

Here  $|\cdot|$  denotes the euclidean norm on  $E^d$ . A translate  $C + \mathbf{l} (= \{\mathbf{x} + \mathbf{l} : \mathbf{x} \in C\})$  of a convex body  $C$  by a vector  $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$  is called a *neighbour* of  $C$  if it meets  $C$ ; here  $\mathbf{0}$  denotes the origin of  $E^d$ . The system of all linear combinations with integer coefficients of  $d$  linearly independent vectors in  $E^d$  is called a *lattice* and the  $d$  vectors are said to form a *basis* of the lattice. The *determinant*  $d(L)$  of a lattice  $L$  is the absolute value of the determinant of a basis of  $L$ . Let  $C$  be a convex body and  $L$  a lattice. Then the system  $\{C + \mathbf{l} : \mathbf{l} \in L\}$  of translates of  $C$  by vectors of  $L$  is called a *lattice packing* of  $C$  with *packing lattice*  $L$  if any two distinct translates have disjoint interiors. Let  $v$  denote the Lebesgue measure on  $E^d$ . The *density* of a lattice packing of  $C$  with packing lattice  $L$  is defined to be  $v(C)/d(L)$ . Roughly speaking it is the fraction of space covered by the bodies of the packing. For every convex body there exist lattice packings of maximal density. See [3, 6, 8, 13, 17].

A packing version of a result of Swinnerton—Dyer [18] ([3, 13]) in the geometry of numbers states that for any lattice packing of maximal density of a convex body it has at least  $d(d+1)$  neighbours. On the other hand the number of neighbours of a convex body in any of its lattice packings cannot exceed  $3^d - 1$  according to a packing version of a theorem of Minkowski [15] ([3, 13]). Here  $3^d - 1$  may be replaced by  $2^{d+1} - 2$  if the body is strictly convex, i.e., if its boundary contains no line segment. It was shown by Watson [19] that for  $2 \leq d \leq 9$  the maximal numbers of neighbours of the (euclidean) unit ball in any of its lattice packings are 6, 12, 24, 40, 72, 126,

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 10E30, 52A43, 52A45; Secondary 10E05, 52A20, 52A40.

*Key words and phrases*. Lattice packings of convex bodies, neighbours, densest lattice packings, critical lattices, boundary lattice points.

240 and 272, respectively. For  $d \leq 8$  the maxima are attained precisely for the packings of maximal density, which are unique up to rotations. For  $d \geq 9$  the lattice packings of maximal density are not yet known, but for  $d=9$  the upper bound 272 is attained for a lattice packing which is unique up to rotations. More general results of Odlyzko and Sloane [16] and Levenstein [14] show that for  $d=24$  the unit ball has at most 196560 neighbours in any of its lattice packings. Equality is attained if the packing lattice is the so-called Leech lattice which plays an important role in recent investigations on finite sporadic simple groups and on lattice packings of the unit ball, see [4]. The aim of this paper is to prove the following

**THEOREM 1.** *The set of those convex bodies in  $\mathbf{E}^d$  which in any of their lattice packings of maximal density have at most  $2d^2$  neighbours, is open and dense in  $\mathcal{C}$ .*

Since lattice packings of maximal density in dimensions  $d > 3$  are known only in the case of euclidean balls ( $d \leq 8$ ) or space filling polytopes such as cubes, one may not expect to be able to explicitly describe more than a few of the convex bodies mentioned in Theorem 1. Nevertheless we shall indicate in our proof how such bodies could possibly be constructed. One prerequisite is that we know for a strictly convex body a lattice packing of maximal density in which the body has as few neighbours as possible. To illustrate the situation the reader is asked to consider the case of the unit ball.

We shall say, a convex body is *centrally symmetric* if it is centrally symmetric about 0. Let  $\mathcal{C}_s$  denote the subspace of  $\mathcal{C}$  consisting of all centrally symmetric convex bodies. Endow  $\mathcal{C}_s$  with the topology induced by the metric  $\delta^H$ . A lattice is called *admissible* for a convex body if it contains no interior point of it, except, possibly, 0. It is called *critical* if it is admissible and has minimal determinant. For each convex body which contains the origin in its interior (and hence, in particular, for centrally symmetric convex bodies) there exist critical lattices. See [3, 8, 13].

The following is a slightly different version of Theorem 1 put into the language of geometry of numbers. We shall not present its proof here although it is considerably simpler in many details.

**THEOREM 2.** *The set of centrally symmetric convex bodies in  $\mathbf{E}^d$  for which any of their critical lattices has at most  $d^2$  pairs of points  $\pm \mathbf{p} \neq 0$  in common with the convex body is open and dense in  $\mathcal{C}_s$ .*

If for a strictly convex centrally symmetric body a critical lattice is known which contains as few boundary points of the body as possible, then it is possible in principle to construct convex bodies as described in Theorem 2.

The close relation between lattice packings of a convex body  $C$  and admissible lattices of its difference body  $C-C(=\{\mathbf{x}-\mathbf{y}: \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C\})$  which is essential for the proof of Theorem 1, breaks down in the case of multiple lattice packings; but it is still possible to give an extension of Theorem 2.

Let  $C$  be a centrally symmetric convex body and  $k \in \{0, 1, \dots\}$ . A lattice is called  $(2k+1)$ -admissible for  $C$  if it contains at most  $k$  pairs  $\pm \mathbf{p} \neq 0$  of interior points of  $C$ . It is called  $(2k+1)$ -critical if it is  $(2k+1)$ -admissible and has minimal determinant among all such lattices. See [1, 13].

For  $A, B \subset \mathbf{E}^d$  and  $\alpha \in \mathbf{R}$  we define  $A \pm B = \{\mathbf{x} \pm \mathbf{y}: \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}$  and  $\alpha A = \{\alpha \mathbf{x}: \mathbf{x} \in A\}$ .

There exist several results on  $(2k+1)$ -admissible lattices of a centrally symmetric convex body  $C$ . Bantegnie [1] remarked that  $C$  contains on its boundary at least  $d(d+1)/2$  pairs  $\pm \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$  of points of any of its  $(2k+1)$ -critical lattices. In order to determine an upper bound we proceed as follows: Let  $L$  be a  $(2k+1)$ -admissible lattice of  $C$ . Then  $L$  contains at most  $k$  pairs  $\pm \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$  of interior points of  $C$ . Hence a result of Cassels [2] ([3, 13]) shows that there is a sublattice  $M$  of  $L$  satisfying the inequality  $d(M) \leq (k+1)d(L)$  and being admissible for  $C$ . Then  $\{(1/2)C + \mathbf{l} : \mathbf{l} \in M\}$  is a lattice packing with density  $v((1/2)C)/d(M)$ . Next we apply a theorem of Hadwiger [10]. It says that the number of neighbours of  $(1/2)C$  in the system  $\{(1/2)C + \mathbf{l} : \mathbf{l} \in L\}$  is at most

$$\left\{ v\left(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C\right) - v\left(\frac{1}{2}C\right) \right\} / \delta d(L).$$

Here  $\delta$  denotes the fraction of space covered by  $\cup \{(1/2)C + \mathbf{l} : \mathbf{l} \in L\}$ , which is at least equal to the fraction of space covered by  $\cup \{(1/2)C + \mathbf{l} : \mathbf{l} \in M\}$ . The latter quantity equals  $v((1/2)C)/d(M)$ . Combining these remarks it follows that the number of neighbours of  $(1/2)C$  in the system  $\{(1/2)C + \mathbf{l} : \mathbf{l} \in L\}$  is at most  $(3^d - 1)(k+1)$ . Equivalently, the  $(2k+1)$ -admissible lattice  $L$  contains at most  $(3^d - 1)(k+1)/2$  pairs  $\pm \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$  of interior or boundary points of  $C$ . A generalization of Theorem 2 is the following

**THEOREM 3.** *Let  $k \in \{0, 1, \dots\}$ . The set of centrally symmetric convex bodies in  $\mathbb{E}^d$  for which any of their  $(2k+1)$ -critical lattices has at most  $k+d^2$  pairs of points  $\pm \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$  in common with the convex body is open and dense in  $\mathcal{C}_s$ .*

A remark similar to that for Theorems 1 and 2 holds for Theorem 3. An outline of the proof of Theorem 3 will be given in Section 4.

It is not known whether the constants  $2d^2$ ,  $d^2$  and  $k+d^2$  in Theorems 1, 2 and 3, respectively, are best possible. Besides this there are several other open problems related to our results. One of them asks to extend Theorem 1 to the case of  $k$ -fold packings. Another problem consists in the investigation of the maximal number of translates of a convex body  $C$  which are neighbours of  $C$  having disjoint interiors. Similar problems arise in the covering case and in many other situations which are of interest in discrete geometry, see [5, 6].

For a survey of results in convexity which are similar in spirit to our theorems the reader is referred to [9].

In the following  $\text{bd}$ ,  $\text{int}$  and  $\text{tr}$  shall denote the boundary, the interior and the transpose, respectively.

## 2. Preliminaries

A basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d\}$  of a lattice will be represented either by the matrix  $B$  having  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$  as column vectors or by the point

$$(b_1^1, \dots, b_1^d, b_2^1, \dots, b_2^d, \dots, b_d^1, \dots, b_d^d)^{\text{tr}} \in \mathbb{E}^{d^2} = \mathcal{E},$$

whichever is more convenient. On the space  $\mathcal{L}$  of all lattices in  $\mathbb{E}^d$  the 'natural' topology is determined by means of the following system of neighbourhoods: For  $L \in \mathcal{L}$  choose a basis  $B = (b_k^i)$ , also let  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ . Then the set of all lattices with bases

$A = (a_k^h)$  such that

$$\|A - B\| = \max_{h,k} |a_k^h - b_k^h| < \varepsilon$$

is a neighbourhood of  $L$ .

Clearly the following holds:

*Let  $C \in \mathcal{C}$  and  $I \in E^d \setminus \{0\}$ . Then  $C+I$  is a neighbour of  $C$  if and only if  $I \in C-C$ .*

The next remark is an immediate consequence of this:

(1) *Let  $C \in \mathcal{C}$  and  $L \in \mathcal{L}$ . Then*

- (i)  *$\{C+I: I \in L\}$  is a lattice packing of  $C$  if and only if  $L$  is admissible for  $C-C$ ;*
- (ii)  *$\{C+I: I \in L\}$  is a lattice packing of  $C$  of maximal density if and only if  $L$  is a critical lattice of  $C-C$ ;*
- (iii) *if  $\{C+I: I \in L\}$  is a lattice packing of  $C$  then the neighbours of  $C$  are precisely the bodies  $C+I$  where  $I \in L \cap (C-C) \setminus \{0\}$ .*

Since the proof of the following proposition is routine we do not present all details of it. For the necessary tools from the geometry of numbers and convexity which are needed consult [3, 12, 13].

(2) *Let  $C, C_1, C_2, \dots \in \mathcal{C}$  and  $L_1, L_2, \dots \in \mathcal{L}$  be such that  $C_1, C_2, \dots \rightarrow C$  and  $\{C_1+I: I \in L_1\}, \{C_2+I: I \in L_2\}, \dots$  are lattice packings of maximal density of  $C_1, C_2, \dots$ , respectively. Then a subsequence of  $L_1, L_2, \dots$  converges to a lattice  $L$  such that  $\{C+I: I \in L\}$  is a lattice packing of maximal density of  $C$  and the number of neighbours of  $C$  in this lattice packing is at least equal to the limit inferior, say  $k$ , of the number of neighbours of  $C_n$  in the lattice packings  $\{C_n+I: I \in L\}$  as  $n \rightarrow \infty$ .*

Note that by a result of Minkowski and (1) we have  $k \leq 3^d - 1$ .  $L_1, L_2, \dots$  are critical lattices of the centrally symmetric convex bodies  $C_1 - C_1, C_2 - C_2, \dots$  which converge to the centrally symmetric convex body  $C - C$ . Hence  $L_1, L_2, \dots$  are all admissible for a suitable euclidean ball with radius  $\varrho > 0$  and centre  $0$ . The Minkowski—Hlawka theorem yields  $d(L_1) \leq v(C_1 - C_1), d(L_2) \leq v(C_2 - C_2), \dots$ . Since  $v(C_n - C_n) \rightarrow v(C - C)$  this shows that the determinants of the lattices  $L_1, L_2, \dots$  are bounded from above. Hence a suitable subsequence of  $L_1, L_2, \dots$  converges to a lattice  $L$  by Mahler's compactness theorem for lattices. After renumbering we may assume that  $L_1, L_2, \dots \rightarrow L$ . The lattice  $L$  is admissible for  $C - C$ ; this follows by noting that each point of  $L \setminus \{0\}$  is a limit of points of  $L_n \setminus \{0\}$ , that  $L_n$  is admissible for  $C_n - C_n$  and, finally, that  $C_n - C_n \rightarrow C - C$ . If  $L$  were not critical for  $C - C$ , there would exist a lattice  $M$  with  $d(M) < d(L)$  and  $M \cap (C - C) = \{0\}$ . This would imply that  $d(M) < d(L_n)$  and  $M \cap (C_n - C_n) = \{0\}$  for all sufficiently large  $n$ , which clearly is impossible. By taking suitable subsequences and renumbering we may assume that  $L_n \cap \text{bd}(C_n - C_n) = \{I_{n1}, \dots, I_{nk}\}$  for all  $n$ . The mutual distances of the points  $I_{n1}, \dots, I_{nk}$  are at least  $\varrho$ . Taking into account that  $C_n - C_n \rightarrow C - C$ , a version of the Bolzano—Weierstraß theorem shows that by taking suitable subsequences and by renumbering we may suppose that  $I_{n1} \rightarrow I_1, \dots, I_{nk} \rightarrow I_k$  for suitable  $I_1, \dots, I_k \in L \cap \text{bd}(C - C)$ . The points  $I_1, \dots, I_k$  have mutual distances at least  $\varrho$  and thus are distinct. This concludes the proof of (2). The following propositions are immediate consequences of (2).



- (3) Let  $D \in \mathcal{C}$  and assume that there are only finitely many different lattice packings of  $D$  of maximal density and let  $L_1, \dots, L_n$  denote the corresponding packing lattices. Then every packing lattice of a convex body which gives a lattice packing of maximal density is arbitrarily close to one of  $L_1, \dots, L_n$  provided the body is sufficiently close to  $D$ .
- (4) The set of convex bodies which in any of their lattice packings of maximal density have at most  $2d^2$  neighbours is open in  $\mathcal{C}$ .

For the results from the geometry of numbers which are used in the following we refer to [3, 13].

If  $M$  is a lattice contained in a lattice  $L$ , i.e. a sublattice of  $L$ , then the index of  $M$  in  $L$  is defined to be  $d(M)/d(L)$ . (Considering  $M$  as a subgroup of  $L$  this is precisely the index in the sense of group theory.) A consequence of Minkowski's convex body theorem is the following.

- (5) Let  $L$  be a critical lattice of a centrally symmetric convex body. Then the points of  $L$  on the boundary of the body generate (in the sense of group theory) a sublattice of  $L$  of index at most  $d!$

Well-known results on sublattices yield the next proposition.

- (6) For a given lattice  $M$  there exist only finitely many lattices of which  $M$  is a sublattice with index less than a given bound.

The following simple lemmas on systems of linear equations will play a crucial role in the proof of Theorem 1.

- (7) Consider a soluble system of a real linear equations, such that the number of equations exceeds the number of unknowns by one. Then by subtracting from the right-hand sides suitable arbitrarily small non-negative real numbers, one obtains a non-soluble system.
- (8) Given a non-soluble system of real linear equations, any sufficiently small change of the right-hand sides again produces a non-soluble system.

### 3. Proof of Theorem 1

The main step of the proof consists in showing the following proposition:

- (9) Let  $C \in \mathcal{C}$  be strictly convex and let  $\mathcal{N}$  be an open neighbourhood of  $C$ . Then there exists a convex body in  $\mathcal{N}$  which in any of its lattice packings of maximal density has at most  $2d^2$  neighbours.

Choose a packing lattice  $L_1$  of  $C$  such that the corresponding lattice packing has maximal density and the number  $2m$  of neighbours of  $C$  is as small as possible. Let the neighbours of  $C$  be  $C \pm \mathbf{l}_i$  where  $\mathbf{l}_i \in L_1$  for  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Since  $C$  is strictly convex, it intersects each neighbour  $C \pm \mathbf{l}_i$  at a unique point  $\mathbf{p}_{\pm i}$ . Obviously,  $\mathbf{l}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{-i}$ . We now formulate and prove the following series of propositions.

- (10) There is a convex body  $D \in \mathcal{N}$  for which the following hold:

- (i) each  $p_{\pm i}$  is a relative interior point of a  $(d-1)$ -dimensional facet  $F_{\pm i}$  of  $D$  for  $i \in \{1, \dots, m\}$ ;
- (ii) the facets  $F_i, F_{-i}$  are parallel for  $i \in \{1, \dots, m\}$ ;
- (iii) the facets  $F_1, F_{-1}, \dots, F_m, F_{-m}$  are pairwise disjoint;
- (iv) there are only finitely many critical lattices of  $D-D$  besides  $L_1$ , say  $L_2, \dots, L_n$ ;
- (v)  $L_j \cap \text{bd}(D-D) = \{\pm l_1, \dots, \pm l_m\}$  for  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

$L_1$  is a critical lattice of  $C-C$  and  $L_1 \cap \text{bd}(C-C) = \{\pm l_1, \dots, \pm l_m\}$  by (1 ii, iii). Thus (5) shows that the lattice  $M$  generated by  $\{\pm l_1, \dots, \pm l_m\}$  is a sublattice of index  $\leq d!$  of  $L_1$ . Since each critical lattice of  $C-C$  has the same determinant as  $L_1$ , the lattice  $M$  has index  $\leq d!$  in each critical lattice of  $C-C$  which contains  $\{\pm l_1, \dots, \pm l_m\}$ . Combined with (6) this shows that there are only finitely many critical lattices of  $C-C$  containing  $\{\pm l_1, \dots, \pm l_m\}$  but no further boundary points of  $C-C$ . Let these lattices be denoted by  $L_1, L_2, \dots, L_n$ . Next choose a convex body  $D \in \mathcal{N}$  with the following properties:  $C \subset D$ ;  $C \cap \text{bd } D = \{p_{\pm 1}, \dots, p_{\pm m}\}$ ; for each  $i$  the point  $p_{\pm i}$  is contained in the relative interior of a facet  $F_{\pm i}$  of  $D$ ; all these facets are disjoint;  $F_i$  and  $F_{-i}$  are parallel and, finally, each lattice  $L_j$  is admissible for  $D-D$  with  $L_j \cap \text{bd}(D-D) = \{\pm l_1, \dots, \pm l_m\}$ . This disposes of (10 i, ii, iii, v). We show that  $L_1, \dots, L_n$  are precisely the critical lattices of  $D-D$ . Since  $C-C \subset D-D$  and the lattices  $L_1, \dots, L_n$  are critical for  $C-C$  and admissible for  $D-D$ , they are critical for  $D-D$  as well. Note that by our choice of  $L_1$  and by (1 ii) each critical lattice of  $C-C$  contains at least  $2m$  boundary points of  $C-C$ . Suppose now that  $N$  is a critical lattice for  $D-D$ . Then  $d(N) = d(L_1)$  and  $N$  is admissible for  $C-C (\subset D-D)$  and thus critical for  $C-C$ . Hence  $N \cap \text{bd}(C-C)$  contains at least  $2m$  points as remarked before. On the other hand the fact that  $N$  is admissible for  $D-D$ , the inclusion  $C-C \subset D-D$  and the equality  $C \cap \text{bd } D = \{p_{\pm 1}, \dots, p_{\pm m}\}$  together imply that

$$N \cap \text{bd}(C-C) \subset (C-C) \cap \text{bd}(D-D) = \{\pm l_1, \dots, \pm l_m\}.$$

Hence we find that  $N \cap \text{bd}(C-C) = \{\pm l_1, \dots, \pm l_m\}$ . Being critical for  $C-C$  the lattice  $N$  thus coincides with one of  $L_1, \dots, L_n$ . This proves (10 iv), concluding the proof of (10).

Let  $B_j = (b_{j1}, \dots, b_{jd})$  be a basis of  $L_j$  for  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Then there are integers  $g_{ji}^k$  such that

$$(11) \quad l_i = \sum_k g_{ji}^k b_{jk} \quad \text{for } i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Here and in the following the summation over  $k$  is extended from 1 to  $d$ . From (10 i, ii, iii) we deduce that

$$(12) \quad l_i \text{ is a relative interior point of the facet } G_i = F_i - F_{-i} \text{ of } D-D \text{ for } i \in \{1, \dots, m\} \text{ and (that) the facets } G_1, -G_1, \dots, G_m, -G_m \text{ are disjoint.}$$

We now choose  $\alpha, \beta > 0$  so small that

$$(13) \quad \text{bd}(D-D) \cap \{x: |x_i - l_i| < 2\alpha\} \subset G_i \quad \text{for } i \in \{1, \dots, m\},$$

and that



(14) for each lattice  $L$  which has a basis  $B=(b_1, \dots, b_d)$  such that  $\|B-B_j\| < \beta$  for suitable  $j \in \{1, \dots, n\}$ , the following inequalities hold:  $|\sum_k g_{ji}^k b_k - 1| < \alpha$  for  $i \in \{1, \dots, m\}$  and no point of  $L$  except, possibly,  $0, \pm \sum_k g_{ji}^k b_k, i \in \{1, \dots, m\}$ , is contained in  $D-D$ .

Such a choice of  $\beta$  is possible by (10 iv, v) and (11). Let  $n_i$  be an exterior normal vector of the facet  $G_i$  of  $D-D$  and thus of the facet  $F_i$  of  $D$ , such that

$$(15) \quad G_i = F_i - F_{-i} = (D-D) \cap \{x: x \cdot n_i = 1\} \quad \text{for } i \in \{1, \dots, m\},$$

where the dot denotes the ordinary inner product in  $E^d$ .

If  $m \leq d^2$ , then (9) holds for  $D$ . Thus we may suppose from now on that

$$(16) \quad m > d^2.$$

Consider the  $n$  systems of linear equations:

$$\begin{array}{ll} \sum_k g_{11}^k y_k \cdot n_1 = 1 & \sum_k g_{n1}^k y_k \cdot n_1 = 1 \\ \dots, \dots, \dots & \dots, \dots, \dots \\ \sum_k g_{1m}^k y_k \cdot n_m = 1 & \sum_k g_{nm}^k y_k \cdot n_m = 1. \end{array}$$

Each of them consists of  $m$  linear equations in  $d^2$  variables  $Y=(y_1, \dots, y_d)$ . The first one has as a solution  $B_1=(b_{11}, \dots, b_{1d})$ , ..., the last one has as a solution  $B_n=(b_{n1}, \dots, b_{nd})$ . Note that (14) holds. By considering consecutively all possible subsystem of  $d^2+1$  linear equations of each of these  $n$  systems and applying repeatedly (7) and (8) one arrives after finitely many steps at the following proposition:

(17) *There exist arbitrarily small  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \geq 0$ , such that each of the  $n$  systems of linear equations*

$$\begin{array}{ll} \sum_k g_{11}^k y_k \cdot n_1 = 1 - \varepsilon_1 & \sum_k g_{n1}^k y_k \cdot n_1 = 1 - \varepsilon_1 \\ \dots, \dots, \dots & \dots, \dots, \dots \\ \sum_k g_{1m}^k y_k \cdot n_m = 1 - \varepsilon_m & \sum_k g_{nm}^k y_k \cdot n_m = 1 - \varepsilon_m \end{array}$$

*has the property that any subsystem consisting of  $d^2+1$  equations is non-soluble.*

For given  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \geq 0$  consider the following construction: The facet  $F_{\pm i}$  of  $D$  has exterior normal vector  $\pm n_i$  for  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Translate the supporting half-space of  $D$  with exterior normal vector  $\pm n_i$  by  $\mp \varepsilon_i n_i / |n_i|^2$ . Consider the intersection of  $D$  and all these translated supporting half-spaces. If  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  are sufficiently small this gives a convex body  $E$ . Obviously, we may choose  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \geq 0$  such that (17) is satisfied and so small that for the resulting convex body  $E$  the following statements hold:

$$(18) \quad E \in \mathcal{N},$$

(note that  $D \in \mathcal{N}$  and  $\mathcal{N}$  is open);

(19)  $E-E$  has disjoint facets

$$\pm H_i = \pm((E-E) \cap \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_i = 1 - \varepsilon_i\}), \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

(observe (15), (12));

(20)  $\text{bd}(E-E) \cap \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{l}_i| < \alpha\} \subset H_i$  for  $i \in \{1, \dots, m\}$

(see (13));

(21) any critical lattice of  $E-E$  has a basis  $B$  such that  $\|B - B_j\| < \beta$  for suitable  $j \in \{1, \dots, n\}$

(see (10 iv), (3), (1 ii)).

Next we show:

(22) Let  $L$  be a critical lattice of  $E-E$ . Then  $L$  contains at most  $d^2$  pairs  $\pm \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$  of boundary points of  $E-E$ .

By (21) there exists a basis  $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)$  of  $L$  such that for suitable  $j \in \{1, \dots, m\}$  we have  $\|B - B_j\| < \beta$ . Hence (14) shows that the only points of  $L$  which are possibly contained in  $E-E (\subset D-D)$  are

$$(23) \quad \mathbf{0}, \pm \sum_k g_{ji}^k \mathbf{b}_k, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Since  $L$  is a critical lattice of  $E-E$  some of these points are contained in the boundary of  $E-E$  while the remaining ones are exterior points of  $E-E$  (except for  $\mathbf{0}$ ). Since by (14) again

$$|\sum_k g_{ji}^k \mathbf{b}_k - \mathbf{l}_i| < \alpha \quad \text{for } i \in \{1, \dots, m\},$$

(19), (20) yield that those among the points in (23) which belong to  $\text{bd}(E-E)$ , say

$$\pm \sum_k g_{ji}^k \mathbf{b}_k \quad \text{for } i \in \{i_1, \dots, i_l\},$$

are contained in the facets  $H_i$ ,  $i \in \{i_1, \dots, i_l\}$ , respectively. Hence  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)$  satisfy the  $i_1, \dots, i_l$ 'th equation of the  $j$ 'th system in (17). This is impossible unless  $l \leq d^2$  which proves (22).

Now (9) follows from (22), (1 ii) and (18) in the case  $m > d^2$ . Hence (9) holds generally. Theorem 1 is an immediate consequence of (9), of the fact that the strictly convex bodies are dense in  $\mathcal{C}$ , and of (4).

#### 4. Outline of the proof of Theorem 3

Our proof of Theorem 1 consisted in proving a series of propositions. Here only those propositions will be stated which lead to a proof of Theorem 3 adapted, of course, in order to cover the slightly different situation. Fix  $k \in \{0, 1, \dots\}$  and

let  $C, C_1, C_2, \dots \in \mathcal{C}_s$  be such that  $C_1, C_2, \dots \rightarrow C$  and let  $L_1, L_2, \dots \in \mathcal{L}$  be  $(2k+1)$ -critical lattices of  $C_1, C_2, \dots$ , respectively. Then a suitable sub-

sequence of  $L_1, L_2, \dots$  converges to a  $(2k+1)$ -critical lattice  $L$  of  $C$ . The number of points in  $L \cap \text{bd } C$  is at least equal to the limit inferior of the number of points in  $L_n \cap \text{bd } C_n$  as  $n \rightarrow \infty$ .

Immediate consequences of this proposition are the following facts:

Let  $D \in \mathcal{C}_s$  have only finitely many  $(2k+1)$ -critical lattices, say  $L_1, \dots, L_n$ . Then any  $(2k+1)$ -critical lattice of a convex body in  $\mathcal{C}_s$  is arbitrarily close to one of  $L_1, \dots, L_n$  provided the body is sufficiently close to  $D$ .

- (24) The set of convex bodies in  $\mathcal{C}_s$  for which any  $(2k+1)$ -critical lattice contains at most  $d^2$  pairs  $\pm \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$  of boundary points, is open in  $\mathcal{C}_s$ .

Van der Corput's generalization of Minkowski's convex body theorem yields the next result:

Let  $L$  be a  $(2k+1)$ -critical lattice of a convex body  $C \in \mathcal{C}_s$ . Then the points of  $L$  on  $\text{bd } C$  generate a sublattice of  $L$  of index at most  $(k+1)d!$ .

Propositions (6), (7), (8) remain true without change. The main step of the proof of Theorem 3 proceeds through the following proposition:

- (25) Let  $C \in \mathcal{C}_s$  be strictly convex and let  $\mathcal{N}(\subset \mathcal{C}_s)$  be an open neighbourhood of  $C$ . Then there exists a convex body in  $\mathcal{N}$  such that each of its  $(2k+1)$ -critical lattices contains at most  $d^2$  pairs  $\pm \mathbf{p}$  of boundary points of the body.

Choose a  $(2k+1)$ -critical lattice  $L_1$  of  $C$  such that  $L_1 \cap \text{bd } C = \{\pm \mathbf{l}_1, \dots, \pm \mathbf{l}_m\}$  with  $m$  minimal. There are only finitely many  $(2k+1)$ -critical lattices of  $C$  which intersect  $\text{bd } C$  in  $\{\pm \mathbf{l}_1, \dots, \pm \mathbf{l}_m\}$ . Let  $\{\pm \mathbf{q}_1, \dots, \pm \mathbf{q}_l\}$  be the points  $\neq \mathbf{0}$  of these lattices in  $\text{int } C$ .

There is a convex body  $D \in \mathcal{N}$  with  $\{\pm \mathbf{q}_1, \dots, \pm \mathbf{q}_l\} \subset \text{int } D$ ,  $\{\pm \mathbf{l}_1, \dots, \pm \mathbf{l}_m\} \subset \text{bd } D$  such that the following is true:

- (i) each  $\pm \mathbf{l}_i$  is a relative interior point of a facet  $\pm G_i$  of  $D$  for  $i \in \{1, \dots, m\}$ ;
- (ii) the facets  $\pm G_1, \dots, \pm G_m$  are pairwise disjoint;
- (iii) there are only finitely many  $(2k+1)$ -critical lattices of  $D$ , besides  $L_1$ , say  $L_2, \dots, L_n$ ;
- (iv)  $L_j \cap \text{int } D \subset \{\mathbf{0}, \pm \mathbf{q}_1, \dots, \pm \mathbf{q}_l\}$ ,  $L_j \cap \text{bd } D = \{\pm \mathbf{l}_1, \dots, \pm \mathbf{l}_m\}$  for  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Let  $B_j, g_{ji}^*, \mathbf{n}_i$  be chosen as in the proof of Theorem 1 and pick  $\alpha, \beta, > 0$  so small that the following assertions hold:

$\text{bd } D \cap \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{l}_i| < 2\alpha\} \subset G_i$  for  $i \in \{1, \dots, m\}$ ; for each lattice  $L$  with basis  $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)$  such that  $\|B - B_j\| < \beta$  for suitable  $j \in \{1, \dots, n\}$  we have  $|\sum_k g_{ji}^* \mathbf{b}_k - \mathbf{l}_i| < \alpha$  for  $i \in \{1, \dots, m\}$ ; of the points of  $L$  only  $\mathbf{0}$ , the points of  $L$  in the balls  $\{\mathbf{x} : |\mathbf{x} \pm \mathbf{q}_i| < \alpha\}$ ,  $i \in \{1, \dots, l\}$  and, possibly, some of the points  $\pm \sum_k g_{ij}^* \mathbf{b}_k$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , are contained in  $\text{int } D$ .

Then instead of (15), we have

$$G_i = D \cap \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_i = 1\} \quad \text{for } i \in \{1, \dots, m\}.$$

If  $m \leq d^2$ , the body  $D$  satisfies (25). Suppose now that  $m > d^2$ . Proposition (17) remains unchanged. Choose  $E \in \mathcal{N}$  as in the proof of Theorem 1 such that

$E \in \mathcal{N}$ ;

$E$  has disjoint facets  $\pm H_i = E \cap \{x: x \cdot n_i = 1 - \varepsilon_i\}$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ ;

$\text{int } E \supset \{x: |x - q_i| < \alpha\}$  for  $i \in \{1, \dots, l\}$ ;

$\text{bd } E \cap \{x: |x - l_i| < \alpha\} \subset H_i$  for  $i \in \{1, \dots, m\}$ ; any  $(2k+1)$ -critical lattice of  $E$  has a basis  $B$  such that  $\|B - B_j\| < \beta$  for suitable  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Then

any  $(2k+1)$ -critical lattice of  $E$  contains at most  $d^2$  pairs  $\pm p$  of points of  $\text{bd } E$ .

Hence for  $m > d^2$ , the body  $E$  satisfies (25). Theorem 3 now follows from (24) and (25).

ACKNOWLEDGEMENT. Many thanks are due to Professor Hlawka who in a discussion on related topics pointed out Swinnerton-Dyer's result referred to in the introduction which ultimately led to the results in this article. For many valuable suggestions I am obliged to Professors Schnitzer and Zassenhaus.

#### REFERENCES

- [1] BANTEGNIE, R., Réseaux multipermis et multicritiques, *Math. Z.* **108** (1969), 173—190. *MR* **39** # 128.
- [2] CASSELS, J. W. S., On the subgroups of infinite Abelian groups, *J. London Math. Soc.* **33** (1958), 281—284. *MR* **20** # 5803.
- [3] CASSELS, J. W. S., *An introduction to the geometry of numbers*, Second printing, corrected, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 99, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1971. *MR* **46** # 5257.
- [4] CONWAY, J. H. and SLOANE, N. J. A., The Leech lattice, sphere packings, and related topics, Springer, Berlin—New York (to appear).
- [5] FEJES TÓTH, G., New results in the theory of packing and covering, *Convexity and its applications*, ed. by P. M. Gruber and J. M. Wills, Birkhäuser, Basel—Boston—Stuttgart, 1983, 318—359.
- [6] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Zweite verbesserte und erweiterte Auflage, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 65, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1972. *MR* **50** # 5603.
- [7] GROEMER, H., Über Treffanzahlen in Figurengittern, *Monatsh. Math.* **74** (1970), 21—29. *MR* **41** # 9111.
- [8] GRUBER, P. M., Geometry of numbers, *Contributions to geometry* (Proc. Geom. Sympos., Siegen, 1978), ed. by J. Tölke and J. M. Wills, Birkhäuser, Basel—Boston—Stuttgart, 1979, 186—225. *MR* **81h**: 10044.
- [9] GRUBER, P. M., Results of Baire category type in convexity, *Discrete geometry and convexity*, ed. by J. E. Goodman, E. Lutwak, J. Malkevitch, and R. Pollack, *Ann. New York Acad. Sci.* **440** (1985), 163—169.
- [10] HADWIGER, H., Überdeckung des Raumes durch translationsgleiche Punktmengen und Nachbarnzahl, *Monatsh. Math.* **73** (1969), 213—217. *MR* **40** # 7952.
- [11] HLAWKA, E., Zur Überdeckung der Ebene durch konvexe Scheiben, *Anz. Math.-Nat. Kl. Österreich. Akad. Wiss.* (1957), 79—82.
- [12] LEICHTWEIB, K., *Konvexe Mengen*, Hochschultext, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1980. *MR* **81j**: 52001.
- [13] LEKKERKERKER, C. G., *Geometry of numbers*, Bibliotheca Mathematica, Vol. 8, Wolters—Noordhoff, Groningen, North-Holland, Amsterdam, 1969. *MR* **42** # 5915.
- [14] LEVENŠTEIN, V. I., On bounds for packings in  $n$ -dimensional euclidean space, *Dokl. Akad.*

- Nauk SSSR* **245** (1979), 1299—1303; *Soviet Math. Dokl.* **20** (1979), 417—421. *MR* **80d**: 52017.
- [15] MINKOWSKI, H., *Geometrie der Zahlen*, Bibliotheca Mathematica Teubneriana, Band 40, 1896, Johnson Reprint Corporation, New York, 1968. *MR* **40** # 2515.
- [16] ODLYZKO, A. M. and SLOANE, N. J. A., New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in  $n$  dimensions, *J. Combin. Theory Ser. A* **26** (1979), 210—214. *MR* **81d**: 52010.
- [17] ROGERS, C. A., *Packing and covering*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 54, Cambridge University Press, New York, 1964. *MR* **30** # 2405.
- [18] SWINNERTON-DYER, H. P. F., Extremal lattices of convex bodies, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **49** (1953), 161—162. *MR* **14**—540.
- [19] WATSON, G. L., The number of minimum points of a positive quadratic form, *Dissertationes Math. Rozprawy Mat.* **84** (1971), 42 pp. *MR* **47** # 6610.

(Received June 1, 1984)

INSTITUT FÜR ANALYSIS, TECHNISCHE MATHEMATIK  
UND VERSICHERUNGSMATHEMATIK  
TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN  
WIEDNER HAUPTSTRASSE 8—10  
A—1040 WIEN  
AUSTRIA





## SOME ISOMETRIC ACTIONS WITH ORTHOGONALLY TRANSVERSAL SUBMANIFOLDS ON RIEMANNIAN SYMMETRIC SPACES

J. SZENTHE

*Dedicated to Professor L. Fejes Tóth on his 70th birthday*

Let  $M$  be a Riemannian manifold  $K$  a connected Lie group and consider a smooth action  $\alpha: K \times M \rightarrow M$ , then the map  $\alpha_g: M \rightarrow M$  defined for  $g \in K$  by

$$\alpha_g(z) = \alpha(g, z), \quad z \in M$$

is a diffeomorphism. The action  $\alpha$  is said to be *isometric* if every  $\alpha_g$ ,  $g \in K$  is an isometry of  $M$ . Assume now that  $M$  is complete and consider an isometric action  $\alpha$  on  $M$ ; a submanifold  $L \subset M$  is said to be *orthogonally transversal for the action*  $\alpha$  if the following two conditions are satisfied:

1. The submanifold  $L$  intersects each orbit of  $\alpha$ ;
2. At any point  $z \in L$  the tangent space  $T_z L$  is orthogonal to the tangent space  $T_z K(z)$  of the orbit of  $z$ .

Isometric actions admitting orthogonally transversal submanifolds have remarkable properties; in fact, the concepts of Weyl group and Weyl chamber, as introduced in case of the adjoint action of a compact connected Lie group, generalize to such actions in a natural way [5]. Thus the question as to non-trivial examples of isometric actions admitting orthogonally transversal submanifolds is a gripping one. A procedure yielding a list of such non-trivial actions on Riemannian symmetric spaces is presented below. In fact, a construction which produces isometric actions admitting orthogonally transversal submanifolds on Riemannian symmetric spaces was given by R. Hermann [2]. It seems, however, that concrete examples generated by the construction of Hermann have not been considered up to now. Yet, as subsequent results show, non-trivial examples are numerous. In fact, the procedure presented below yields all the cases where the construction of Hermann applies for simply connected irreducible Riemannian symmetric spaces of type II. In addition, some observations as to the position of the origin of the symmetric space in a Weyl chamber are made as well.

---

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 53C20; Secondary 57S15.

*Key words and phrases*. Riemannian manifolds, compact Lie groups of differentiable transformations, group actions, symmetric spaces.

# 1. A construction of isometric actions on Riemannian symmetric spaces with orthogonally transversal submanifolds

First of all a concise but complete account of those facts is presented which are fundamental for the Hermann construction of isometric actions with orthogonally transversal submanifolds on Riemannian symmetric spaces.

Consider a Riemannian symmetric space  $M=G/H$ , its orthogonal symmetric Lie algebra  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$  and the canonical reductive decomposition  $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$ . Assume that an involutive Lie algebra automorphism

$$\tau: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

is given and consider the resulting reductive decomposition  $\mathfrak{g}=\mathfrak{r}\oplus\mathfrak{k}$  where  $\mathfrak{k}, \mathfrak{r}$  are the eigenspaces of  $\tau$  corresponding to the eigenvalues 1,  $-1$ , respectively. Presume now that  $\sigma$  and  $\tau$  commute and let  $\mathfrak{z}\subset\mathfrak{g}$  be  $F(\sigma\circ\tau)$  the fixed point set of the involutive automorphism  $\sigma\circ\tau$ . Then the inclusions

$$\sigma(\mathfrak{z})\subset\mathfrak{z} \quad \text{and} \quad \tau(\mathfrak{z})\subset\mathfrak{z}$$

are obviously valid. Moreover, a reductive decomposition of the subalgebra  $\mathfrak{z}$  is given by  $\mathfrak{z}=(\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r})\oplus(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k})$  and consequently

$$(\mathfrak{z}, \mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}, \sigma|_{\mathfrak{z}}=\tau|_{\mathfrak{z}})$$

is an orthogonal symmetric Lie algebra as some obvious simple arguments show. Moreover, the vector space direct sum decomposition  $\mathfrak{m}=(\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r})\oplus(\mathfrak{m}\cap\mathfrak{k})$  is valid, too, since  $\tau(\mathfrak{m})\subset\mathfrak{m}$  obviously holds.

The following proposition yields the Hermann construction of isometric actions with orthogonally transversal submanifolds, where the original assumptions are slightly generalized.

**PROPOSITION.** *Let  $M=G/H$  be a Riemannian symmetric space,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$  its orthogonal symmetric Lie algebra,  $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$  the canonical reductive decomposition,*

$$\tau: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

*an involutive Lie algebra automorphism which commutes with  $\sigma$  and  $\mathfrak{g}=\mathfrak{r}\oplus\mathfrak{k}$  the reductive decomposition defined by  $\tau$ . If  $\mathfrak{k}$  is a maximal commutative subalgebra included in  $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r}$  and  $K, T\subset G$  the Lie subgroups defined by  $\mathfrak{k}, \mathfrak{k}\subset\mathfrak{g}$ , respectively, then  $L=T(o)$  the orbit of the origin  $o$  under the canonical action of  $T$  is orthogonally transversal to the canonical action of  $K$ .*

**PROOF.** In order to see that  $L$  intersects each orbit of the canonical action of  $K$ , consider an arbitrary orbit  $K(z)$ ,  $z\in M$  and a geodesic segment

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow M$$

with  $\gamma(0)=o$ ,  $\gamma(1)\in K(z)$  and with length equal to the distance of the orbits  $K(o)$ ,  $K(z)$ . Since  $K$  is evidently closed such a geodesic segment  $\gamma$  does exist. The tangent vector  $\dot{\gamma}(0)$  is an element of the normal space  $N_o K(o)$  of the orbit  $K(o)$ . But the normal space  $N_o K(o)$  is identified with the subspace  $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r}$  under the canonical identification of  $T_o M$  with  $\mathfrak{m}$ . Since  $(\mathfrak{z}, \mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}, \sigma|_{\mathfrak{z}}=\tau|_{\mathfrak{z}})$  is an orthogonal symmetric Lie algebra,

the maximal commutative subalgebras of  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$  are conjugate under the adjoint action of  $H \cap K$  and they cover  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$  ([1] pp. 247–248). But the latter adjoint action is canonically identified with the linear isotropy action of  $K$  at the origin  $o$ . Consequently, there is a  $g \in H \cap K$  such that for the transformed geodesic segment

$$\bar{\gamma}(\tau) = \alpha(g, \gamma(\tau)) \quad \tau \in [0, 1],$$

the following holds:  $\bar{\gamma}(0) \in \mathfrak{t}$ . Since the orbit  $L = T(o)$  is totally geodesic, the geodesic  $\bar{\gamma}$  lies in  $L$ . On the other hand  $\bar{\gamma}(1) \in K(z)$  holds by the definition of  $\bar{\gamma}$ . Consequently, the submanifold  $L$  intersects the orbit  $K(z)$ .

The fact that  $L$  intersects orthogonally the orbits of  $K$  follows as a direct consequence of the following general result of Hermann [3]: Let  $L$  be a complete totally geodesic immersed submanifold of non-positive sectional curvature in a Riemannian manifold  $M$  and  $K$  a connected group of isometries of  $M$ . If  $L$  is orthogonal to the orbit  $K(x)$  for a point  $x \in L$  then it is orthogonal to  $K(z)$  for every  $z \in L$ . In fact, the original assumption that  $K$  is compact can be dropped.

Although the preceding proposition yields the existence of orthogonally transversal submanifolds, Hermann stated only the existence of fundamental domains [2]. Actually, the existence of fundamental domains follows from that of orthogonally transversal submanifolds since the generalized Weyl chambers satisfy all those conditions which define the fundamental domains [5].

## 2. Isometric actions with orthogonally transversal submanifolds on simply connected irreducible Riemannian symmetric spaces of type II

The prerequisites for the Hermann construction are provided by any involutive Lie algebra automorphism which commutes with the canonical one of the symmetric space as the preceding proposition shows. According to the following theorem a concise account of the resulting subgroups is available in case of simply connected irreducible Riemannian symmetric spaces of type II.

**THEOREM.** *Let  $A$  be a simply connected irreducible Riemannian symmetric space of type II, that is, a compact simple Lie group with a biinvariant metric. If  $E \subset A$  is a subgroup such that  $(A, E)$  is a symmetric pair then the isometric action*

$$(E \times E) \times A \rightarrow A$$

*given by  $((g, h), z) \mapsto gzh^{-1}$  for  $((g, h), z) \in (E \times E) \times A$  admits orthogonally transversal submanifolds and conversely, any action on  $A$  given by the Hermann construction is obtainable in this way.*

**PROOF.** In fact, the largest connected group of isometries of  $A$  is  $G = A \times A$  with the action given by  $((g, h), z) \mapsto gzh^{-1}$  for  $((g, h), z) \in (A \times A) \times A$ . Moreover, the canonical involutive automorphism  $\sigma$  of  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}$  is given by

$$\sigma((X, Y)) = (Y, X) \quad \text{where } X, Y \in \mathfrak{a}.$$

Consequently, the isotropy subalgebra  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  and its canonical reductive complement  $\mathfrak{m}$  are given by

$$\mathfrak{h} = \{(X, X) | X \in \mathfrak{a}\} \quad \text{and} \quad \mathfrak{m} = \{(Y, -Y) | Y \in \mathfrak{a}\}.$$

Let now  $\mu: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$  be an involutive Lie algebra automorphism and  $\mathfrak{a} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{e}$  the corresponding reductive decomposition. Then  $\tau = \mu \oplus \mu$  is an involutive automorphism of  $\mathfrak{g}$  commuting with  $\sigma$  and conversely, any involutive automorphism of  $\mathfrak{g}$  commuting with  $\sigma$  is obtainable with such a  $\mu$  in the form  $\mu \oplus \mu$  [4]. But the fixed point set  $\mathfrak{k} = F(\tau)$  is given by

$$\mathfrak{k} = \{(X, Y) | X, Y \in \mathfrak{e}\} = \mathfrak{e} \oplus \mathfrak{e}.$$

But  $\mathfrak{e}$  defines a closed connected subgroup  $E$  of  $G$  such that  $(G, E)$  is a symmetric pair.

**COROLLARY.** *The isometric actions with orthogonally transversal submanifolds obtainable by the Hermann construction on simply connected irreducible Riemannian symmetric spaces of type II are given in the following table up to isomorphisms:*

The Riemannian symmetric space $A$	The closed subgroup $E \subset A$
$SU(n)$ , $n \geq 2$	$SU(p+q) \cap [U(p) \times U(q)]$ , $p+q=n$ ; $SO(n)$ ; $Sp(k)$ , $n=2k$ .
$Sp(n)$ , $n > 2$	$Sp(p) \times Sp(q)$ , $p+q=n > 2$ ; $U(n)$ , $n > 2$ .
$E_6$	$SU(6)SU(2)$ ; $SO(10)SO(2)$ ; $F_4$ ; $Sp(4)/\{\pm I\}$
$E_7$	$SU(8)/\{\pm 1\}$ ; $SO(12)SU(2)$ ; $E_6 SO(2)$
$E_8$	$SO(16)$ ; $E_7 SU(2)$
$F_4$	$Spin(9)$ ; $Sp(3)Sp(1)$
$G_2$	$SO(4)$

### 3. The position of the origin in a Weyl chamber

The orbit structure of an isometric action admitting orthogonally transversal submanifolds is canonically isomorphic with a Weyl chamber of the action where the singular orbits are precisely those which correspond to the boundary points of the Weyl chamber [5]. Subsequently, the position of the origin  $o = H \in G/H$  in a Weyl chamber is studied and thus a result on the type of the orbit  $K(o)$  is obtained as well.

Let  $\alpha: K \times M \rightarrow M$  be an isometric action and  $N_z K(z)$  the normal space to the orbit  $K(z)$  at  $z$  where  $z \in M$  is arbitrary. An element  $v \in N_z K(z)$  is called an *isotropy fixed normal vector* to the orbit provided that

$$v = T_z \alpha_g v \quad \text{for} \quad g \in K_z.$$

Let  $Q_z \subset N_z K(z)$  be the subspace formed by the isotropy fixed normal vectors to  $K(z)$  at  $z$ . It is a standard basic fact that there is a neighbourhood  $U$  of  $z$  such that the set of those points in  $U \cap \exp_z N_z K(z)$  which have orbits of the same type as

$K(z)$  is equal to

$$U \cap \exp_z Q_z.$$

In particular,  $K(z)$  is a principal orbit if and only if  $Q_z = N_z K(z)$  holds.

**LEMMA.** Let  $M = G/H$  be a Riemannian symmetric space where  $G$  is compact ( $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma$ ) the associated symmetric Lie algebra and  $\tau: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  an involutive Lie algebra automorphism commuting with  $\sigma$ . Let  $\alpha: K \times M \rightarrow M$  be the canonical action of the resulting subgroup  $K$ . Then the subspace  $Q_o$  is equal to the maximal abelian ideal included in  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$  provided that  $H \cap K$  is connected.

**PROOF.** Consider the reductive decomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$  and the orthogonal one

$$\mathfrak{m} = (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}) \oplus (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{f}).$$

Then under the canonical identification of  $T_o M$  with  $\mathfrak{m}$ , the subspace  $N_o G(o)$  is identified with  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$ . Since  $K_o = H \cap K$  is connected, the subspace  $Q_o$  is identified with the subspace

$$\{Y \mid [Z, Y] = 0 \text{ for } Z \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{f} \text{ where } Y \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}\}.$$

Since  $G$  is compact, there is an  $\text{Ad}(G)$ -invariant interior product,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on the Lie algebra  $\mathfrak{g}$ . But then the following holds with respect to the interior product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\langle [Y, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{f}], \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r} \rangle = \langle \mathfrak{h} \cap \mathfrak{f}, [Y, \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}] \rangle$$

for  $Y \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$ . Consequently  $[Y, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{f}] = \{0\}$  if and only if  $[Y, \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}] = \{0\}$  is valid, since  $[Y, \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{f}$  holds.

**THEOREM.** Let  $M = G/H$  be a Riemannian symmetric space where  $G$  is compact ( $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma$ ) the associated symmetric Lie algebra and  $\tau: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  an involutive automorphism commuting with  $\sigma$  and  $\alpha: K \times M \rightarrow M$  the canonical action of the group  $K$  where  $H \cap K$  is connected. Then  $o$  is interior point of a Weyl chamber of  $\alpha$  if and only if  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$  is abelian. Furthermore,  $o$  is a vertex of a Weyl chamber of  $\alpha$  if and only if there is no proper abelian ideal of  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$ .

**PROOF.** In fact,  $o$  is an interior point of a Weyl chamber if and only if  $K(o)$  is a non-singular orbit [5]. On the other hand,  $o$  is a vertex of a Weyl chamber if and only if  $K(o)$  is isolated in the set of orbits of the same type [5]. Therefore, the theorem follows from the preceding lemma.

#### REFERENCES

- [1] HELGASON, S., *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics, 80, Academic Press, New York—London, 1978. MR 80k: 53081.
- [2] HERMANN, R., Totally geodesic orbits of groups of isometries, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 65=Indag. Math. 24 (1962), 291—298. MR 25 # 2554.
- [3] HERMANN, R., On the existence of a fundamental domain for Riemannian transformation groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 13 (1962), 489—494. MR 25 # 1519.
- [4] LEUNG, D. S. P., On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces, *Indiana Univ. Math. J.* 24 (1974), 327—339.
- [5] SZENTHE, J., Orthogonally transversal submanifolds and the generalization of the Weyl group, *Period. Math. Hungar.* 15 (1984), 281—299.

(Received June 11, 1984)

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM  
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR  
GEOMETRIA TANSZÉK  
SZTOCZEK U. 4.  
H-1521 BUDAPEST  
HUNGARY





# EXTREMALEIGENSCHAFTEN DER REGULÄREN 3-ZONOTOPE

J. LINHART

*Herrn Prof. László Fejes Tóth zum 70. Geburtstag gewidmet*

Ein 3-Zonotop ist eine (Minkowskische) Summe von endlich vielen Strecken im  $\mathbb{R}^3$  mit inneren Punkten. Außer dem Würfel gibt es kein 3-Zonotop, das ein reguläres Polytop ist. Es scheint daher sinnvoll zu sein, den Begriff „regulär“ für Zonotope etwas weiter zu fassen. In der vorliegenden Arbeit verstehen wir unter einem regulären 3-Zonotop ein 3-Zonotop, dessen Seitenflächen kongruente Rhomben und dessen Eckenfiguren reguläre Polygone sind. Jedes reguläre 3-Zonotop ist also ein dualer archimedischer Körper (vgl. [4]). Es gibt genau drei reguläre 3-Zonotope: den Würfel, das (reguläre) Rhombendodekaeder und das (reguläre) Rhombentriakontaeder (vgl. [1]). Diese werden durch die Verbindungsstrecken antipodischer Ecken eines regulären Oktaeders, Würfels bzw. Ikosaeders erzeugt. Darüber hinaus gibt es nur noch folgende von kongruenten Rhomben begrenzte 3-Zonotope („Rhombenisoeder“): Die nicht orthogonalen Rhomboeder, das Rhombenikosaeder und das sogenannte „zweite Rhombendodekaeder“ [1]. Die beiden letztgenannten Zonotope werden durch die Verbindungsstrecken von fünf bzw. vier Paaren antipodischer Ecken eines regulären Ikosaeders erzeugt.

Von L. Fejes Tóth (und anschließend von weiteren Autoren) wurde in einer Reihe von Arbeiten gezeigt, daß die regulären 3-Polytope durch verschiedene Extremaleigenschaften charakterisiert werden können; so besitzen sie etwa unter allen 3-Polytopen mit gleicher Ecken- und Flächenzahl bei gegebenem Volumen die größtmögliche Inkugel ([4], [5]). Wir versuchen hier, in ähnlicher Weise die regulären 3-Zonotope zu charakterisieren.

Ein weiteres Motiv für die vorliegende Untersuchung waren folgende Überlegungen, die im wesentlichen auf U. Betke und P. McMullen [2] zurückgehen:

Seien  $L_1, \dots, L_n$   $n$  Ebenen mit Normalvektoren  $u_1, \dots, u_n$  der Länge 1, und  $C$  ein (kompakter) konvexer Körper. Bezeichnen wir mit  $F(C, L_i)$  den Flächeninhalt der Normalprojektion von  $C$  auf  $L_i$ , so kann  $\frac{4}{n} \sum_{i=1}^n F(C, L_i)$  als Näherungswert für die Oberfläche  $F(C)$  von  $C$  angesehen werden, falls die Ebenen  $L_i$  „gleichmäßig verteilt“ sind, da ja bekanntlich  $F(C) = \frac{1}{\pi} \int F(C, L) du$ , wobei  $L$  eine Ebene mit Normalvektor  $u$  ist und über die Einheitsphäre integriert wird [7]. Es stellt sich naturgemäß die Frage, wie man die Ebenen  $L_i$  am besten wählt, sodaß etwa der

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A40; Secondary 52A25.

*Key words and phrases*. Regular zonotopes, extremal properties, estimation of the surface area of convex bodies.

## Quotient

$$\frac{\frac{4}{n} \sum_{i=1}^n F(C, L_i)}{F(C)}$$

möglichst wenig von 1 abweicht.

In [2] wird nun folgendes gezeigt: Sei  $Z$  das von den Strecken  $S_i = \text{conv} \{-u_i, u_i\}$  erzeugte 3-Zonotop.  $r$  sei der Inkugelradius und  $R$  der Umkugelradius von  $Z$ . Dann gilt

$$r \leq \frac{\sum F(C, L_i)}{F(C)} \leq R$$

für alle konvexen Körper  $C$ , und diese Schranken sind scharf. Die Ebenen  $L_i$  wählt man also am besten so, daß das entsprechende Zonotop möglichst großen Inkugelradius und möglichst kleinen Umkugelradius hat. Der untenstehende Satz 1 ergibt, daß für  $n=3, 4$  und  $6$  diese Forderung bezüglich  $r$  genau durch die regulären 3-Zonotope erfüllt wird. Wahrscheinlich gilt das auch für  $R$ , doch scheint der Beweis dafür schwieriger zu sein.

**SATZ 1.** *Sei  $n=3, 4$  oder  $6$ . Unter allen 3-Zonotopen, die durch  $n$  Einheitsstrecken erzeugt werden, haben genau die regulären 3-Zonotope*

- (i) *die größte Oberfläche*  
und  
(ii) *den größten Inkugelradius.*

**BEWEIS** von Teil (i):

Sei  $Z$  die Summe der Strecken  $S_i = \overline{A_i B_i}$  im  $\mathbb{R}^3$  mit zugehörigen Vektoren  $s_i = \overrightarrow{A_i B_i}$  und Länge 1, für  $i = 1, \dots, n$ . Die Oberfläche von  $Z$  bezeichnen wir mit  $F$ .

$$F = \sum_{i \neq k} |\sin \angle(s_i, s_k)| = \sum_{i \neq k} \sqrt{1 - \langle s_i, s_k \rangle^2},$$

also wegen der Konvexität der Funktion  $x \mapsto x^2$ :

$$(1) \quad F^2 \leq n(n-1) \sum_{i \neq k} (1 - \langle s_i, s_k \rangle^2).$$

Hier gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn  $\langle s_i, s_k \rangle^2$  für alle Paare  $(i, k)$  mit  $i \neq k$  denselben Wert hat, d.h. wenn je zwei Strecken denselben Winkel bilden, und das bedeutet, daß  $Z$  ein Rhombenisoeder ist.

Wir verwenden nun folgende Ungleichung, die (in einer wesentlich allgemeineren Form) von Sidelnikov [9] bewiesen wurde (vgl. auch [6]):

$$(2) \quad \sum_{i,k} \langle s_i, s_k \rangle^2 \leq \frac{n^2}{3}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn die  $s_i$  einen eutaktischen Stern bilden (d.h.

$$\sum_{k=1}^n s_{ki} s_{kj} = \frac{n}{3} \delta_{ij} \quad \text{für } s_i = (s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}), \text{ vgl. [3], [8]).}$$

(1) und (2) ergeben zusammen

$$(3) \quad F^2 \leq \frac{2}{3} n^3 (n-1).$$

Da die erzeugenden Strecken der zu Beginn erwähnten nichtregulären Rhombenisoeder keinen eutaktischen Stern bilden, gilt hier das Gleichheitszeichen genau für die regulären 3-Zonotope, w. z. z. w.

Der Beweis des 2. Teils von Satz 1 erfordert etwas umfangreichere Überlegungen. Dazu:

**SATZ 2.** Sei  $K$  eine Kugel und  $P$  ein Rhombus, dessen Ebene die Kugel  $K$  nicht schneidet.  $\bar{P}$  sei ein zu  $P$  kongruenter Rhombus, der  $K$  in seinem Mittelpunkt berührt. Dann gilt für die Flächeninhalte der Radialprojektionen  $P'$  und  $\bar{P}'$  dieser Rhomben auf die Kugel:

$$F(P') \leq F(\bar{P}').$$

**BEWEIS.** Wir können ohne weiteres annehmen, daß die Ebene von  $P$  die Kugel in einem Punkt  $B$  berührt, da sonst  $F(P')$  vergrößert werden kann, indem man durch eine Translation  $P$  näher an die Kugel heranbewegt.

Seien  $d_1$  und  $d_2$  die beiden Diagonalen von  $P$ . Wir verschieben  $P$  parallel zu  $d_1$  so weit, daß  $B$  auf der Geraden durch  $d_2$  zu liegen kommt. Dabei wird der Inhalt von  $P'$  nicht kleiner, wie man etwa folgenderweise einsehen kann (ähnlich wie in [5], S. 293f.):

Sei  $\hat{P}$  der Rhombus in der neuen Lage. Weiters sei  $g_x$  eine Gerade in der Ebene von  $P$  parallel zu  $d_1$  im Abstand  $x$ , sowie

$$t_x := g_x \cap P, \quad \hat{t}_x := g_x \cap \hat{P}.$$

Den Inhalt  $F(P')$  stellen wir durch ein Integral dar (und analog  $F(\hat{P}')$ ):

$$(4) \quad F(P') = 2 \int_0^{\infty} \int_{t_x} q(YB) dY dx,$$

wobei  $YB$  den Abstand des variablen Punktes  $Y$  vom Berührungspunkt  $B$  bedeutet, und  $q(y) := r^3(r^2 + y^2)^{-3/2}$ . Nun ist

$$(5) \quad \int = \int_{t_x \setminus \hat{t}_x} + \int_{t_x \cap \hat{t}_x},$$

und das gilt auch mit  $t_x$  und  $\hat{t}_x$  vertauscht. Jeder Punkt von  $t_x \setminus \hat{t}_x$  ist von  $B$  weiter entfernt als jeder Punkt von  $\hat{t}_x \setminus t_x$ . Da  $q$  monoton fallend ist, folgt daher aus (4) und (5)  $F(P') \leq F(\hat{P}')$ .

Wir können nun  $\hat{P}$  parallel zu  $d_2$  verschieben, bis  $B$  mit dem Mittelpunkt des Rhombus zusammenfällt, und sehen wieder, daß der Inhalt der Radialprojektion dabei nicht abnimmt.

**SATZ 3.** Sei  $P$  ein Rhombus mit Seitenlänge 1 und Flächeninhalt  $a$ , welcher eine Kugel mit Radius  $r$  in seinem Mittelpunkt berührt, und  $f_r(a)$  sei der Flächeninhalt der Radialprojektion  $P'$  von  $P$  auf die Kugel. Dann ist  $f_r$  für jedes  $r > 0$  streng monoton wachsend und konkav.

BEWEIS. Sei  $2\alpha$  der kleinere Winkel des Rhombus  $P$ .  $2\varphi$  und  $2\psi$  seien die Winkel von  $P'$ . Dann gilt:

$$\tan \varphi = \frac{(\tan \alpha) \sqrt{r^2 + \cos^2 \alpha}}{r}, \quad \tan \psi = \frac{\sqrt{r^2 + \sin^2 \alpha}}{r \tan \alpha},$$

$$a = \sin 2\alpha, \quad \frac{1}{4} f_r(a) = \varphi + \psi - \frac{\pi}{2}.$$

Setzen wir  $t := \tan \alpha$ , so ist

$$f_r(a) = 4 \left( \arctan \sqrt{t^2 + \frac{t^2}{r^2(1+t^2)}} + \arctan \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{r^2(1+t^2)}} - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$t^2 = \frac{1 - \sqrt{1-a^2}}{1 + \sqrt{1-a^2}}.$$

Zur Berechnung der Ableitungen von  $f_r$  setzen wir  $x := \sqrt{1-a^2}$  und  $c := r^2$ . Dann ist

$$f_r'(a) = \frac{\sqrt{8c}}{1+4c-x^2} (h(c, x) + h(c, -x))$$

mit

$$h(c, x) := \frac{1+4c+2x+x^2}{x\sqrt{2c+1+x}}.$$

Zum Beweis der Monotonie von  $f_r$  ist also nur  $h(c, x) > -h(c, -x)$  für  $0 < x < 1$  nachzuprüfen. Da beide Seiten dieser Ungleichung positiv sind, können wir quadrieren und erhalten nach Ausmultiplikation und Division durch  $2x$ :

$$3 - 2x^2 - x^4 + 16c + 16c^2 \geq 0$$

und das ist für  $0 < x < 1$  und  $c > 0$  offensichtlich richtig.

Zum Beweis der Konkavität untersuchen wir die zweite Ableitung von  $f_r$ :

$$f_r''(a) = \frac{\sqrt{8c} \sqrt{1-x^2}}{2x^3(1+4c-x^2)^2 \sqrt{b}} H(b, u),$$

wobei  $b = 2c + 1$ ,  $u = \frac{x}{b}$  und

$$\begin{aligned} H(b, u) = & [(2+3u) + (-8-12u-2u^2)b + (8+12u+12u^2+8u^3)b^2 + \\ & + (-16u^2-24u^3-10u^4)b^3 + (-2u^4-3u^5)b^4](1+u)^{-3/2} + \\ & + [(-2+3u) + (8-12u+2u^2)b + (-8+12u-12u^2+8u^3)b^2 + \\ & + (16u^2-24u^3+10u^4)b^3 + (2u^4-3u^5)b^4](1-u)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen:  $H(b, u) < 0$  für  $0 < u < 1$ ,  $1 < b < \frac{1}{u}$ . Zu diesem Zweck studieren wir das Vorzeichen der partiellen Ableitungen von  $H$  nach  $b$ .

$$(a) \quad \frac{\partial^4 H}{\partial b^4} < 0:$$

Der Koeffizient von  $b^4$  in obiger Darstellung von  $H$  ist nämlich  $=u^4\eta(u)$  mit  $\eta(u) = -(2+3u)(1+u)^{-3/2} + (2-3u)(1-u)^{-3/2}$ . Für  $u \geq 2/3$  ist offensichtlich  $\eta(u) < 0$ . Für  $0 < u < 2/3$  ist zu zeigen:

$$(2+3u)^2(1+u)^{-3} > (2-3u)^2(1-u)^{-3}.$$

Dies erweist sich nach kurzer Rechnung für positive  $u$  als äquivalent mit  $u^2 < \frac{5}{9}$

und ist somit für  $0 < u < \frac{2}{3}$  richtig.

(b) Um das Vorzeichen von  $\frac{\partial^3 H}{\partial b^3}$  verfolgen zu können, betrachten wir die Funktionen

$$g_3(u) := \frac{\partial^3 H}{\partial b^3}(1, u) \quad \text{und} \quad h_3(u) := \frac{\partial^3 H}{\partial b^3}\left(\frac{1}{u}, u\right).$$

$$g_3(u) = (-8 - 12u - 9u^2 - 6u^3)(1+u)^{-3/2} + (8 - 12u + 9u^2 - 6u^3)(1-u)^{-3/2}.$$

Das zweite der beiden hier auftretenden kubischen Polynome hat nur eine reelle Nullstelle  $u_1 = 0,911 \dots$ . Daraus sieht man sofort:  $g_3(u) < 0$  für  $u_1 < u < 1$ . Für  $0 < u < u_1$  können wir das Vorzeichen von  $g_3(u)$  durch Quadrierung der beiden Summanden bestimmen:  $\text{sign } g_3(u) = \text{sign } \bar{g}_3(u)$  mit

$$\begin{aligned} \bar{g}_3(u) &= (8 - 12u + 9u^2 - 6u^3)^2(1+u)^3 - (8 + 12u + 9u^2 + 6u^3)^2(1-u)^3 = \\ &= 2u^3(40 - 81u^2 + 9u^4 + 36u^6). \end{aligned}$$

In den Klammern steht ein kubisches Polynom in  $u^2$  mit drei reellen Nullstellen, wovon zwei positiv sind. Das ergibt in  $u$  zwei positive Nullstellen  $u_2 = 0,838 \dots$  und  $u_3 = 0,931 \dots$ , also  $0 < u_2 < u_1 < u_3 < 1$ . Es folgt:

$$(6) \quad g_3(u) \begin{cases} > 0 & \text{für } 0 < u < u_2, \\ < 0 & \text{für } u_2 < u < 1. \end{cases}$$

$$h_3(u) = (-8 - 16u - 11u^2)(1+u)^{-3/2} + (8 - 8u - u^2)(1-u)^{-3/2}.$$

Das rechts stehende quadratische Polynom hat genau eine positive Nullstelle  $u_4 = 0,898 \dots$ .

Für  $u_4 < u < 1$  ist also  $h_3(u) < 0$ .

Für  $0 < u < u_4$  quadrieren wir wieder die Summanden von  $h_3$  und betrachten

$$\begin{aligned} \bar{h}_3(u) &= (8 - 8u - u^2)^2(1+u)^3 - (8 + 16u + 11u^2)^2(1-u)^3 = \\ &= 2u^3(40 - 20u - 81u^2 + 4u^3 + 61u^4). \end{aligned}$$

Das hier auftretende Polynom 4. Grades hat zwei positive Nullstellen, von denen nur eine im Intervall  $(0, u_4)$  liegt:  $u_5 = 0,764 \dots < u_2$ . Also:

$$(7) \quad h_3(u) \begin{cases} > 0 & \text{für } 0 < u < u_5 \\ < 0 & \text{für } u_5 < u < 1. \end{cases}$$

Wir betrachten nun für beliebiges  $u \in (0, 1)$  die Funktion  $b \mapsto \frac{\partial^3 H}{\partial b^3}(b, u)$ . Nach (a) ist sie monoton fallend, und wir erkennen aus (6) und (7) folgendes Verhalten ihres Vorzeichens, wenn  $b$  das Intervall  $\left(1, \frac{1}{u}\right)$  durchläuft:

Für  $0 < u < u_5$ : stets positiv;  
 für  $u_5 < u < u_2$ : zuerst positiv, dann negativ;  
 für  $u_2 < u < 1$ : stets negativ.

Daraus ergibt sich jedenfalls, daß die Funktion  $b \mapsto \frac{\partial^2 H}{\partial b^2}(b, u)$  für jedes  $u \in (0, 1)$  quasikonkav ist (d.h. entweder monoton oder zuerst wachsend und dann fallend).

(c) Zur Vorzeichenbestimmung von  $\frac{\partial^2 H}{\partial b^2}$  gehen wir nun genauso vor wie bei der 3. Ableitung:

$$g_2(u) := \frac{\partial^2 H}{\partial b^2}(1, u), \quad h_2(u) := \frac{\partial^2 H}{\partial b^2}\left(\frac{1}{u}, u\right).$$

Wir finden

$$g_2(u) \begin{cases} < 0 & \text{für } 0 < u < u_6 = 0.571\dots \\ > 0 & \text{für } u_6 < u < 1, \end{cases}$$

$$h_2(u) \begin{cases} < 0 & \text{für } 0 < u < u_7 = 0.382\dots < u_6 \\ > 0 & \text{für } u_7 < u < 1. \end{cases}$$

Die auftretenden Polynome haben wieder höchstens Grad 4 (wenn man einfache Faktoren wie  $(u-1)^2$  oder  $u^3$  heraushebt), sodaß keine besonderen Schwierigkeiten auftreten. Daraus ergibt sich für das Vorzeichen der Funktion  $b \mapsto \frac{\partial^2 H}{\partial b^2}(b, u)$  unter Beachtung der Quasikonkavität:

Für  $0 < u < u_7$ : stets negativ;  
 für  $u_7 < u < u_6$ : zuerst negativ, dann positiv;  
 für  $u_6 < u < 1$ : stets positiv.

Es folgt:  $b \mapsto \frac{\partial H}{\partial b}(b, u)$  ist für jedes  $u \in (0, 1)$  quasikonvex (d.h. entweder monoton oder zuerst fallend und dann wachsend).

(d) Wir betrachten nun  $g_1(u) := \frac{\partial H}{\partial b}(1, u)$  und  $h_1(u) := \frac{\partial H}{\partial b}\left(\frac{1}{u}, u\right)$  und finden wie vorhin:

$$g_1(u) \begin{cases} < 0 & \text{für } 0 < u < u_8 = 0.905\dots, \\ > 0 & \text{für } u_8 < u < 1, \end{cases}$$

$$h_1(u) \begin{cases} < 0 & \text{für } 0 < u < u_9 = 0.824\dots, \\ > 0 & \text{für } u_9 < u < 1, \end{cases}$$

woraus (wegen  $u_9 < u_8$ ) folgt, daß die Funktion  $b \mapsto H(b, u)$  ebenfalls quasikonvex ist.



(e) Wir haben also schließlich nur mehr nachzuweisen, daß  $H(1, u) < 0$  und  $H\left(\frac{1}{u}, u\right) < 0$  für alle  $u \in (0, 1)$ . Das geht wiederum mit derselben Methode. Betrachten wir etwa  $g_0(u) = H(1, u) = (2 - 3u - 3u^2)(1 + u)^{-3/2} + (-2 - 3u + 3u^2)(1 - u)^{-3/2}$ . Der rechte Summand ist auf  $(0, 1)$  stets negativ, der linke nur für  $u > u_{10} = 0.457 \dots$ .

Für  $0 < u < u_{10}$  bilden wir wieder die Differenz der Quadrate der beiden Summanden:

$$\begin{aligned}\hat{g}_0(u) &= (2 - 3u - 3u^2)^2(1 - u)^3 - (2 + 3u - 3u^2)^2(1 + u)^3 = \\ &= 2u(-24 - 13u^2 + 30u^4 - 9u^6).\end{aligned}$$

Das hier auftretende kubische Polynom in  $u^2$  hat keine positive Nullstelle. Somit ist  $\hat{g}_0(u)$  stets  $< 0$ , und daher auch  $H(1, u) < 0$ . Ganz analog zeigt man  $H\left(\frac{1}{u}, u\right) < 0$ .

BEWEIS VON SATZ 1, TEIL (ii). Wir können o.B.d.A. annehmen, daß keine drei Strecken  $S_i$  in einer Ebene liegen. Dann hat das Zonotop  $Z$  genau  $N = n(n-1)$  Rhomben  $P_j$  als Seitenflächen, deren Inhalte wir mit  $a_j$  bezeichnen. Sei  $Z_0$  das entsprechende reguläre Zonotop.  $r$  sei der Inkugelradius von  $Z$  und  $r_0$  der von  $Z_0$ . Nach Satz 2 gilt

$$F(Z) = \sum_{j=1}^N a_j \leq F(Z_0).$$

Nehmen wir  $r \geq r_0$  an. Dann gilt nach Satz 3

$$4\pi r_0 = \sum F(P_j) \leq \sum f_{r_0}(a_j),$$

wobei  $P_j$  die Radialprojektion auf eine in  $Z$  enthaltene Kugel mit Radius  $r_0$  bedeutet. Aus der Konkavität und Monotonie von  $f_{r_0}$  folgt weiter:

$$4\pi r_0 \leq N f_{r_0}\left(\frac{1}{N} \sum a_j\right) = N f_{r_0}\left(\frac{F(Z)}{N}\right) \leq N f_{r_0}\left(\frac{F(Z_0)}{N}\right) = N \frac{4\pi r_0}{N} = 4\pi r_0.$$

In diesen Ungleichungen muß daher das Gleichheitszeichen gelten. Wegen der strikten Monotonie von  $f_{r_0}$  folgt daraus  $F(Z) = F(Z_0)$ . Nach Satz 2 und der anschließenden Bemerkung ist daher  $Z$  ein reguläres Zonotop.

BEMERKUNG. Aus diesem Beweis ergibt sich auch für beliebige  $n \geq 3$  eine Ungleichung für den Inkugelradius von 3-Zonotopen, die durch Einheitsstrecken erzeugt werden: Sei  $\tau_j = F(P_j)$  und  $g_r = f_r^{-1}$ . Dann ist  $g_r$  konvex und wir haben

$$F(Z) \leq \sum_{j=1}^N g_r(\tau_j) \leq N g_r\left(\frac{4\pi r}{N}\right).$$

Hier kann noch  $F(Z)$  durch die Schranke von Satz 1 ersetzt werden:

$$g_r\left(\frac{4\pi r}{N}\right) \leq \sqrt{\frac{2n}{3(n-1)}}.$$

Abschließend möchte ich darauf hinweisen, daß der Beweis von Satz 3 im wesentlichen von A. Florian stammt, und ihm dafür meinen Dank aussprechen.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BILINSKI, S., Über die Rhombenisoeder, *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske Ser. II* **15** (1960), 251—263. *MR* **24** # A1644.
- [2] BETKE, U. und McMULLEN, P., Estimating the sizes of convex bodies from projections, *J. London Math. Soc.* (2) **27** (1983), 525—538. *MR* **84g**: 52005.
- [3] COXETER, H. S. M., *Regular polytopes*, Third edition, Dover Publications, Inc., New York, 1973. *MR* **51** # 6554.
- [4] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Zweite verbesserte und erweiterte Auflage, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 65, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1972. *MR* **50** # 5603.
- [5] FEJES TÓTH, L., *Reguläre Figuren*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965. *MR* **30** # 3408.
- [6] GOETHALS, J.-M. and SEIDEL, J. J., Spherical designs, *Relations between combinatorics and other parts of mathematics* (Proc. Sympos. Pure Math., Ohio State Univ., Columbus, Ohio, 1978), Proc Sympos. Pure Math., Vol 34, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1979, 255—272. *MR* **82h**: 05014.
- [7] HADWIGER, H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Die Grundlehren der Math. Wissenschaften, Bd. 93, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1957. *MR* **21** # 1561.
- [8] SEIDEL, J. J., Eutactic stars, *Combinatorics* (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976) Vol. II, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 18, North-Holland, Amsterdam, 1978, 983—999. *MR* **80d**: 05016.
- [9] SIDEL'NIKOV, V. M., New estimates for the closest packing of spheres in  $n$ -dimensional Euclidean space, *Mat. Sb. (N.S.)* **95** (137) (1974), 148—158 (in Russian). *MR* **50** # 14502.

(Eingegangen am 13. Juni 1984)

MATHEMATISCHES INSTITUT DER  
UNIVERSITÄT SALZBURG  
HELLBRÜNNERSTRASSE 34  
A—5020 SALZBURG  
AUSTRIA

# MULTIPLE PACKINGS AND COVERINGS

H. GROEMER

*Dedicated to Professor László Fejes Tóth on the occasion of his seventieth birthday*

1. In  $n$ -dimensional euclidean space  $E^n$  let  $L$  denote a lattice of determinant  $\det L$  ( $\det L > 0$ ). Furthermore, let  $S$  be a bounded subset of  $E^n$  of volume (Jordan measure)  $v(S)$ , and let  $k$  be a positive integer. The set  $\mathcal{S}(S, L) = \{S + p : p \in L\}$  will be called a  $k$ -fold packing in  $E^n$  if every point of  $E^n$  is in at most  $k$  sets of the form  $(\text{int } S) + p$  where  $p \in L$ . The  $k$ -fold packing constant of  $S$  is defined by

$$(1) \quad d_k^n(S) = \sup \frac{v(S)}{\det L},$$

where the supremum is to be taken over all lattices  $L$  for which  $\mathcal{S}(S, L)$  is a  $k$ -fold packing (with  $\det L > 0$ ). Analogously,  $\mathcal{S}(S, L)$  will be called a  $k$ -fold covering of  $E^n$  if every point of  $E^n$  is in at least  $k$  sets from  $\mathcal{S}(S, L)$ . The  $k$ -fold covering constant of  $S$  is defined by

$$(2) \quad D_k^n(S) = \inf \frac{v(S)}{\det L}$$

where  $L$  ranges over all lattices  $L$  with the property that  $\mathcal{S}(S, L)$  is a  $k$ -fold covering. When  $k$  is not specified we also talk about *multiple* (rather than  $k$ -fold) *packings* and *coverings*. It should be noted that in this paper all multiple packings and coverings are assumed to be lattice arrangements.

There exists already a substantial body of literature dealing with multiple packings and coverings. Survey articles on this subject have been written by Few [8] and G. Fejes Tóth [6, § 1.5]. Almost all results concern improvement of the trivial inequalities

$$kd_1^n(S) \leq d_k^n(S) \leq k,$$

$$kD_1^n(S) \geq D_k^n(S) \geq k,$$

where  $S$  is assumed to be a ball (solid sphere) or, more generally, a convex body.

In the present article we use a very simple idea to derive lower bounds for  $d_k^n$  and upper bounds for  $D_k^n$ . Most of our results are either stronger, more explicit, or more general than previously known density estimates of this kind.

In the following section we formulate and prove a theorem that provides the basis for all further results. The idea to use a theorem of this kind for obtaining

---

Supported by National Science Foundation Research Grant MCS 8300825.  
1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A45; Secondary 10E05.  
*Key words and phrases*. Packing, covering, density, convex body, lattice.

information on the pertinent packing and covering constants is so natural that one could hardly claim originality. For example, the justification of the often cited fact that  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k^n(B)/k = 1$  for  $n$ -dimensional balls  $B$  has probably been based on arguments of this kind (cf. a remark of Bolle [3]). But the generality and power of this method, particularly with respect to explicit density estimates, has apparently not yet been fully realized.

In Section 3 our basic theorem is applied to prove that for all bounded subsets  $S$  of  $E^n$  with positive Jordan measure

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_k^n(S)/k = \lim_{k \rightarrow \infty} D_k^n(S)/k = 1.$$

In Section 4 we establish lower bounds for  $d_k^n(S)$  in the case when  $S$  is a convex body. If  $n=2$  a sharper inequality is proved in Section 5. Analogous results for coverings are shown in Section 6 (for arbitrary  $n$ ) and Section 7 (for  $n=2$ ).

2. The following definitions and notations will be used frequently. If no particular specifications are stated  $n$  is always assumed to be an arbitrary (but fixed) positive integer. A convex body is defined as a compact convex subset of  $E^n$  with interior points. If  $L$  is a lattice in  $E^n$  and  $T$  a convex body we call  $T$  an  $L$ -tile if  $\bigcup_{p \in L} (T+p) = E^n$  and  $\text{int}(T+p) \cap \text{int}(T+q) = \emptyset$  (for all  $p, q \in L$ ,  $p \neq q$ ). In this case the set  $\{T+p: p \in L\}$  is called a tiling of  $E^n$ . If  $t > 0$  we let  $L_t$  denote the lattice  $\{(g_1 t, g_2 t, \dots, g_n t): g_1, g_2, \dots, g_n \text{ integers}\}$ , and  $Q_t$  the cube  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n): -\frac{t}{2} \leq x_i \leq \frac{t}{2}\}$ . For every  $n$  the corresponding  $Q_t$  is obviously an  $L_t$ -tile. Now we can prove the following theorem.

**THEOREM 1.** *Let  $L$  be a lattice and  $T$  an  $L$ -tile in  $E^n$ . Furthermore, let  $S$  be a bounded Jordan measurable subset of  $E^n$ , and assume that there exist  $k$  points  $p_1, \dots, p_k$  in  $L$  such that either*

$$(3) \quad S \subset \bigcup_{i=1}^k (T+p_i)$$

or

$$(4) \quad \bigcup_{i=1}^k (T+p_i) \subset S.$$

*Then, if (3) holds,  $\{S+p: p \in L\}$  is a  $k$ -fold packing in  $E^n$  and*

$$(5) \quad d_k^n(S) \geq v(S)/v(T).$$

*If (4) holds,  $\{S+p: p \in L\}$  is a  $k$ -fold covering of  $E^n$  and*

$$(6) \quad D_k^n(S) \leq v(S)/v(T).$$

**PROOF.** We consider first the case of packings. Let us assume that (3) holds and that there exist points  $q, q_1, \dots, q_m$  with  $q \in E^n$ ,  $q_j \in L$  ( $j=1, \dots, m$ ;  $q_s \neq q_i$  if  $s \neq i$ ) and

$$(7) \quad q - q_j \in \text{int } S.$$

Since (7) is equivalent to  $q \in \text{int}(S + q_j)$  we have only to show that  $m \leq k$ . From (3) and (7) it follows that there is a subscript  $h$  such that  $q - q_1 \in T + p_h$ . Hence, if we define  $m$  tiles  $T_j$  by  $T_j = T + p_h + q_1 - q_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) it follows that

$$q - q_j \in T_j.$$

If this is compared with (7) we see that

$$(8) \quad T_j \cap \text{int } S \neq \emptyset \quad (j = 1, \dots, m).$$

Since  $T_j$  and  $T + p_i$  are tiles of the tiling  $\{T + x: x \in L\}$  it follows from (3) and (8) that every  $T_j$  is some  $T + p_i$ . Hence, we obtain the desired inequality  $m \leq k$ . (5) is an immediate consequence of the definition (1) and the fact that all  $L$ -tiles have the same volume, namely  $\det L$ .

In the case of coverings we use the tiling  $\{T + x: x \in L\}$  to infer that for every  $q \in E^n$  there is a  $g \in L$  such that  $q + g \in T$ . Because of (4) it follows that  $q + g + p_i \in T + p_i \subset S$ . Hence

$$(9) \quad q \in S - g - p_i \quad (i = 1, \dots, k).$$

Since  $g + p_i \in L$  it follows from (9) that every  $q \in E^n$  is in at least  $k$  sets of the collection  $\{S + x: x \in L\}$ . Thus,  $\{S + x: x \in L\}$  is a  $k$ -fold covering. Similarly as in the case of packings (6) is an obvious consequence of definition (2).

We note that the convexity of  $T$  has actually not been used. But in all our applications  $T$  will be a (convex) polytope; in fact, in most cases it will be a cube.

3. If  $S$  is assumed to be a convex body in  $E^n$  it follows from a theorem of Cohn [5] that  $\lim_{k \rightarrow \infty} D_k^n(S)/k = 1$ . A corresponding result for packings, i.e.  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k^n(S)/k = 1$ , has apparently not yet been proved, although it appears to be generally known that this relation must hold at least in the case of  $n$ -dimensional balls (see, for example, Few [8], Bolle [3], and G. Fejes Tóth [6]). The following theorem shows that not even convexity is needed for the validity of these relations.

**THEOREM 2.** *If  $S$  is a bounded subset of  $E^n$  with positive Jordan measure then*

$$(10) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} d_k^n(S)/k = 1$$

and

$$(11) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} D_k^n(S)/k = 1.$$

**PROOF.** We define  $\underline{m}(t)$  as the number of cubes from the tiling  $\{Q_t + x: x \in L_t\}$  that are contained in  $S$ , and  $\overline{m}(t)$  as the number of cubes having points in common with  $S$ . Since  $S$  is Jordan measurable we have

$$(12) \quad v(S) = \lim_{t \rightarrow 0} \overline{m}(t) t^n = \lim_{t \rightarrow 0} \underline{m}(t) t^n.$$

The proof is now not completely straightforward since the equations  $\underline{m}(t) = k$ ,  $\overline{m}(t) = k$  need not have solutions for every given  $k$ .

We consider first the case of packings. For any integer  $k > 1$  let us define

$$t_k = \sup \{t: \overline{m}(t) \geq k\}.$$

Since  $v(S) > 0$  and since  $S$  is bounded it follows that  $0 < t_k < \infty$  and

$$(13) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0.$$

Let us set  $\tilde{t}_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right) t_k$ . From the definition of  $t_k$  it follows that

$$(14) \quad \overline{m}(\tilde{t}_k) < k,$$

and that there exists a number  $\hat{t}_k$  with  $t_k / \left(1 + \frac{1}{k}\right) < \hat{t}_k$  and

$$(15) \quad \overline{m}(\hat{t}_k) \geq k.$$

We note that

$$(16) \quad \tilde{t}_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right) t_k < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \hat{t}_k.$$

From (14), (15), and (16) one obtains

$$\overline{m}(\tilde{t}_k) \tilde{t}_k^n < k \tilde{t}_k^n < \overline{m}(\hat{t}_k) \hat{t}_k^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{2n}.$$

Letting  $k \rightarrow \infty$  and using (12) and (13) we find

$$(17) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k \tilde{t}_k^n = v(S).$$

Since (14) shows that  $S$  can be covered by  $k$  cubes from the tiling  $\{Q_{t_k} + x : x \in L_{t_k}\}$  we can apply Theorem 1 and obtain

$$d_k^n(S)/k \cong v(S)/k \tilde{t}_k^n.$$

This relation together with (17) and the obvious inequality  $d_k^n(S)/k \leq 1$  yield immediately the desired result (10).

Let us now consider coverings. In this case we define

$$u_k = \inf \{u : \underline{m}(u) \leq k\}.$$

Since  $v(S) > 0$  and  $S$  is bounded we have  $0 < u_k < \infty$  and

$$(18) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0.$$

Let us set  $\tilde{u}_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right) u_k$ . From the definition of  $u_k$  it follows that

$$(19) \quad \underline{m}(\tilde{u}_k) > k,$$

and that there is an  $\hat{u}_k$  such that  $\hat{u}_k < u_k / \left(1 - \frac{1}{k}\right)$  and

$$(20) \quad \underline{m}(\hat{u}_k) \leq k.$$

We also note that

$$(21) \quad \hat{u}_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right) u_k > \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 \hat{u}_k.$$



From (19), (20), and (21) it follows that

$$\underline{m}(\hat{u}_k) \hat{u}_k^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2n} < k \bar{u}_k^n < \underline{m}(\bar{u}_k) \bar{u}_k^n.$$

Taking into account (12) and (18) we obtain for  $k \rightarrow \infty$

$$(22) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k \bar{u}_k^n = v(S).$$

Because of (19) the set  $S$  contains at least  $k$  cubes from  $\{Q_{\hat{u}_k} + x : x \in L_{\hat{u}_k}\}$ , and Theorem 1 implies therefore

$$D_k^n(S) \leq v(S)/\bar{u}_k^n.$$

Combining this with (22) and the obvious inequality  $D_k^n(S) \geq k$  we obtain the desired relation (11).

4. We now turn to the problem of finding lower bounds for  $d_k^n(C)$  in the case when  $C$  is a convex body. Our estimates will be expressed in terms of the mean projection measures (Quermassintegrale) of  $C$ . If  $i=0, 1, \dots, n$  we denote the  $i$ -th mean projection measure by  $w_i(C)$ . For definitions of these functionals we refer to Bonnesen—Fenchel [4] or Hadwiger [10]. We note here only that  $w_0(C)=v(C)$ ,  $w_1(C)=(1/n)s(C)$ ,  $w_{n-1}(C)=(\kappa_n/2)b(C)$  and  $w_n(C)=\kappa_n$ , where  $v(C)$  is the volume,  $s(C)$  the surface area, and  $b(C)$  the mean width of  $C$ ;  $\kappa_n$  is the volume of the unit ball in  $E^n$ . Using these notations we can formulate the following result.

**THEOREM 3.** *If  $C$  is a convex body in  $E^n$  and  $k$  a positive integer then*

$$(23) \quad d_k^n(C) \geq k - \sum_{i=1}^{n-1} g_i(C) k^{i/n} \geq k - g(C) k^{(n-1)/n},$$

$$\text{where } g_i(C) = \frac{\kappa_i}{\kappa_n} \binom{n}{i} \frac{w_{n-i}(C)}{v^{i/n}(C)} \text{ and } g(C) = \sum_{i=1}^{n-1} g_i(C).$$

Before we give a proof of this theorem we add two corollaries and several remarks.

It appears that for  $n \geq 3$  no estimate of the kind  $d_k^n(C) \geq k - \gamma k^{(n-1)/n}$  ( $\gamma$  depending on  $C$  only) has been proved previously, not even in the case when  $C$  is a ball. If  $B$  is a ball in  $E^n$  then  $g_i(B) = \binom{n}{i} \kappa_i / \kappa_n^{i/n}$  and therefore

$$d_k^n(B) \geq k - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{\kappa_i}{\kappa_n^{i/n}} k^{i/n}.$$

In the case  $n=3$  we obtain from (23) that for every convex body  $C \subset E^3$

$$(24) \quad d_k^3(C) \geq k - \left( \frac{3}{4} \frac{s(C)}{v^{2/3}(C)} k^{2/3} + 3 \frac{b(C)}{v^{1/3}(C)} k^{1/3} \right).$$

If  $C=B$  is a ball in  $E^3$  this estimate simplifies to

$$d_k^3(B) \geq k - 3 \left( \sqrt[3]{\frac{9\pi}{16}} k^{2/3} + \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} k^{1/3} \right).$$

We omit here a discussion of the special case  $n=2$  since in the next section we will derive better results under this assumption.

From a well-known theorem of John [11] it follows that there exist an affine transformation  $\sigma$  and a unit ball  $B$  such that  $\frac{1}{n}B \subset \sigma C \subset B$ . It follows that  $w_{n-i}(\sigma C) \leq w_{n-i}(B) = \kappa_n$  and  $v(\sigma C) \geq n^{-n} \kappa_n$ . Hence,  $g_i(\sigma C) \leq \binom{n}{i} \kappa_i \kappa_n^{-i/n} n^i$ . Using also the fact that  $d_k^n(\sigma C) = d_k^n(C)$  we obtain the following corollary.

**COROLLARY 1.** *If  $C$  is a convex body in  $E^n$  and  $k$  a positive integer then*

$$d_k^n(C) \geq k - h_n k^{(n-1)/n}$$

where  $h_n = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} n^i \kappa_i / \kappa_n^{i/n}$ .

It follows in particular that  $d_k^n(C)/k$  converges (for  $k \rightarrow \infty$ ) to 1 uniformly in  $C$ . The following corollary is also worth stating; it is an immediate consequence of Corollary 1.

**COROLLARY 2.** *If  $C$  is an  $n$ -dimensional convex body with  $d_1^n(C) < 1$  and if  $k > h_n^n / (1 - d_1^n(C))^n$  (where the constant  $h_n$  is defined in Corollary 1) then*

$$d_k^n(C) > k d_1^n(C).$$

**PROOF OF THEOREM 3.** A fairly straightforward application of the kinematic principal formula of integral geometry shows that for any  $t > 0$  it is possible to cover  $C$  by at most

$$(25) \quad \left[ \frac{1}{\kappa_n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \kappa_i \frac{w_{n-i}(C)}{t^i} \right] = \left[ \frac{v(C)}{t^n} + \sum_{i=1}^{n-1} g_i(C) \frac{v^{i/n}(C)}{t^i} + 1 \right]$$

cubes from the tiling  $\{Q_t + x : x \in L_t\}$ . A proof of this fact can be found in [12], p. 274. (The proof is correct for convex bodies; but the claim that it is also valid for topological balls is not justified since in this case the intersections with cubes may not have positive Euler characteristic.) Since  $(v(C)/t^n) + \sum_{i=1}^{n-1} g_i(C) v^{i/n}(C)/t^i$  is a continuous function of  $t$  that tends to infinity for  $t \rightarrow 0^+$ , and to 0 for  $t \rightarrow \infty$  there exists a positive value of  $t$ , say  $t_k$ , such that

$$(26) \quad k = \frac{v(C)}{t_k^n} + \sum_{i=1}^{n-1} g_i(C) \frac{v^{i/n}(C)}{t_k^i}.$$

Thus, if  $\varepsilon > 0$ ,  $t_k < t < t_k + \varepsilon$ , and if  $\varepsilon$  is small enough then the integer defined by (25) equals  $k$ . An obvious application of Theorem 1 shows therefore that  $d_k^n(C) \geq v(C)/t^n$ , and letting  $t \rightarrow t_k$  we find

$$(27) \quad d_k^n(C) \geq \frac{v(C)}{t_k^n}.$$

Since (26) implies immediately  $k \geq v(C)/t_k^n$  and therefore  $t_k \geq (v(C)/k)^{1/n}$  we ob-

tain from (26) and (27)

$$d_k^n(C) \geq k - \sum_{i=1}^{n-1} g_i(C) \frac{v^{i/n}(C)}{t_k^i} \geq k - \sum_{i=1}^{n-1} g_i(C) k^{i/n}.$$

Thus we have obtained the first inequality in (23). The second inequality is obvious since  $k \geq 1$ .

5. In the case  $n=2$  we can obtain better results by the use of hexagonal tiles. Let  $H_t$  denote a regular hexagon of side length  $t$  with center at the origin, and let  $L_t^+$  be the lattice with the property that  $\{H_t + x : x \in L_t^+\}$  is a tiling of  $E^2$ . Convexity of the sets of the packing is not essential if  $n=2$ . It suffices, for example, to assume that the sets are simply connected and can be expressed as unions of plane convex bodies. We refer to such sets as *normal domains*. The *isoperimetric quotient* of such a domain  $D$  is defined by  $q(D) = p^2(D)/v(D)$ , where  $p(D)$  is the perimeter of  $D$ . Using hexagonal tilings we now can prove the following theorem.

**THEOREM 4.** *Let  $D$  be a normal domain in  $E^2$  of isoperimetric quotient  $q(D)$ , and let  $k$  be a positive integer. Then*

$$(28) \quad d_k^2(D) \geq k - \frac{1}{\pi} (2\sqrt{3} q(D)k)^{1/2}.$$

**PROOF.** Using again the kinematic principal formula one can show (see Hadwiger [9] or L. Fejes Tóth [7], p. 93) that  $D$  can be covered by at most

$$\left\lceil \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{v(D)}{t^2} + \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \frac{p(D)}{t} + 1 \right\rceil$$

hexagons from the tiling  $\{H_t + x : x \in L_t^+\}$ . As before, if  $k$  is given, one can find a  $t_k > 0$  with the property that

$$(29) \quad k = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{v(D)}{t_k^2} + \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \frac{p(D)}{t_k}.$$

In the same way as (27) has been established we obtain from (29) and Theorem 1 (taking  $T = H_t$ ) that

$$(30) \quad d_k^2(D) \geq \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{v(D)}{t_k^2}.$$

From (29) we can obviously deduce that  $k \geq \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{v(D)}{t_k^2}$ , and therefore

$t_k \geq \left( \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{v(D)}{k} \right)^{1/2}$ . If this inequality is combined with (29), (30) and the fact that

$v(H_{t_k}) = \frac{3}{2} \sqrt{3} t_k^2$  we find

$$d_k^2(D) \geq \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{v(D)}{t_k^2} = k - \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \frac{p(D)}{t_k} \geq k - \frac{1}{\pi} (2\sqrt{3} q(D)k)^{1/2}.$$

Thus, we obtain the desired inequality (28).

We remark that the estimate in Theorem 4 could be improved by solving (29) for  $t_k$  and proceeding with this exact value rather than an inequality for  $t_k$ . However, the final result is substantially more complicated than (28).

When  $D$  is a circular disc Theorem 4 yields  $d_k^2(D) \cong k - 2 \left( \frac{2\sqrt{3}}{\pi} k \right)^{1/2}$ . But for this case and special values of  $k$  better results are available; it is also known that for circular discs  $d_k^2(D) \cong k - ck^{2/5}$  with some (undetermined) constant  $c$  (see G. Fejes Tóth [6], § 1.5 and Bolle [3]).

To obtain a stronger version of Corollary 1 (for  $n=2$ ) we observe that a result of Behrend [1] shows that for any plane convex body  $C$  there exist an affine transformation  $\sigma$  and a circular unit disc  $B$  such that  $B \subset \sigma C$  and  $v(\sigma C) \cong 3\sqrt{3}$ . Because of  $v(\sigma C) \cong \frac{1}{2} p(\sigma C)$  (see (34) below) we have therefore  $q(\sigma C) = p^2(\sigma C)/v(\sigma C) \cong \leq 4v(\sigma C) \cong 12\sqrt{3}$  and we can state the following corollary of Theorem 4.

**COROLLARY 3.** *If  $C$  is a plane convex body and  $k$  a positive integer then*

$$d_k^2(C) \cong k - \frac{6}{\pi} \sqrt{2k}.$$

From this corollary one could deduce a slightly stronger version (for  $n=2$ ) of Corollary 2. We note also that for a concretely given plane convex body  $C$  a direct application of Theorem 1 yields often better estimates than those stated in Theorem 4 and Corollary 2 and 3. One has only to find efficient lattice coverings of  $C$  by squares or hexagons. As an example consider multiple packings of triangles in  $E^2$ . It is obvious that the union of six unit squares with centers at the points  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 2)$  contains a right triangle of area  $9/2$ . Thus it follows from Theorem 1 that  $d_6^2(C) \cong 9/2$  for any triangle  $C$ . Moreover, since it is a well-known fact that  $d_1^2(C) = \frac{2}{3}$  (cf. L. Fejes Tóth [7], p. 100) we obtain that in the case of triangles  $d_6^2(C) > 6d_1^2(C)$ .

As a final remark of this section we observe that in analogy to hexagons in  $E^2$  one could use cubooctahedra (truncated octahedra) in  $E^3$ . This would yield slightly sharper estimates than those obtained by setting  $n=3$  in our general results. The pertinent integral geometric formula is given in [7], p. 186.

**6.** We consider now the covering problem. Although our results are analogous to those for packings we have to deal with a slight complication. It is caused by the fact that even if all mean projection measures of a convex body are large one cannot infer that the body will contain many cubes of given side length. This is the reason why in some of our results the inradius appears.

If  $C$  is a convex body in  $E^n$  we let  $r(C)$  denote the inradius of  $C$ . The isoperimetric quotient of  $C$  is defined by  $q(C) = s^n(C)/v^{n-1}(C)$  where  $s(C)$  denotes again the surface area of  $C$ .

First we prove an analogue of Theorem 3.

THEOREM 5. If  $C$  is a convex body in  $E^n$  and  $k$  an integer with

$$(31) \quad k \geq \frac{v(C)}{r^n(C)} n^{(3/2)n} + 1$$

then

$$(32) \quad D_k^n(C) \leq k + \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{\frac{q(C)}{2}} (k-1)^{(n-1)/n} - 1.$$

PROOF. First we mention two general inequalities for convex bodies. If  $0 \leq \beta < r(C)$  we let  $C_{-\beta}$  denote the inner parallel domain of  $C$  at distance  $\beta$ , i.e. the subset of all points of  $C$  whose distance from the boundary of  $C$  is at least  $\beta$ . Then,

$$(33) \quad v(C_{-\beta}) \geq v(C) - \beta s(C).$$

According to a remark of G. D. Chakerian, (33) can be deduced from the well-known relation  $\frac{d}{dx} v(C_x) = s(C_x)$  which holds at least for  $-\beta \leq x \leq 0$  (see [10], p. 207). Indeed, because of  $s(C_x) \leq s(C)$  ( $-\beta \leq x \leq 0$ ) this relation shows that  $v(C) - v(C_{-\beta}) = \int_{-\beta}^0 s(C_x) dx \leq \beta s(C)$ .

The second inequality which will be used is

$$(34) \quad v(C) \geq \frac{1}{n} r(C) s(C).$$

It is proved in Bonnesen—Fenchel [4], p. 82 (the restriction  $n=2$  is clearly not necessary).

Let us now turn to the actual proof of (32). We note first that the same remark that led to (26) yields also the existence of a  $t_k > 0$  such that

$$(35) \quad k = \frac{v(C)}{t_k^n} - \frac{\sqrt[n]{n}}{2t_k^{n-1}} s(C) + 1.$$

It follows that  $k-1 \leq v(C)/t_k^n$ , and because of (31) this shows that

$$(36) \quad t_k \leq r(C) n^{-3/2}.$$

A trivial consequence of (36) is

$$(37) \quad \frac{\sqrt[n]{n}}{2} t_k < r(C).$$

Furthermore, if (36) is combined with (34) we obtain

$$\sqrt[n]{n} s(C) t_k \leq v(C)$$

and therefore

$$\frac{v(C)}{t_k^n} - \frac{\sqrt[n]{n}}{2t_k^{n-1}} s(C) = \frac{v(C)}{2t_k^n}.$$

Because of (35) this implies  $k-1 \geq v(C)/2t_k^n$ , which can also be written as

$$(38) \quad t_k \geq \sqrt[n]{\frac{v(C)}{2(k-1)}}.$$

From (35) and (38) it follows that

$$(39) \quad \frac{v(C)}{t_k^n} \leq k + \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{\frac{q(C)}{2}} (k-1)^{(n-1)/n} - 1.$$

Let us now write

$$\beta = \frac{\sqrt[n]{n} t_k}{2}.$$

(37) implies  $\beta < r(C)$  and  $C_{-\beta} \neq \emptyset$ . According to a theorem of Blichfeldt [2] there exists a translation vector  $\mathbf{u}$  such that  $C_{-\beta} + \mathbf{u}$  contains at least  $[v(C_{-\beta})/t_k^n] + 1$  points of  $L_{t_k}$ . If  $x$  is such a lattice point it follows from the definition of  $C_{-\beta}$  that the cube  $Q_{t_k} + x$  is contained in  $C + \mathbf{u}$ . Since (33) and (35) show that

$$[v(C_{-\beta})/t_k^n] + 1 \leq \left[ \frac{v(C)}{t_k^n} - \frac{\sqrt[n]{n}}{2t_k^{n-1}} s(C) \right] + 1 = k$$

we can infer that  $C$  contains at least  $k$  cubes from  $\{Q_{t_k} - \mathbf{u} + x : x \in L_{t_k}\}$ . The proof is now completed by an obvious application of Theorem 1 (with  $Q_{t_k}$  serving as  $T$ ) and the observation that (32) follows immediately from (39).

To obtain an analogue of Corollary 1 we use again the theorem of John [11] which shows that there exists an affine transformation  $\sigma$  and a unit ball  $B$  such that  $B \subset \sigma C \subset nB$ . It follows that  $r(\sigma C) \geq 1$ ,  $\kappa_n \leq v(\sigma C) \leq n^n \kappa_n$ , and  $s(\sigma C) \leq n^{n-1} s(B) = n^n \kappa_n$ . Hence,  $q(\sigma C) \leq n^{n^2} \kappa_n$ ,  $(v(\sigma C) n^{(3/2)n} / r^n(\sigma C)) + 1 \leq \kappa_n n^{(5/2)n} + 1$ , and we obtain from Theorem 5 the following corollary.

**COROLLARY 4.** *If  $C$  is a convex body in  $E^n$  and  $k \geq \kappa_n n^{5n/2} + 1$  then*

$$(40) \quad D_k^n(C) \leq k + \sqrt[n]{\frac{\kappa_n}{2}} n^{n+(1/2)} (k-1)^{(n-1)/n} - 1.$$

As in the case of packings it follows that  $\lim_{k \rightarrow \infty} D_k^n(C)/k = 1$  uniformly in  $C$ .

If (40) is replaced by the slightly weaker inequality  $D_k^n(C) \leq k + \sqrt[n]{\kappa_n/2} n^{n+(1/2)} k^{(n-1)/n}$  one can immediately deduce the following analogue of Corollary 2.

**COROLLARY 5.** *Let  $C$  be a convex body in  $E^n$  with  $D_1^n(C) > 1$ . If  $k \geq \kappa_n n^{5n/2} + 1$  and  $k \geq \frac{\kappa_n}{2} n^{n+(1/2)} / (D_1^n(C) - 1)^n$  then*

$$D_k^n(C) < k D_1^n(C).$$

An inequality of the type (40), namely

$$(41) \quad D_k^n(C) \leq [(k+1)^{1/n} + 8n]^n,$$

has already been proved by Cohn [5]. Cohn's method of proof is considerably less elementary. If  $k$  is large and  $n \geq 4$  then (41) is better than (40); if  $n=2, 3$  then



(40) is better and further improvements of (40) in the case  $n=2$  will be given in the next section. In special cases it may, of course, be advantageous to use Theorem 5 directly rather than (40) or (41). For example, if  $B$  is an  $n$ -dimensional ball we have  $q(B)=n^n \kappa_n$ , and Theorem 5 shows that

$$D_k^n(B) \leq k + n^{3/2} \sqrt[n]{\kappa_n/2} (k-1)^{(n-1)/n} - 1$$

if  $k \geq \kappa_n n^{3n/2} + 1$ .

7. In this final section we consider multiple coverings by plane convex sets. First we are going to prove the following sharper version of Theorem 5.

**THEOREM 6.** *If  $C$  is a plane convex body of inradius  $r(C)$  and isoperimetric quotient  $q(C)$ , and if  $k$  is an integer with*

$$(42) \quad k \geq \frac{32}{3\sqrt{3}} \frac{v(C)}{r^2(C)} + 1$$

then

$$(43) \quad D_k^2(C) \leq k + 2 \left( \frac{q(C)}{3\sqrt{3}} (k-1) \right)^{1/2} - 1.$$

**PROOF.** We proceed as in the proof of Theorem 5 but, due to the use of hexagonal tiles, different constants are involved. Analogously to (35) we determine  $t_k$  by

$$(44) \quad k = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left( \frac{v(C)}{t_k^2} - \frac{p(C)}{t_k} \right) + 1,$$

where  $p(C)$  is again the perimeter of  $C$ . In the same way as (36) and (39) have been derived from (31) and (35) we deduce from (42) and (44) that

$$(45) \quad t_k \leq \frac{1}{4} r(C)$$

and

$$(46) \quad \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{v(C)}{t_k^2} \leq k + 2 \left( \frac{q(C)}{3\sqrt{3}} (k-1) \right)^{1/2} - 1.$$

As in Section 5 let  $H_t$  denotes the regular hexagon of side length  $t$  with center at the origin, and let  $L_t^+$  denote the lattice corresponding to  $H_t$ . By Blichfeldt's theorem  $C_{-t_k}$  contains at least  $\left[ \frac{v(C_{-t_k})}{\frac{2}{3\sqrt{3}} t_k^2} \right] + 1$  points from  $L_{t_k}^+$ . Because of (45) we may take in (33)  $\beta = t_k$  and it follows that  $C$  contains at least

$$\left[ \frac{2}{3\sqrt{3}} \left( \frac{v(C)}{t_k^2} - \frac{p(C)}{t_k} \right) \right] + 1 = k$$

hexagons from  $\{H_{t_k} + x : x \in L_{t_k}^+\}$ . It is obvious that the proof can now be completed by referring to (46) and Theorem 1.

As pointed out in Section 5 there exist an affine transformation  $\sigma$  and a circular unit disc  $B$  such that  $B \subset \sigma C$ ,  $v(\sigma C) \leq 3\sqrt{3}$ , and  $q(\sigma C) \leq 12\sqrt{3}$ . Since these

properties imply also  $\frac{32}{3\sqrt{3}} \frac{v(\sigma C)}{r^2(\sigma C)} + 1 \leq 33$  we obtain the following corollary of Theorem 6.

COROLLARY 6. *If  $C$  is a plane convex body and  $k \geq 33$  then*

$$D_k^2(C) \leq k + 4\sqrt{k-1} - 1.$$

The general results (40) and (41) yield for  $n=2$  only

$$D_k^2(C) \leq k + 4\sqrt{\pi} \sqrt{k-1} - 1 \quad \text{and} \quad D_k^2(C) \leq k + 16\sqrt{k+1} + 257,$$

respectively.

If the convex body is explicitly given one can sometimes (as in the case of multiple packings) obtain much better results by a direct application of Theorem 1. For example, one sees immediately that 6 unit squares can be fitted (as part of a lattice tiling) into a right triangle of side lengths 4, 4,  $\sqrt{2}$  4. Thus, it follows from Theorem 1 that  $D_6^2(C) \leq 8$  for any triangle  $C$ . Since it is known that  $D_1^2(C) = 3/2$  (cf. L. Fejes Tóth [7], p. 100) we can conclude that  $D_6^2(C) < 6D_1^2(C)$ .

#### REFERENCES

- [1] BEHREND, F., Über die kleinste umbeschriebene und die grösste eingeschriebene Ellipse eines konvexen Bereiches, *Math. Ann.* **115** (1938), 379—411. *Zbl* **18**. 175.
- [2] BLICHFELD, H. F., A new principle in the geometry of numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.* **15** (1914), 227—235.
- [3] BOLLE, U., Dichteabschätzungen für mehrfache gitterförmige Kugelanordnungen im  $\mathbb{R}^m$ , *Studia Sci. Math. Hungar.* **14** (1979), 51—68. *MR* **83j**: 52010.
- [4] BONNESEN, T. and FENCHEL, W., *Theorie der konvexen Körper*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 3, Heft 1, Springer-Verlag, Berlin, 1934. *Zbl* **8**. 077.
- [5] COHN, M. J., Multiple lattice covering of space, *Proc. London Math. Soc.* (3) **32** (1976), 117—132. *MR* **52** # 10604.
- [6] FEJES TÓTH, G., New results in the theory of packing and covering, *Convexity and its applications*, ed. by P. M. Gruber and J. M. Wills, Birkhäuser Verlag, Basel—Boston—Stuttgart, 1983, 318—359.
- [7] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Zweite verbesserte und erweiterte Auflage, Die Grundlehren der math. Wiss., Bd. 65, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1972. *MR* **50** # 5603.
- [8] FEW, L., Multiple packing of spheres: A survey, *Proc. Colloquium on Convexity* (Copenhagen 1965), Københavns Univ. Mat. Inst., Copenhagen, 1967, 88—93. *MR* **35** # 6036.
- [9] HADWIGER, H., Überdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate, *Comment. Math. Helv.* **13** (1941), 195—200. *MR* **3**—90.
- [10] HADWIGER, H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Die Grundlehren der math. Wiss., Bd. 93, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1957. *MR* **21** # 1561.
- [11] JOHN, F., Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, *Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday*, January 8, 1948, Interscience, New York 1948, 187—204. *MR* **10**—719.
- [12] SANTALÓ, L. A., *Integral geometry and geometric probability*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 1, Addison—Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1976. *MR* **55** # 6340.

(Received June 22, 1984)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
THE UNIVERSITY OF ARIZONA  
TUCSON, AZ 85721  
U.S.A.

# TILING THREE-SPACE WITH HANDLEBODIES

HANS E. DEBRUNNER

To Professor L. Fejes Tóth on his 70th birthday

The knowledge on tilings of space is still rudimentary (cf. [1] and [2]), so we may describe here a procedure of getting various tilings of  $\mathbb{R}^3$  by solid tori or handlebodies.

EXAMPLE 1. For each  $\kappa \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  there exists a tiling of  $\mathbb{R}^3$  by pairwise congruent polyhedral handlebodies of genus  $\kappa$ . We may require in addition that each tile is interlocked with none (with some, resp.) of the other tiles.

EXAMPLE 2. For each sequence  $k = (k_v)_{v \in \mathbb{N}}$  of natural numbers there exists a tiling  $\mathcal{P}_k = \{P_v | v \in \mathbb{N}\}$  of  $\mathbb{R}^3$  such that each  $P_v$  is a polyhedral handlebody of genus  $k_v$ . (In particular it is possible to decompose  $\mathbb{R}^3$  into handlebodies of pairwise distinct genus.) Again this can be done without interlocking (with interlocking, resp.) each tile.

To do so we start with the regular tiling  $\{T_n(W) | n \in \mathbb{Z}^3\}$  of  $\mathbb{R}^3$  by unit cubes; here  $W = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x_\mu \leq 1, \mu = 1, 2, 3\}$  denotes the standard unit cube and  $T_n: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , for each  $n = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3$ , the translation  $T_n(x) = x + n$ . With the help of the function  $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ , given by  $\chi(v) = 0$  if  $v \equiv 0$  or  $3$  modulo  $4$ ,  $\chi(v) = 1$  if  $v \equiv 1$  or  $2$  modulo  $4$ , we partition  $\mathbb{Z}^3$  into the two subsets  $A' = \{n \in \mathbb{Z}^3 | \sum_{\mu=1}^3 \chi(n_\mu) \equiv 1\}$ ,

$B' = \{n \in \mathbb{Z}^3 | \sum_{\mu=1}^3 \chi(n_\mu) \equiv 2\}$ . If we now put

$$(1) \quad A = \bigcup_{n \in A'} T_n(W), \quad B = \bigcup_{n \in B'} T_n(W)$$

then  $A \cup B = \mathbb{R}^3$ ,  $\text{int } A \cap \text{int } B = \emptyset$  and for  $t := (2, 2, 2)$

$$(2) \quad T_t(A) = B, \quad T_t(B) = A.$$

This last relation follows from  $\chi(v+2) = 1 - \chi(v) \in \{0, 1\}$ . Since  $\chi$  is periodic with period 4 we have

$$(3) \quad T_{4n}(A) = A, \quad T_{4n}(B) = B \quad (n \in \mathbb{Z}^3).$$

Looking at  $A \cap V$  (see Fig. 1(a)) for  $V = 4W = \{x \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x_\mu \leq 4, \mu = 1, 2, 3\}$  and considering (1), (2) and (3) we see that we have decomposed  $\mathbb{R}^3$  into two congruent

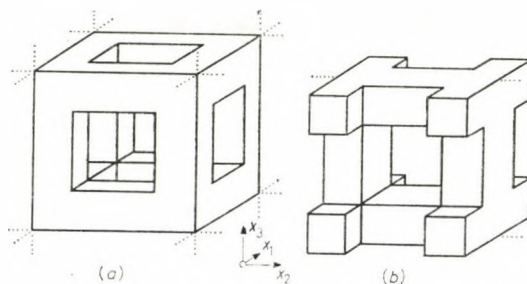


Fig. 1

polyhedral sets  $A, B$ , each an “infinite jungle gym”, i.e. a tubular neighbourhood of the 1-skeleton of a regular tessellation of  $\mathbb{R}^3$  by cubes (of edge length 4). Once we have this regular decomposition  $\mathbb{R}^3 = A \cup B$  in mind and observe that  $A \cap T_{(-2,0,0)}V$  is a polyhedral solid torus (see Fig. 1(b)) our examples get obvious as subdecompositions of  $A$  and  $B$ . For this we set for  $i \in \mathbb{Z}^3$   $A(i) := T_{4i}(A \cap T_{(-2,0,0)}V)$   $B(i) := T_{4i}(B \cap T_{(0,2,2)}V) = T_i(A(i))$  and  $B'(i) := T_{4i}(B \cap T_{(2,2,0)}V)$ , so  $A$  is decomposed into the  $A(i)$ 's,  $B$  once into the  $B(i)$ 's and once into the  $B'(i)$ 's, and all these pieces are pairwise congruent solid tori. Note that  $A(i), B(j)$  are not interlocked whereas  $A(i), B'(j)$  are interlocked if and only if  $i-j$  equals  $(1, 0, 0)$  or  $(1, 1, 0)$ ; furthermore that a union of  $A(i)$ 's lined up in succession along the  $x_2$ -direction is a handlebody, and the same holds for the  $B(i)$ 's and for the  $B'(i)$ 's.

So to construct the tiling of Example 2 we set  $P_1 := \bigcup_{v=0}^{k_1-1} A(0, v, 0)$  and proceed by induction: Assume  $\mu > 1$ ,  $P_1, \dots, P_{\mu-1}$  are already chosen and we want to construct  $P_\mu$  of genus  $k_\mu$ . *Case 1:*  $\mu$  is odd. Among those  $A(i)$  ( $i \in \mathbb{Z}^3$ ) which are not contained in  $P_1 \cup \dots \cup P_{\mu-1}$  there is exactly one, say  $A(i_1^*, i_2^*, i_3^*)$ , with minimal distance from  $(e^{-1}, e^{-2}, e^{-3})$  (each other point in  $W$  with distinct distances from all the  $A(i)$ 's could serve as well). Then we set  $P_\mu := \bigcup_{v=0}^{k_\mu-1} A(i_1^*, i_2^* + \varepsilon v, i_3^*)$  with  $\varepsilon = 1$  if  $i_2^* \geq 0$  and  $\varepsilon = -1$  if  $i_2^* < 0$ . *Case 2:*  $\mu$  is even and we want no interlocking in  $\mathcal{P}_k$ . We proceed exactly as in Case 1 with  $B(i)$ 's in place of  $A(i)$ 's. *Case 3:*  $\mu$  is even and we want interlocking in  $\mathcal{P}_k$ . Again like Case 1, this time with  $B'(i)$ 's in place of  $A(i)$ 's. Our construction ensures that each  $A(i)$  and each  $B(i)$  (or  $B'(i)$ , resp.) is contained in exactly one  $P_\mu$  ( $\mu \in \mathbb{N}$ ) so that a tiling of  $\mathbb{R}^3$  results. If  $k_\mu = k_\lambda$  we have  $P_\mu$  congruent to  $P_\lambda$ , so Example 1 results as a special case of our construction for Example 2.

## REFERENCES

- [1] GRÜNBAUM, B. and SHEPHARD, G. C., Tilings with congruent tiles, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* **3** (1980), 951—973. MR 81k: 51014.
- [2] DANZER, L., GRÜNBAUM, B. and SHEPHARD, G. C., Does every type of polyhedron tile three-space?, *Structural Topology* **8** (1983), 3—14.

(Received June 22, 1984)

MATHEMATISCHES INSTITUT  
UNIVERSITÄT BERN  
SIDLERSTRASSE 5  
CH-3000 BERN  
SWITZERLAND

## NO MORE THAN NINE UNIT BALLS CAN TOUCH A CLOSED UNIT HEMISPHERE

H. SACHS

*Dedicated to Professor László Fejes Tóth on the occasion of his 70th birthday*

### 1. Introduction

**1.1. Terminology.** In a suitably chosen orthogonal coordinate system of the three-dimensional euclidean space,

a *unit ball* is the set of points  $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ,

a *unit sphere* is the set of points  $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ,

an *open unit hemisphere* is the set of points  $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ ,

a *closed unit hemisphere* is the set of points  $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ .

The boundary of the (closed or open) unit hemisphere is the set of points  $\{(x, y, 0) | x^2 + y^2 = 1\}$  (i.e., the equator of the unit sphere).

We shall pack balls in space which are allowed to touch but not to overlap.

**1.2. Problems and results.** Motivated by two combinatorial-geometrical problems, in [8] (1976) it is shown that eight (nine) points no two of which are closer than unit distance from one another can be placed on an open (closed) unit hemisphere and, also in [8], the following conjectures are formulated.

**CONJECTURE A.** The maximum number of points which can be placed on an open hemisphere at least unit distance from one another is eight.

**CONJECTURE B.** The maximum number of points which can be placed on a closed unit hemisphere at least unit distance from one another is nine.

**CONJECTURE AB.** If nine points lie on a closed unit hemisphere at least unit distance from one another, then six of them are on the boundary of the hemisphere.

The truth of AB would imply the truth of both A and B.

Conjecture B, due to L. Fejes Tóth, will be proved here; the resulting Theorem (see Section 2.3) can equivalently be formulated as

**THEOREM 1.** *The maximum number of unit balls which can touch a unit ball in such a way that the touching points all lie on a closed unit hemisphere is nine.*

Call a packing of balls in which each ball touches at least  $n$  other balls an *n-neighbour packing*.

In 1976 L. Fejes Tóth [8] showed that Theorem 1 has an interesting consequence:

---

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A45, 52A40; Secondary 52A15.

*Key words and phrases*. Ball, sphere, hemisphere, ball packing,  $n$ -neighbour packing, density of a packing, twelve balls theorem.

**THEOREM 2.** *The least number  $n$  such that any  $n$ -neighbour packing of equal balls in space has a positive density is equal to ten.*

This theorem was proved in 1981 by G. Fejes Tóth [3]; the present proof differs essentially from that of G. Fejes Tóth.

Let  $N$  denote the maximum number of unit balls that can simultaneously touch another unit ball  $\mathbf{B}$ . It is easy to see that  $N \geq 12$  since the 12 vertices of a regular icosahedron inscribed in  $\mathbf{B}$  have distances greater than one, and it has been shown by elementary means that there is simply not enough space available on the surface of  $\mathbf{B}$  for it to be touched by as many as 14 other unit balls<sup>1</sup>; thus we have

**PROPOSITION 1.**  *$N$  is either 12 or 13.*

In 1694, in a famous controversy (see, e.g., [2]), D. Gregory conjectured  $N=13$  whereas I. Newton conjectured  $N=12$ . Only in 1874 a proof due to R. Hoppe<sup>2</sup> was published establishing the

**TWELVE BALLS THEOREM.**  $N=12$ .

In Section 2 an elementary proof of Conjecture B will be given which avoids the rather deep lying Twelve Balls Theorem making use only of the much weaker Proposition 1.

It should be mentioned that Proposition 1 follows also from an inequality of L. Fejes Tóth [4] (1943).

## 2. Proof of Conjecture B

**2.1. Coordinates; Notation.** Let  $\varphi$  (longitude) and  $\theta$  (latitude) be the spherical coordinates of the points of the unit sphere:

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2};$$

the northern closed hemisphere  $H$  is characterized by  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Let  $A$  denote the annular spherical region characterized by  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$  and let  $C = H - A$ .

Note that, on the unit sphere, euclidean distance 1 is equivalent to spherical distance  $\frac{\pi}{3}$ .

**2.2. PROPOSITION 2.** *It is impossible to place 7 points at least unit distance from one another on  $A$ .*

<sup>1</sup> See, e.g., H.S.M. Coxeter [2]; the space available suffices for about 13.397 balls.

<sup>2</sup> See C. Bender [1] (1874). Simpler proofs were given by S. Günter [5] (1875), K. Schütte and B. L. van der Waerden [7] (1953), and J. Leech [6] (1956).



PROOF. Suppose that the 7 points  $P_i = (\varphi_i, \theta_i)$  ( $i=0, 1, \dots, 6$ ) with spherical distances  $\cong \frac{\pi}{3}$  are placed on  $A$ ; put  $\varphi_7 = 2\pi$ . We may assume that

$$\varphi_0 = 0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_6 < \varphi_7 = 2\pi;$$

put

$$d = \min_{i=0,1,\dots,6} (\varphi_{i+1} - \varphi_i).$$

Then

$$d \cong \frac{2\pi}{7}.$$

We may suppose that  $\varphi_1 = d$ : then the section of  $A$  between  $\varphi=0$  and  $\varphi = \frac{2\pi}{7}$  (i.e., the region  $R: 0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{7}, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$ ) contains both  $P_0$  and  $P_1$ . However, this is impossible since an easy computation shows that the spherical diameter of the closed hull of  $R$  is (slightly) smaller than  $\frac{\pi}{3}$ . This proves Proposition 2.

**2.3. THEOREM.** *The maximum number of points which can be placed on a closed unit hemisphere at least unit distance from one another is nine.*

PROOF. Clearly, it suffices to show that it is impossible to place 10 points at least unit distance from one another on  $H$ .

Suppose that 10 points at spherical distances  $\cong \frac{\pi}{3}$  are placed on  $H$ , with  $p$  of them — say,  $(\varphi_1, \theta_1), (\varphi_2, \theta_2), \dots, (\varphi_p, \theta_p)$  — on  $C$  and  $q=10-p$  of them — say  $Q_1, Q_2, \dots, Q_q$  — on  $A$ . Then the  $s=2p+q$  points

$$(\varphi_1, \pm\theta_1), (\varphi_2, \pm\theta_2), \dots, (\varphi_p, \pm\theta_p),$$

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_q$$

have spherical distances  $\cong \frac{\pi}{3}$ . By virtue of Proposition 2 we have  $q < 7$  and therefore

$$s = 2p + q = 20 - q > 13,$$

contradicting Proposition 1.

The Theorem is now proved.

Conjecture B is now settled; Conjectures A and AB, however, remain open.

The author thanks D. H. Younger and P. D. Vestergaard for many helpful discussions and the referee for his valuable remarks.

## REFERENCES

- [1] BENDER, C., Bestimmung der grössten Anzahl gleich grosser Kugeln, welche sich auf eine Kugel von demselben Radius, wie die übrigen, auflegen lassen, *Grunert Arch.* **56** (1874), 302—313.
- [2] COXETER, H. S. M., An upper bound for the number of equal non-overlapping spheres that can touch another of the same size, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1963, 53—71. *MR* **29** # 1581; errate **29**, p. 1437; also contained in: *Twelve geometric essays*, Southern Illinois University Press, Carbondale, Ill.; Feffer & Simons, Inc., London—Amsterdam, 1968. *MR* **46** # 9843.
- [3] FEJES TÓTH, G., Ten-neighbour packing of equal balls, *Period. Math. Hungar.* **12** (1981), 125—127. *MR* **82e**: 52013.
- [4] FEJES TÓTH, L., Über die Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems, *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **53** (1943), 66—68. *MR* **8**—167.
- [5] GÜNTER, S., Ein stereometrisches Problem, *Grunert Arch.* **57** (1875), 209—215.
- [6] LEECH, J., The problem of the thirteen spheres, *Math. Gaz.* **40** (1956), 22—23. *MR* **17**—888.
- [7] SCHÜTTE, K. and WAERDEN, B. L. VAN DER, Das Problem der dreizehn Kugeln, *Math. Ann.* **125** (1953), 325—334. *MR* **14**—787.
- [8] FEJES TÓTH, L. and SACHS, H., Research problem No. 17, *Period. Math. Hungar.* **7** (1976), 87.

(Received June 22, 1984)

TECHNISCHE HOCHSCHULE ILMENAU  
POSTFACH 327  
DDR—6300 ILMENAU  
GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

## Globale Eigenschaften ebener isotroper Zwangsläufe

HELMUT POTTMANN und OTTO RÖSCHEL

Professor L. Fejes Tóth zum 70. Geburtstag gewidmet

Die Kinematik der isotropen Ebene war in letzter Zeit Gegenstand bemerkenswerter Untersuchungen. So studierte J. Tölke ([15], [17] und [18]) Zwangsläufe im Sinne der *fünfgliedrigen Gruppe  $G_5$  der Ähnlichkeiten der isotropen Ebene* und der eine Autor ([6], [7] und [9]) Zwangsläufe im Sinne der *dreigliedrigen Gruppe  $\mathfrak{B}_3$  der Bewegungen der isotropen Ebene*. Da es vor kurzem in [8] gelungen ist, den Satz von Holditch (vgl. [1, S. 120]) auch für *geschlossene ebene isotrope Zwangsläufe* (im Sinne der Gruppe  $\mathfrak{B}_3$ ) auszusprechen, soll hier versucht werden, weitere *globale Aussagen* über ebene isotrope Zwangsläufe zu beweisen.

### 1. Grundlagen

In der affinen Ebene  $\pi = A_2(\mathbf{R})$  wird durch

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \xi_0(t) &= a(t) + \xi \\ \eta_0(t) &= b(t) + \xi c(t) + \eta \end{aligned}$$

$(a(t), b(t), c(t)) \in C^1(I)$ ,  $t \in I = [0, 1] \subset \mathbf{R}$ ) ein *offener Zwangslauf  $\mathfrak{Z}(t)$  im Sinne der ebenen isotropen Bewegungsgruppe  $\mathfrak{B}_3$*  bestimmt (vgl. [6]). Jeder im Gangsystem  $\Sigma$  feste Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $(\xi, \eta)$  beschreibt bei (1.1) eine Bahnkurve  $k(P) = \{P_0(t)\}$  in der Rastebene  $\Sigma_0$ .

Im folgenden werden wir die Anfangsbedingungen

$$(1.2) \quad a(0) = b(0) = c(0) = 0$$

vorgeben.

Dem ebenen isotropen Zwangslauf  $\mathfrak{Z}(t)$  (1.1) kann durch eine von K. Strubecker ([13] und [14]) stammende *isotrope kinematische Abbildung*

$$(1.3) \quad \begin{aligned} K: \quad \mathfrak{B}_3 &\longrightarrow \mathbf{P}_3 \\ (a(t), b(t), c(t)) &\rightarrow \left( 1: a(t): \frac{c(t)}{2}: b(t) - \frac{a(t)c(t)}{2} \right) \end{aligned}$$

der ebenen isotropen Bewegungen ein *Kurvenstück  $z^*(t)$  in einem reellen dreidimensionalen projektiven Bildraum  $\mathbf{P}_3$  zugeordnet werden.  $z^*$  enthält dann wegen*

1980 Mathematics Subject Classification. Primary 53A35.

Key words and phrases. Isotropic kinematics, global properties of isotropic curves.

(1.2) den Ursprung  $O(1:0:0:0)$  dieses Bildraumes. Die Zusammensetzung isotroper Bewegungen in  $\pi$  induziert im projektiven Bildraum  $\mathbf{P}_3$  eine fünfgliedrige Gruppe von projektiven Kollineationen

$$(1.4) \quad \mathfrak{G}_5 \begin{cases} x'_0 = x_0 \\ x'_1 = c_1 x_0 + x_1 \\ x'_2 = c_2 x_0 + x_2 \\ x'_3 = c_3 x_0 + c_4 x_1 + c_5 x_2 + x_3, \end{cases} \quad (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbf{R})$$

die nach [9] sowohl als Untergruppe in der sechsgliedrigen Gruppe  $\mathfrak{B}_6^{(1)}$  der *Bewegungen eines einfach isotropen Raumes*  $I_3^{(1)}$  als auch in der sechsgliedrigen Gruppe  $\mathfrak{B}_6^{(2)}$  der *Bewegungen eines zweifach isotropen Raumes*  $I_3^{(2)}$  enthalten ist.<sup>1</sup> Beide Räume besitzen  $x_0=0$  als *Fernebene*  $\omega$  und den Punkt  $F(0:0:0:1)$  als *absoluten Punkt*. Es ist daher vorteilhaft, in diesen Räumen inhomogene Koordinaten

$$(1.5) \quad x_0: x_1: x_2: x_3 = 1: x: y: z \quad (x_0 \neq 0)$$

zu verwenden. In [9] wurde gezeigt, daß es zweckmäßig ist, die affine Ebene  $\pi = A_2(\mathbf{R})$  mit ihren isotropen Zwangsläufen  $\mathcal{Z}(t)$  (1.1) als *isotrope Ebene*  $y=0$  ( $x=\xi_0$ ,  $z=\eta_0$ ) in den oben beschriebenen Flaggenraum  $I_3^{(2)}$  einzubetten. Die absolute Gerade  $f$  (Ferngerade der Ebene  $x=0$ ) von  $I_3^{(2)}$  schneidet dann  $\pi$  genau im absoluten Punkt  $F$ .<sup>2</sup>

## 2. Steinerformeln

Bezeichnet  $U_0$  den Ursprung  $(0,0)$  des Rastsystems  $\Sigma_0$  und  $U$  den Ursprung des Gangsystems  $\Sigma$ , so überstreichen die Strecken  $\overline{U_0 P_0(t)}$  ( $P_0(t) \in k(P)$ ) eine *Sektorenfläche mit dem Flächeninhalt*

$$(2.1) \quad F_P = \frac{1}{2} \int_0^1 (\xi_0(t) \dot{\eta}_0(t) - \dot{\xi}_0(t) \eta_0(t)) dt$$

(Ableitungen nach  $t$  kennzeichnen wir durch Punkte), für den wir mit

$$(2.2) \quad F_P = \frac{\xi}{2} (c(1)\xi + b(1)) - \frac{a(1)}{2} \eta + \frac{\xi}{2} \int_0^1 (a(t)\dot{c}(t) - \dot{a}(t)c(t)) dt + F_U$$

ein isotropes Analogon zur *Steinerformel* gewinnen<sup>3</sup>, wobei

$$(2.3) \quad F_U = \frac{1}{2} \int_0^1 (a(t)b(t) - \dot{a}(t)b(t)) dt$$

den Sektorenflächeninhalt der Bahnkurve des Ursprungs  $U$  bezeichnet.

<sup>1</sup> Eine ausführliche Diskussion dieser Räume erfolgt zum Beispiel in [2] bzw. in [10].

<sup>2</sup> Die im  $I_3^{(2)}$  wirkende Bewegungsgruppe induziert in  $\pi$  genau die isotrope Bewegungsgruppe  $\mathfrak{B}_3$ .

<sup>3</sup> Für ebene euklidische Zwangsläufe kann das entsprechende Resultat in [1, S. 116 f.] nachgelesen werden.

Wegen

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \xi_0(1) - \xi_0(0) &= a(1) \\ \eta_0(1) - \eta_0(0) &= b(1) + c(1)\xi \end{aligned}$$

können wir die in (2.2) auftretenden Faktoren als *halbe isotrope Gesamtlänge der Bahnkurve* beziehungsweise als *halbe isotrope Gesamtspanne der Bahnkurve* von  $P(\xi, \eta)$  ansprechen. Eine Deutung des in (2.2) auftretenden Integrals erfolgt über die kinematische Abbildung:

Wird die kinematische Bildkurve  $z^*(t)$  des offenen isotropen Zwangslaufs  $\mathcal{Z}(t)$  aus dem absoluten Punkt  $F$  in die Grundrißebene  $\pi_1$  ( $z=0$ ) projiziert, so erhalten wir eine Kurve  $z^{**}(t)$ , deren *Sektorenfläche* gemäß (2.1) den Inhalt

$$(2.5) \quad F^* = \frac{1}{4} \int_0^1 (a(t)\dot{c}(t) - \dot{a}(t)c(t)) dt$$

besitzt. Damit haben wir den

**SATZ 2.1.** *Bei einem offenen isotropen Zwangslauf  $\mathcal{Z}(t)$  in der Ebene  $\pi$  hängen die Flächeninhalte der Sektorenflächen aller Bahnkurven nur von der Wahl des Ursprungs  $U_0$  im Rastsystem  $\Sigma_0$  und von gewissen Zwangslaufkonstanten ab, deren Deutung über (2.4) und (2.5) erfolgen kann.*

Zeichnet man nun auf der absoluten Geraden  $f$  des  $I_3^{(2)}$  den Punkt  $Y_u$  ( $0:0:1:0$ ) aus und trägt nach geeigneter Orientierung einem von W. Wunderlich stammenden — in [16, S. 333 f.] ausgeführten — Gedanken folgend in der Ausgangslage  $\Sigma(0) = \Sigma_0 = \pi$  über jedem Punkt  $P$  der Gangebene auf der Geraden  $[P, Y_u]$  von  $P$  ausgehend eine Strecke der isotropen Länge  $F_P$  (2.2) auf, so erhält man eine Diagrammfläche  $\Phi$ , die sich durch

$$(2.6) \quad 2y = c(1)x^2 + b(1)x - a(1)z + 4F^*x + 2F_U$$

darstellen läßt. Für  $c(1) \neq 0$  ist  $\Phi$  eine *zweifach isotrope Kugel* mit dem Radius  $\frac{1}{c(1)}$ , die für  $a(1)=0$  zu einer *Grenzkugel* wird; für  $c(1)=0$  stellt sich eine Ebene ein, die im Fall  $c(1)=a(1)=0$  isotrop ist.  $c(1)=0$  kennzeichnet einen isotropen Zwangslauf  $\mathcal{Z}(t)$ , bei dem *Anfangs- und Endlage*  $\Sigma(0)$  und  $\Sigma(1)$  durch *Schiebung auseinander hervorgehen*; gilt weiter  $a(1)=0$ , dann ist diese Schiebung isotrop.

Punkte der Gangebene  $\Sigma$ , die denselben Sektorenflächeninhalt bestimmen, liegen für  $c(1) \neq 0$ ,  $a(1) \neq 0$  auf einem *isotropen Kreis* in  $\Sigma$ , dessen Radius  $\frac{1}{c(1)}$  ist. Für  $c(1) \neq 0$ ,  $a(1)=0$  zerfallen diese isotropen Kreise in *zwei isotrope Geraden*, die als *singuläre isotrope Kreise* aufzufassen sind. Für  $c(1)=0$  liegen diese Punkte auf *Geraden eines Parallelstrahlbüschels*, das im Fall  $a(1)=c(1)=0$  *isotrop* wird. Damit haben wir den

**SATZ 2.2.** *Bei einem offenen ebenen isotropen Zwangslauf  $\mathcal{Z}(t)$  liegen alle Punkte von  $\Sigma$ , die dieselben Bahnsektorenflächeninhalte besitzen, im allgemeinen auf isotropen Kreisen, die unter Umständen zu Geraden eines Parallelstrahlbüschels entarten.*

Punkte  $X$  der Gangebene  $\Sigma$  mit verschwindendem Bahnsektorenflächeninhalt  $F_X = 0$  liegen im Fall  $c(1) \neq 0$  auf dem isotropen Kreis  $k$

$$(2.7) \quad f(\xi, \eta) := \xi^2 + \frac{\xi}{c(1)} [b(1) + 4F^*] - \frac{a(1)}{c(1)} \eta + F_U \frac{2}{c(1)} = 0.$$

Für den Sektorenflächeninhalt  $F_P$  eines beliebigen Punktes  $\bar{P}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  der Gangebene  $\Sigma$  gilt dann mit (2.2)

$$(2.8) \quad F_P = \frac{c(1)}{2} f(\bar{\xi}, \bar{\eta}).$$

Da  $f(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  nach [12, S. 349] die *isotrope Potenz* von  $\bar{P}$  bezüglich  $k$  darstellt, und  $\frac{c(1)}{2}$  als *halber isotroper Gesamtdrehwinkel* von  $\Sigma(0)$  nach  $\Sigma(1)$  aufgefaßt werden kann, gilt als Analogon zu einem in [1, S. 119] angeführten Ergebnis der ebenen euklidischen Kinematik der

**SATZ 2.3.** *Bei einem offenen ebenen isotropen Zwangslauf  $\mathcal{Z}(t)$  kann der zu einem Punkt  $\bar{P}$  der Gangebene  $\Sigma$  gehörende Flächeninhalt  $F_P$  der Bahnsektorenfläche im allgemeinen als Produkt des halben isotropen Gesamtdrehwinkels und der isotropen Potenz von  $\bar{P}$  bezüglich eines in  $\Sigma$  festen Kreises  $k$  gewonnen werden.*

Für drei paarweise verschiedene, nicht kollineare Punkte  $A_1, A_2$  und  $A_3$  der Gangebene  $\Sigma$  mit den Koordinaten  $(\alpha_i, \beta_i)$  ( $i=1, 2, 3$ ) erhalten wir gemäß (2.2)

$$(2.9) \quad F_{A_i} = (\alpha_i)^2 \frac{c(1)}{2} + \alpha_i \left( 2F^* + \frac{b(1)}{2} \right) - \beta_i \frac{a(1)}{2} + F_U.$$

Definieren wir

$$(2.10) \quad F_{A_i A_j} := \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{bmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

so gilt für den Flächeninhalt  $F_{A_1 A_2 A_3}$  des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks

$$(2.11) \quad F_{A_1 A_2 A_3} = F_{A_1 A_2} + F_{A_2 A_3} - F_{A_1 A_3},$$

woraus wir mit (2.9) nach einigen Umformungen

$$(2.12) \quad \begin{aligned} & F_{A_1} F_{A_2 A_3} - F_{A_2} F_{A_1 A_3} + F_{A_3} F_{A_1 A_2} = \\ & = F_U F_{A_1 A_2 A_3} + \frac{c(1)}{2} [(\alpha_1)^2 F_{A_2 A_3} - (\alpha_2)^2 F_{A_1 A_3} + (\alpha_3)^2 F_{A_1 A_2}] \end{aligned}$$

gewinnen, was als *Verallgemeinerung des Satzes von Holditch* (vgl. [8]) angesprochen werden kann.



### 3. Überstrichene Flächen isotropen und nichtisotropen Typs

In Abschnitt 2 haben wir Sektorenflächen der Bahnkurven bezüglich eines in  $\Sigma_0$  festen Punktes  $U_0$  studiert. Nun wollen wir die Bahnkurven  $k(P)$  der Punkte  $P$  des Gangsystems  $\Sigma$  bei  $\mathfrak{Z}(t)$  (1.1) einer Parallelprojektion auf eine feste Gerade  $g_0$  in  $\Sigma_0$  unterwerfen und untersuchen, wie sich die Flächeninhalte der so zwischen  $g_0$  und  $k(P)$  bestimmten *Flächen isotropen oder nichtisotropen Typs* verhalten (vgl. Abb. 1).

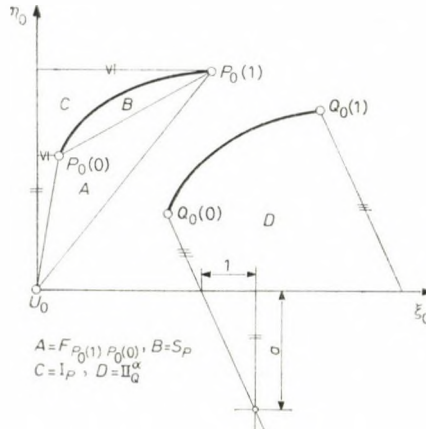


Abb. 1

Wir haben offensichtlich zwei Fälle zu unterscheiden:

FALL 1.  $g_0$  ist eine isotrope Gerade, die wir o.B.d.A. durch  $\xi_0=0$  festlegen können. Die Parallelprojektion soll nicht parallel zu  $g_0$  erfolgen, was es ermöglicht, die Projektionsrichtung nach isotroper Scherung von  $\Sigma_0$  in der Richtung von  $\xi_0$  zu wählen. Wir erhalten damit als *Flächeninhalt isotropen Typs*  $I_P$  der Bahnkurve  $k(P)$

$$(3.1) \quad I_P = \int_0^1 \dot{\eta}_0(t) \xi_0(t) dt = \xi^2 c(1) + \xi \left[ b(1) + \int_0^1 a(t) \dot{c}(t) dt \right] + I_U,$$

wobei wir mit

$$(3.2) \quad I_U = \int_0^1 a(t) \dot{b}(t) dt$$

den zum Ursprung  $U$  des Gangsystems gehörenden Flächeninhalt isotropen Typs bezeichnen.

In der kinematischen Abbildung entspricht dem Zwangslauf  $\mathfrak{Z}(t)$  die Bildkurve  $z^*(t)$  (1.3), die den Grundriß  $z^{*'}(t)$  besitzt, dem nach Auszeichnung der  $y$ -Achse als Bezugsgerade  $g_0$  in  $\pi_1$  der Flächeninhalt isotropen Typs  $I^*$  mit

$$(3.3) \quad I^* = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{c}(t) a(t) dt$$

zugeordnet werden kann, was eine Deutung des in (3.1) auftretenden Integrals ermöglicht.

Punkte  $P$  von  $\Sigma$ , die bei  $\mathfrak{Z}(t)$  denselben Bahnflächeninhalt isotropen Typs besitzen, liegen für  $c(1) \neq 0$  im allgemeinen auf zwei isotropen Geraden in  $\Sigma$ , die für  $c(1) = 0$  stets zusammenfallen.

Tragen wir wieder in der Ausgangslage  $\Sigma(0) = \Sigma_0 = \pi$  auf der Geraden  $[P, Y_u]$  die Strecke isotroper Länge  $I_P$  (3.1) auf, so erhalten wir als Diagrammfläche  $\Phi$

$$(3.4) \quad y = c(1)x^2 + x[b(1) + 2I^*] + I_U,$$

das heißt für  $c(1) \neq 0$  eine Grenzkugel des Flaggenraumes  $I_2^{(2)}$  mit dem Radius  $\frac{1}{2c(1)}$  (vgl. [2. I, S. 125]). Für  $c(1) = 0$  wird  $\Phi$  zu einer isotropen Ebene des  $I_3^{(2)}$ . Damit haben wir den

**SATZ 3.1.** *Die Bahnkurven der Punkte  $P$  der Gangebene  $\Sigma$  besitzen bei einem offenen ebenen isotropen Zwangslauf  $\mathfrak{Z}(t)$  Flächeninhalte isotropen Typs  $I_P$ , die gemäß (3.1) von den oben gedeuteten Zwangslaufkonstanten abhängen. Punkte  $P$  von  $\Sigma$ , denen derselbe Bahnflächeninhalt isotropen Typs zugeordnet wird, liegen im allgemeinen auf zwei isotropen Geraden in  $\Sigma$ , die stets zusammenfallen, wenn Ausgangs- und Endlage von  $\Sigma$  durch Schiebung ineinander übergeführt werden können.*

Punkte  $P$  von  $\Sigma$ , für die  $I_P = 0$  gilt, liegen für  $c(1) \neq 0$  auf zwei isotropen Geraden (singulären isotropen Kreisen), die durch

$$(3.5) \quad g(\xi) := \xi^2 + \xi \frac{b(1) + 2I^*}{c(1)} + \frac{I_U}{c(1)} = 0$$

beschrieben werden. Die einem Punkt  $\bar{P}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  von  $\Sigma$  zugeordnete Fläche isotropen Typs  $I_{\bar{P}}$  läßt sich dann als

$$(3.6) \quad I_{\bar{P}} = c(1)g(\bar{\xi})$$

berechnen, womit wir gemäß Abschnitt 2 den folgenden Satz haben:

**SATZ 3.2.** *Der einem beliebigen Punkt  $\bar{P}$  des Gangsystems beim offenen isotropen Zwangslauf  $\mathfrak{Z}(t)$  zugeordnete Flächeninhalt isotropen Typs läßt sich im allgemeinen als Produkt des isotropen Gesamtdrehwinkels von  $\Sigma(0)$  nach  $\Sigma(1)$  und der isotropen Potenz des Punktes  $\bar{P}$  bezüglich eines isotropen Geradenpaares gewinnen.*

**FALL II.**  $g_0$  ist eine nichtisotrope Gerade, die durch isotrope Bewegung in die  $\xi_0$ -Achse gebracht werden kann. Die Parallelprojektion soll so erfolgen, daß die Projektionsstrahlen mit der  $\xi_0$ -Achse den isotropen Winkel  $\alpha$  ( $\alpha \neq 0$ ) einschließen (vgl. Abb. 1). Das so zwischen  $k(P)$  und  $\eta_0 = 0$  entstehende Flächenstück besitzt den Inhalt

$$(3.7) \quad \begin{aligned} II_{\bar{P}}^a = & -\frac{1}{2\alpha} [\xi^2 c^2(1) + 2\xi\eta c(1) + 2\xi b(1)c(1) + 2\eta b(1)] + \\ & + \xi \int_0^1 \dot{a}(t)c(t) dt + \eta a(1) + II_U^a. \end{aligned}$$

der als  $\alpha$ -Flächeninhalt nichtisotropen Typs von  $k(P)$  bezeichnet werden soll.  $II_0^\alpha$  ist dabei der zum Ursprung  $U$  des Gangsystems gehörende  $\alpha$ -Flächeninhalt nichtisotropen Typs.

Die einzige in (3.7) auftretende neue Zwanglaufkonstante kann wieder über die kinematische Abbildung gedeutet werden: Wird in der Grundrißebene  $\pi_1$  die Gerade  $g_0$  als  $x$ -Achse definiert, so besitzt der Grundriß  $z^{**}(t)$  der kinematischen Bildkurve  $z^*(t)$  von  $\mathfrak{Z}(t)$  den  $\alpha$ -Flächeninhalt nichtisotropen Typs

$$(3.8) \quad II^{*\alpha} = -\frac{1}{8\alpha} c^2(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{a}(t) c(t) dt,$$

womit es gelungen ist, alle in (3.7) auftretenden Zwanglaufkonstanten zu deuten.

Alle Punkte  $P$  der Gangebene  $\Sigma$ , denen derselbe  $\alpha$ -Bahnflächeninhalt nichtisotropen Typs zugeordnet ist, liegen für  $c(1) \neq 0$  auf Hyperbeln erster oder zweiter Art (vgl. [10]), die gemeinsamen Mittelpunkt und gemeinsame Asymptoten besitzen, wobei eine isotrop ist. Für  $c(1)=0$  stellen sich Geraden eines Parallelstrahlbüschels ein.

Als Diagrammfläche  $\Phi$  findet man hier im allgemeinen das hyperbolische Paraboloid

$$(3.9) \quad \begin{aligned} 2\alpha y = 2\alpha II_0^\alpha + \left[ 4\alpha II^{*\alpha} + \frac{1}{2} c^2(1) \right] x + 2\alpha a(1)z - \\ - c^2(1)x^2 - 2c(1)xz - 2b(1)c(1)x - 2b(1)z, \end{aligned}$$

das die absolute Gerade  $f$  enthält (vgl. [10]). Verschwindet der isotope Gesamtdrehwinkel  $c(1)$ , so wird  $\Phi$  zu einer Ebene des  $I_3^{(2)}$ . Damit haben wir den

**Satz 3.3.** *Alle Bahnkurven  $k(P)$  eines offenen ebenen isotropen Zwanglaufs  $\mathfrak{Z}(t)$  besitzen  $\alpha$ -Flächeninhalte nichtisotropen Typs  $II_P^\alpha$ , die gemäß (3.7) von den oben gedeuteten Zwanglaufkonstanten abhängen. Punkte  $P$  der Gangebene  $\Sigma$ , denen bei  $\mathfrak{Z}(t)$  derselbe  $\alpha$ -Flächeninhalt nichtisotropen Typs  $II_P^\alpha$  zugeordnet ist, liegen im allgemeinen auf homothetischen isotropen Hyperbeln erster oder zweiter Art.*

Für Punkte  $P$  mit  $II_P^\alpha = 0$  finden wir so im allgemeinen die Hyperbel  $h$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} h(\xi, \eta) := \xi^2 + 2 \frac{\xi\eta}{c(1)} + 2\xi \frac{b(1)}{c(1)} - \frac{1}{2} \xi + 2\eta \frac{b(1)}{c^2(1)} - \\ - \frac{2\alpha}{c^2(1)} [II_0^\alpha + 2\xi II^{*\alpha} + \eta a(1)] = 0, \end{aligned}$$

mit deren Hilfe wir zu  $\bar{P}(\xi, \eta)$  gemäß (3.7)  $II_P^\alpha$  als

$$(3.11) \quad II_P^\alpha = -\frac{c^2(1)}{2\alpha} h(\xi, \eta)$$

berechnen können, wobei hier  $h(\xi, \eta)$  als isotope Potenz des Punktes  $P$  bezüglich  $h$  aufgefaßt werden kann. Wir haben damit den

**SATZ 3.4.** *Der einem beliebigen Punkt  $\bar{P}$  des Gangsystems  $\Sigma$  beim offenen ebenen isotropen Zwanglauf  $\mathcal{Z}(t)$  zugeordnete  $\alpha$ -Bahnflächeninhalt nichtisotropen Typs läßt sich im allgemeinen gemäß (3.11) aus dem isotropen Gesamtdrehwinkel von  $\Sigma(0)$  nach  $\Sigma(1)$ , dem isotropen Winkel  $\alpha$  und der isotropen Potenz des Punktes  $\bar{P}$  bezüglich einer isotropen Hyperbel erster oder zweiter Art ermitteln.*

Lassen wir schließlich eine *isotrope Normalprojektion* zur Bestimmung dieses Flächeninhaltes zu, so stellt sich mit (3.7)

$$(3.12) \quad II_{\bar{P}}^{\infty} = \eta a(1) + 2\xi II^{*\infty} + II_U^{\infty}$$

ein. Punkte  $P$  der Gangebene  $\Sigma$  mit demselben  $\infty$  — Bahnflächeninhalt nicht-isotroper Art  $II_{\bar{P}}^{\infty}$  liegen demnach auf *Geraden eines Parallelstrahlbüschels* in  $\Sigma$ , das für  $a(1)=0$  isotrop ausfällt. Als *Diagrammfläche*  $\Phi$  stellt sich gemäß (3.9) eine *Ebene des Flaggenraumes*  $I_3^{(2)}$  ein, die für  $a(1)=0$  isotrop ist.

#### 4. Steinerformeln für Sehnenflächenstücke

Die in Abschnitt 2 erklärten Sektorenflächen der Bahnkurven sind nicht  $\mathfrak{B}_3$ -invariant mit dem Zwanglauf  $\mathcal{Z}(t)$  verknüpft. Dies kann jedoch erreicht werden, wenn man die von den Sehnen  $\overline{P_0(0)P_0(t)}$  ( $t \in [0, 1]$ ) der Bahnkurven überstrichene Fläche betrachtet. Man erhält so als *Sehnenflächeninhalt der Bahnkurve  $k(P)$  eines in  $\Sigma$  festen Punktes  $P(\xi, \eta)$*  beim offenen ebenen isotropen Zwanglauf  $\mathcal{Z}(t)$

$$(4.1) \quad S_P = \frac{1}{2} \int_0^1 ((\xi_0(t) - \xi)\dot{\eta}_0(t) - (\eta_0(t) - \eta)\dot{\xi}_0(t)) dt = F_U + 2\xi F^*,$$

wobei  $F_U$  und  $F^*$  die in (2.3) und (2.5) definierten Sektorenflächeninhalte sind, die in diesen Fällen auch als Sehnenflächeninhalte aufgefaßt werden können:  $F_U = S_U$  und  $F^* = S^*$ .

Betrachten wir drei paarweise verschiedene, nicht kollineare Punkte  $A_1, A_2$  und  $A_3$  ( $\alpha_i, \beta_i$ ) ( $i=1, 2, 3$ ) der Gangebene  $\Sigma$ , so erhalten wir

$$(4.2) \quad S_{A_i} = S_U + 2S^* \alpha_i,$$

woraus ein zu (2.12) analoges Resultat folgt. Als *verallgemeinerten Satz von Holditch* erhalten wir so statt (2.12) die Formel

$$(4.3) \quad S_{A_1}(\alpha_2 - \alpha_3) + S_{A_2}(\alpha_3 - \alpha_1) + S_{A_3}(\alpha_1 - \alpha_2) = 0.$$

Damit gilt der

**SATZ 4.1.** *Die Sehnenflächeninhalte der Bahnkurven eines offenen ebenen isotropen Zwanglaufs  $\mathcal{Z}(t)$  werden durch die Steiner-Formel (4.1) beschrieben. Punkte der Gangebene  $\Sigma$ , denen bei  $\mathcal{Z}(t)$  derselbe Sehnenflächeninhalt zugewiesen wird, liegen im allgemeinen auf einer isotropen Geraden. Für die Sehnenflächeninhalte der Bahnkurven dreier verschiedener Punkte  $A_1, A_2$  und  $A_3$  der Gangebene  $\Sigma$  gilt der durch (4.3) beschriebene verallgemeinerte Satz von Holditch.*

### 5. Länge von Geradenhüllbahnen

Sei  $g$  eine durch

$$(5.1) \quad \eta = k\xi + d \quad (k, d \text{ konst.} \in \mathbb{R})$$

festgelegte Gerade des Gangsystems  $\Sigma$ . Beim offenen isotropen Zwanglauf  $\mathfrak{Z}(t)$  (1.1) durchläuft  $g$  die durch

$$(5.2) \quad g_0(t) \dots \xi_0(k+c(t)) - \eta_0 = a(t)(k+c(t)) - b(t) - d$$

beschriebene Geradenschar, deren augenblickliche *Hüllpunkte* für  $\dot{c}(t) \neq 0$  durch

$$(5.3) \quad \xi_0 = \alpha_0(t) = a(t) + \frac{\dot{a}(t)(k+c(t)) - \dot{b}(t)}{\dot{c}(t)}$$

gekennzeichnet sind. Als *isotrope Hüllbahnlänge* stellt sich somit beim offenen ebenen isotropen Zwanglauf  $\mathfrak{Z}(t)$  mit  $\dot{c}(t) \neq 0$  ( $\forall t \in [0, 1]$ )

$$(5.4) \quad L_g = \alpha_0(1) - \alpha_0(0) = L_\xi + k \left[ \frac{\dot{a}(1)}{\dot{c}(1)} - \frac{\dot{a}(0)}{\dot{c}(0)} \right]$$

ein, wobei mit

$$(5.5) \quad L_\xi = a(1) + \frac{b(0)}{\dot{c}(0)} + \frac{\dot{a}(1)c(1) - \dot{b}(1)}{\dot{c}(1)}$$

die *isotrope Hüllbahnlänge* der  $\xi$ -Achse ( $d=k=0$ ) bezeichnet wurde. (5.4) ist somit als *duale Steiner-Formel* anzusprechen (vgl. (2.2) bzw. (4.1)).

Die kinematische Bildkurve  $z^*(t)$  (1.3) des isotropen Zwanglaufs  $\mathfrak{Z}(t)$  besitzt *Tangenten mit den Fernpunkten*

$$(5.6) \quad \left( 0; \dot{a}(t); \frac{\dot{c}(t)}{2}; b(t) - \frac{1}{2} [\dot{a}(t)c(t) + a(t)\dot{c}(t)] \right).$$

Sie schließen mit der isotropen Trägerebene  $\pi$  ( $x_2=0$ ) des Zwanglaufs  $\mathfrak{Z}(t)$  gemäß [2, I, S. 123 f.] den *isotropen Winkel*

$$(5.7) \quad \beta(t) = \frac{1}{2} \frac{\dot{c}(t)}{\dot{a}(t)} \quad (\dot{a}(t) \neq 0)$$

ein, womit (5.4) die gut auswertbare Gestalt

$$(5.8) \quad L_g = L_\xi + \frac{k}{2} \left[ \frac{1}{\beta(1)} - \frac{1}{\beta(0)} \right]$$

erhält.

Zur Veranschaulichung der Verteilung der Hüllbahnlängen genügt die Betrachtung eines Strahlbüschels in  $\Sigma$ , das o.B.d.A.  $U$  als Träger besitzen soll. Verschiebt man jede der Geraden  $g$  dieses Büschels um die isotrope Länge  $L_g$  in Richtung  $Y_u$ , so entsteht als Diagrammfläche ein *hyperbolisches Paraboloid des  $I_2^{(2)}$*

$$(5.9) \quad 2x(y-L_g) = z \left[ \frac{1}{\beta(1)} - \frac{1}{\beta(0)} \right],$$

das die absolute Gerade  $f$  des  $I_3^{(2)}$  enthält und im absoluten Punkt  $F$  die Fernebene  $\omega$  berührt. Es handelt sich dabei nach [10] um ein *hyperbolisches Paraboloid 6. Art*.

Seien nun  $g_1, g_2$  und  $g_3$  drei durch

$$(5.10) \quad \eta = k_i \xi \quad (k_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, 3)$$

festgelegte Geraden des Büschels um  $U$ . Nach kurzer Rechnung finden wir

$$(5.11) \quad L_{g_1}(k_2 - k_3) + L_{g_2}(k_3 - k_1) + L_{g_3}(k_1 - k_2) = 0,$$

wobei  $(k_1 - k_2)$ ,  $(k_3 - k_1)$  und  $(k_2 - k_3)$  die *isotropen Winkel* zwischen den Geraden  $g_2 g_1$ ,  $g_1 g_3$  und  $g_3 g_2$  darstellen. Formel (5.11) kann daher als *duale verallgemeinerte Formel von Holditch* (vgl. (2.12) bzw. (4.3)) angesehen werden.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BLASCHKE, W. und MÜLLER, H. R., *Ebene Kinematik*, Oldenbourg, München, 1956. *MR* 17—1245.
- [2] BRAUNER, H., Geometrie des zweifach isotropen Raumes I, II, III, *J. Reine Angew. Math.* **224** (1966), 118—146; **226** (1967), 132—158; **228** (1967), 38—70. *MR* 34 # 1903; 35 # 4831; 36 # 2072.
- [3] MÜLLER, H. R., Über geschlossene Bewegungsvorgänge, *Monatsh. Math.* **55** (1951), 206—214. *MR* 13—382.
- [4] MÜLLER, H. R., Zum Satz von Holditch, *Contribution to geometry* (Proc. Geom. Sympos., Siegen, 1978), ed. by J. Tölke and J. M. Wills, Birkhäuser, Basel, 1979, 330—334. *MR* 81d: 53004.
- [5] POTTMANN, H., Ebene äquiforme Zwangläufe im Großen, *Res. Math.* **9** (1986), 131—159. *Zbl* 589. 53009.
- [6] RÖSCHEL, O., Zur Kinematik der isotropen Ebene, *J. Geometry* **21** (1983), 146—156. *Zbl* 535. 53009.
- [7] RÖSCHEL, O., Zur Kinematik der isotropen Ebene II, *J. Geometry* **24** (1985), 112—122. *Zbl* 566. 53019.
- [8] RÖSCHEL, O., Der Satz von Holditch in der isotropen Ebene, *Abh. Braunschw. Wiss. Ges.* **36** (1984), 27—32. *Zbl* 563. 53011.
- [9] RÖSCHEL, O., Zur Kinematik der isotropen Ebene. Isotrope Koppelgetriebe höherer Stufe, *Ber. Math.-Stat. Sect. Forschungszent. Graz* **220** (1984), 1—13. *Zbl* 545. 53010.
- [10] SACHS, H., *Lehrbuch der isotropen Geometrie*, Vieweg, Wiesbaden, 1986.
- [11] STEINER, J., *Gesammelte Werke*, Bd. II, Berlin, 1882/83.
- [12] STRUBECKER, K., Geometrie in einer isotropen Ebene, *Math. Naturwiss. Unterricht* **15** (1962/63), 297—306, 343—351, 385—394. *MR* 26 # 5465a, 5465b; 27 # 631.
- [13] STRUBECKER, K., Casi limiti di geometrie non-euclidee, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **21** (1963), 141—212. *Zbl* 109. 390.



- [14] STRUBECKER, K., Geometrie und Kinematik des elliptischen, quasilloptischen und isotropen Raumes, *Geometrie, Wege der Forschung* 177 (1972), 156—226, Darmstadt, Wiss. Buchgesellschaft. Zbl 244. 50001.
- [15] TÖLKE, J., Eine kennzeichnende Eigenschaft der isotropen Bewegungen, *Anz. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl.* 1978, No. 7, 165—168. MR 80h: 53010a.
- [16] TÖLKE, J., Steiner-Formeln für die Bahnflächen geschlossener Äquiaffinbewegungen, *Österr. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II*, 187 (1978), 325—337. MR 80k: 53014.
- [17] TÖLKE, J., Isotrope Kegelschnittsbewegungen, *J. Geom.* 13 (1979), 31—48. MR 80i: 51028.
- [18] TÖLKE, J., Zu den affinen Zwangsläufen, bei denen sich die Punkte eines Kegelschnitts auf Geraden bewegen, *Studia Sci. Math. Hungar.* 15 (1980), 151—156. MR 84g: 53017.

(Eingegangen am 25. Juni 1984)

INSTITUT FÜR GEOMETRIE  
TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN  
GUBHAUSSTRASSE 27—29  
A—1040 WIEN

INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND ANGEWANDTE GEOMETRIE  
MONTANUNIVERSITÄT LEOBEN  
FRANZ-JOSEF-STRASSE 18  
A—8700 LEOBEN  
AUSTRIA



# ÜBER DIE ENGE VON ZYLINDERPACKUNGEN UND DIE LOCKERHEIT VON ZYLINDERÜBERDECKUNGEN IM $n$ -DIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM

JENŐ HORVÁTH

*Herrn Prof. Dr. L. Fejes Tóth zum 70. Geburtstag gewidmet*

## 1. Einführung

1.1. Es sei  $E^d$  ein  $d$ -dimensionaler Unterraum im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum  $E^n$  ( $0 \leq d \leq n-1$ ) und  $r > 0$  sei eine gegebene reelle Zahl. Wir nennen die Menge der Punkte in  $E^n$ , deren Abstand von  $E^d$  kleiner als  $r$  ist, einen offenen Zylinder mit der Achse  $E^d$  und vom Radius  $r$ . Dieser Zylinder wird mit  $Z^n(E^d, r)$  bezeichnet. Wenn der Abstand der Punkte von  $E^d$  auch gleich  $r$  sein kann, dann sprechen wir von einem abgeschlossenen Zylinder  $\bar{Z}^n(E^d, r)$ . Es sei  $E^{n-d}$  auf  $E^d$  total senkrecht (mit der Bezeichnung  $E^{n-d} \perp E^d$ ).  $E^{n-d} \cap E^d$  wird mit  $O$  bezeichnet.  $Z^n(E^d, r) \cap E^{n-d} = K^{n-d}(O, r)$  bzw.  $\bar{Z}^n(E^d, r) \cap E^{n-d} = \bar{K}^{n-d}(O, r)$  ist eine offene bzw. abgeschlossene  $(n-d)$ -dimensionale Kugel vom Radius  $r$  und mit dem Mittelpunkt  $O$ .  $K^{n-d}(O, r)$  bzw.  $\bar{K}^{n-d}(O, r)$  werden die Grundkugeln des Zylinders genannt.

1.2. Die Menge der offenen Zylinder  $\{Z^n(E_i^d, r)\}$  bildet eine Packung im  $E^n$ , wenn  $Z^n(E_i^d, r) \cap Z^n(E_j^d, r) = \emptyset$  für zwei beliebige Zylinder  $Z^n(E_i^d, r) \neq Z^n(E_j^d, r) \in \{Z^n(E_i^d, r)\}$  gilt. Wir nennen das Supremum der Radien der  $n$ -dimensionalen Kugeln, die wir in den nicht überdeckten Raumteilen lagern können, die Enge der gegebenen Zylinderpackung  $\{Z^n(E_i^d, r)\}$ . Die Grundaufgabe besteht darin, das Infimum der Enge von Zylinderpackungen für gegebene Werte  $n > d \geq 0$ ,  $r > 0$  und die diesem Infimum entsprechenden Packungen zu bestimmen. Die Zylinderpackungen, bei denen dieses Infimum auftritt, werden enge Zylinderpackungen genannt. Im Fall  $d=0$  sprechen wir von Kugelpackungen und ihrer Enge (s. L. Fejes Tóth [3]).

1.3. Die Menge der abgeschlossenen Zylinder  $\{\bar{Z}^n(E_i^d, R)\}$  bildet eine Überdeckung im  $E^n$ , wenn es für jedes  $P \in E^n$  ein  $i$  gibt, sodaß  $P \in \bar{Z}^n(E_i^d, R)$ . Das Supremum der Radien der  $n$ -dimensionalen Kugeln, die wir in den mindestens 2-fach überdeckten Raumteilen lagern können, wird die Lockerheit der gegebenen Zylinderüberdeckung genannt. Die Grundaufgabe besteht hier darin, das Infimum der Lockerheit von Zylinderüberdeckungen für gegebene Werte  $n > d \geq 0$ ,  $R > 0$  und die diesem Infimum entsprechenden Zylinderüberdeckungen zu bestimmen. Die Überdeckungen, wo das Infimum auftritt, werden lockere Zylinderüberdeckungen genannt. Im Fall  $d=0$  sprechen wir von Kugelüberdeckungen und ihrer Lockerheit (s. L. Fejes Tóth [3]).

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A45; Secondary 51M05.

*Key words and phrases*. Packing of cylinders, covering of cylinders, close packing, loose covering.

**1.4.** Der Begriff der Enge von Packungen und der Begriff der Lockerheit von Überdeckungen stammen von L. Fejes Tóth [3]. Die Ergebnisse für einfache Packungen und Überdeckungen kann man in [1]–[8] finden. S. S. Ryškov [9, 10] hat sich mit einer analogen Aufgabe, nämlich mit der Dichte von Punktsystemen beschäftigt.

In dieser Arbeit geben wir untere Schranken für die Enge von Zylinderpackungen und für die Lockerheit von Zylinderüberdeckungen an, die in den Fällen  $d=n-1$  und  $d=n-2$  genau sind.

## 2. Sätze und ihre Beweise

**2.1.** Zuerst beschreiben wir einige spezielle Zylinderpackungen bzw. Zylinderüberdeckungen. Über diese Anordnungen beweisen wir später, daß sie enge Zylinderpackungen bzw. lockere Zylinderüberdeckungen bilden.

**2.1.1.** Der Fall  $n \geq 2$  und  $d=n-1$ . Es bezeichne  $\{\bar{E}_i^{n-1}\}$  eine Menge von parallelen Hyperebenen, in der der Abstand von zwei beliebigen benachbarten Hyperebenen gleich  $2r$  ist, wo  $r>0$  eine gegebene reelle Zahl ist. Es gilt offenbar, daß die offenen Zylinder  $\{Z^n(\bar{E}_i^{n-1}, r)\}$  bzw. die abgeschlossenen Zylinder  $\{\bar{Z}^n(\bar{E}_i^{n-1}, r)\}$  eine Packung bzw. eine Überdeckung bilden, deren Enge bzw. Lockerheit gleich 0 ist.

**2.1.2.** Der Fall  $n \geq 2$  und  $d=n-2$ . Gegeben ist ein reguläres Dreiecksgitter in  $E^2$ , wo die Länge des kürzesten Gittervektors  $2r$  ist. Es bezeichne  $\{\bar{E}_i^{n-2}\}$  die Menge der Unterräume in  $E^n$ , die in den Gitterpunkten auf  $E^2$  total senkrecht ( $E^2 \perp_i \bar{E}_i^{n-2}$ ) sind. Es ist klar, daß die Zylinder  $\{Z^n(\bar{E}_i^{n-2}, r)\}$  eine Packung und die Zylinder  $\left\{\bar{Z}^n\left(\bar{E}_i^{n-2}, \frac{2}{\sqrt{3}}r\right)\right\}$  eine Überdeckung bilden, deren Enge bzw. Lockerheit  $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)r$  beträgt.

### 2.2. Sätze.

**SATZ 1.** Es seien  $n \geq 2$  und  $0 \leq d \leq n-1$ . Bildet die Menge von Zylindern  $\{Z^n(E_i^d, r)\}$  eine Packung im  $E^n$ , dann ist die Enge dieser Zylinderpackung mindestens

$$(1) \quad \left(\sqrt{\frac{2(n-d)}{n-d+1}} - 1\right)r.$$

Die Enge (1) tritt nur in den Fällen  $d=n-1$  und  $d=n-2$  für die Zylinderpackungen 2.1.1 und 2.1.2 auf.

**SATZ 2.** Es seien  $n \geq 2$  und  $0 \leq d \leq n-1$ . Bildet die Menge von Zylindern  $\{\bar{Z}^n(E_i^d, R)\}$  eine Überdeckung im  $E^n$ , dann ist die Lockerheit dieser Zylinderüberdeckung mindestens

$$(2) \quad \left(1 - \sqrt{\frac{n-d+1}{2(n-d)}}\right)R.$$

Die Lockerheit (2) tritt nur in den Fällen  $d=n-1$  und  $d=n-2$  für die Zylinderüberdeckungen 2.1.1 ( $R=r$ ) bzw. 2.1.2  $\left(R=\frac{2}{\sqrt{3}}r\right)$  auf.

**SATZ 3.** Es seien  $n \geq 2$  und  $1 \leq d \leq n-1$ . Existiert eine  $(n-d)$ -dimensionale Kugelpackung vom Radius  $r$  im  $E^{n-d}$ , deren Enge  $\varrho$  ist, dann gibt es eine Zylinderpackung  $\{Z^n(E_i^d, r)\}$  mit der Enge  $\varrho$ .

**SATZ 4.** Es seien  $n \geq 2$  und  $1 \leq d \leq n-1$ . Wenn eine  $(n-d)$ -dimensionale Kugelüberdeckung vom Radius  $R$  im  $E^{n-d}$  existiert, deren Lockerheit  $\bar{\varrho}$  ist, dann gibt es eine Zylinderüberdeckung  $\{\bar{Z}^n(E_i^d, R)\}$  mit der Lockerheit  $\bar{\varrho}$ .

Die Sätze 5 und 6 sind Folgerungen der Sätze 3 und 4.

**SATZ 5.** Es seien  $n \geq 2$  und  $1 \leq d \leq n-1$ . Existiert eine enge  $(n-d)$ -dimensionale Kugelpackung vom Radius  $r$  im  $E^{n-d}$  mit der Enge  $\varrho$ , dann ist das Infimum der Engen der Zylinderpackungen  $\{Z^n(E_i^d, r)\}$  höchstens  $\varrho$ .

**SATZ 6.** Es seien  $n \geq 2$  und  $1 \leq d \leq n-1$ . Existiert eine lockere  $(n-d)$ -dimensionale Kugelüberdeckung vom Radius  $R$ , mit Lockerheit  $\bar{\varrho}$ , dann ist das Infimum der Lockerheiten der Zylinderüberdeckungen  $\{\bar{Z}^n(E_i^d, R)\}$  höchstens  $\bar{\varrho}$ .

### 2.3. Beweise der Sätze.

**BEWEIS DES SATZES 1.** Da die Zylinder  $\{Z^n(E_i^d, r)\}$  eine Packung bilden, ist der Abstand der Achsen von zwei beliebigen Zylindern mindestens  $2r$ . Betrachten wir eine  $n$ -dimensionale Kugel im  $E^n$ , die keinen gemeinsamen Punkt mit den Achsen  $\{E_i^d\}$  der Zylinder  $\{Z^n(E_i^d, r)\}$  hat. Die Existenz dieser Kugel folgt aus  $r > 0$ . Vergrößern wir die Kugel bis zu der Lage, wo die Kugel mindestens eine der Achsen der Zylinder berührt. Bezeichne  $E_1^d$  diesen Unterraum. Dann vergrößern wir die Kugel unter Beibehaltung der Berührung mit  $E_1^d$  weiter bis zu der Lage, in der die Kugel noch eine weitere Achse  $E_2^d \in \{E_i^d\}$  berührt. Wir setzen dieses Verfahren unter Beibehaltung der vorigen Berührungen fort. Schließlich sind die folgenden Fälle möglich:

1. Der Radius der Kugel ist groß, z.B. mindestens  $2r$ . Der Satz 1 gilt offenbar in diesem Fall.  $\left( \left( \sqrt{\frac{2(n-d)}{n-d+1}} - 1 \right) r < r. \right)$

2. Der Radius der berührenden Kugel ist beschränkt und diese Kugel berührt unendlich viele Unterräume  $E_i^d$ . Das ist nicht möglich, weil der Abstand von zwei beliebigen Unterräumen mindestens  $2r$  ist.

3. Endlich kann der Fall vorkommen, daß die Kugel endlich viele Unterräume berührt und wir den Radius dieser Kugel weiter nicht vergrößern können.

Dieser letzte Fall ist also für uns interessant.

$K$  sei die Kugel in der Endlage,  $O$  bzw.  $R$  sei ihr Mittelpunkt bzw. Radius. Mit  $E_1^d, E_2^d, \dots, E_s^d$  bezeichnen wir die berührenden Unterräume, und die Berührungspunkte seien  $P_1, P_2, \dots, P_s$ .

Wenn  $K$  die Unterräume  $E_1^d, E_2^d, \dots, E_s^d$  berührt, dann berührt die Kugel vom Radius  $R-r$ , die mit  $K$  konzentrisch ist, die Zylinder  $Z^n(E_1^d, r), Z^n(E_2^d, r), \dots, Z^n(E_s^d, r)$ , und umgekehrt, wenn eine Kugel vom Radius  $r_1$  bestimmte Zylinder berührt, dann berührt die Kugel vom Radius  $r_1+r$ , die mit unserer Kugel konzentrisch ist, die Achsen der Zylinder.

Sei  $E^v$  ( $v \leq s-1$ ) der Unterraum kleinster Dimension, der die Punkte

$P_1, P_2, \dots, P_s$  enthält. Die von den Punkten  $P_1, P_2, \dots, P_s$  bestimmte  $v$ -dimensionale Kugel sei  $K_1$ . Mit  $O_1$  bzw.  $R_1$  bezeichnen wir den Mittelpunkt bzw. den Radius von  $K_1$ . Der Abstand zweier Achsen aus  $\{E_i^d\}$  ist mindestens  $2r$ , deshalb gilt

$$(3) \quad P_j P_k \geq 2r \quad (j \neq k, j, k \in \{1, 2, \dots, s\}).$$

Aus  $K_1 \subseteq K$  folgt, daß

$$(4) \quad R_1 \leq R$$

gilt und die Gleichheit nur im Fall  $O = O_1$  auftritt.

a) Es sei  $v < n - d$ . Wir zeigen, daß dieser Fall nicht vorkommt, weil wir die Kugel  $K$  unter Beibehaltung der Berührungen noch weiter vergrößern können.

a1) Nehmen wir an, daß  $O \neq O_1$  ist. Es ist offenbar, daß  $OO_1 \perp E^v$  und  $OP_j \perp E_j^d$  ( $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ ) gelten. Betrachten wir die Hyperebene  $E_j^{n-1}$ , die die Kugel  $K$  im Punkt  $P_j$  berührt. Aus  $OP_j \perp E_j^{n-1}$  folgen  $E_j^d \subset E_j^{n-1}$  und  $\angle(P_j O_1 O) = 90^\circ$ .  $O_2$  sei ein Punkt der Geraden  $O_1 O$  in der Nähe von  $O$ , für den die Anordnung  $O_1 O O_2$  besteht. Dann gilt  $\angle(P_j O O_2) > 90^\circ$  und daraus folgt, daß der Abstand von  $O_2$  und  $E_j^{n-1}$  größer als  $R$  ist. Deshalb ist auch der Abstand von  $O_2$  und  $E_j^d$  größer als  $R$  für alle  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ , folglich kann man die Kugel  $K$  vergrößern.

a2) Es sei  $O = O_1$ , d.h.,  $O \in E^v$ . Es seien  $E^{n-v} \perp E^v$ ,  $O \in E^{n-v}$ ,  $O \in \bar{E}_j^d \parallel E_j^d$  ( $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ ), weiterhin  $T = E^{n-v} \setminus (\bigcup_{j=1}^s \bar{E}_j^d \cap E^{n-v})$ . Aus  $n - v > d$  folgt  $T \neq \emptyset$ .

Es liege  $\bar{O} \in T$  in der Nähe von  $O$ . Wir zeigen, daß der Abstand zwischen  $\bar{O}$  und  $E_j^d$  größer als  $R$  ( $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ ) ist. Daraus folgt, daß man die Kugel  $K$  vergrößern kann.

$Q_j$  sei der Punkt, für den  $Q_j \in E_j^d$  und  $\bar{O} Q_j \perp E_j^d$  gelten. So ergibt sich

$$O\bar{O} \perp OP_j \perp P_j Q_j \quad (j \in \{1, 2, \dots, s\}).$$

Andererseits gilt  $O\bar{O} \not\perp P_j Q_j$  wegen  $\bar{O} \notin \bar{E}_j^d$ . Deshalb ist  $OP_j$  die Normaltransversale der Geraden  $O\bar{O}$  und  $P_j Q_j$ , folglich gilt

$$O\bar{O} Q_j > R$$

für alle  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ .

b) Es sei  $v \geq n - d$ . Ist jede Kantenlänge eines  $v$ -dimensionalen Simplexes mindestens  $2r$ , dann ist bekanntlich der Umkugelradius  $\cong \sqrt{\frac{2v}{v+1}} r$  und Gleichheit tritt für das reguläre Simplex mit Kantenlänge  $2r$  ein. Daraus folgt

$$(5) \quad R_1 \cong \sqrt{\frac{2v}{v+1}} r.$$

Aus (3), (4), (5) und  $v \geq n - d$  ergibt sich

$$(6) \quad R \cong \sqrt{\frac{2(n-d)}{n-d+1}} r.$$



Die Gleichheit tritt nur im Fall auf, wenn  $O=O_1$ ,  $v=n-d$ ,  $s=n-d+1$  sind und das Simplex  $P_1 P_2 \dots P_s$  ein  $(n-d)$ -dimensionales reguläres Simplex mit Kantenlänge  $2r$  ist.

Wir beweisen noch, daß  $E_j^d \perp E^{n-d}$  ( $j \in \{1, 2, \dots, n-d+1\}$ ) im Fall der Gleichheit notwendig gilt. Weil  $E_j^d$  die Kugel  $K$  berührt, gilt  $OP_j \perp E_j^d$ . Nehmen wir indirekt an, daß es mindestens einen Unterraum unter  $E_1^d, E_2^d, \dots, E_{n-d+1}^d$ , z.B.  $E_1^d$  gilt, für den  $E_1^d \not\perp E^{n-d}$  gilt. Es sei  $O \in \bar{E}^d$  und  $\bar{E}^d \perp E^{n-d}$ . Es gibt eine Gerade  $g$ , die nicht parallel zu  $E_1^d$  ist und für die  $O \in g$ ,  $g \subset \bar{E}^d$  gelten.  $\bar{O} \in g$  liege in der Nähe von  $O$ . Wie im Punkt a) kann man zeigen, daß der Abstand von  $\bar{O}$  und  $E_1^d$  größer als  $R$  ist. Deshalb gibt es eine Kugel  $\bar{K}$  mit dem Mittelpunkt  $\bar{O}$ , deren Radius mindestens  $R$  ist und die höchstens  $n-d$  Unterräume berührt. Folglich kann man die Kugel  $K$  auf Grund von a) vergrößern.

Aus (6) folgt, daß die mit  $K$  konzentrische Kugel vom Radius  $\varrho = \left( \sqrt{\frac{2(n-d)}{n-d+1}} - 1 \right) r$  die Zylinder  $Z^n(E_j^d, r)$  ( $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ ) nicht schneidet.

Diese Kugel berührt diese Zylinder nur im Fall, daß  $v=n-d$ ,  $s=n-d+1$ ,  $E_j^d \parallel E_k^d \perp \perp E^{n-d}$  ( $j \neq k$ ,  $j, k \in \{1, 2, \dots, n-d+1\}$ ) gelten und das durch die Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_{n-d+1}$  bestimmte Simplex regulär ist. Aus den vorigen folgt auch, daß jede Kugel vom Radius  $\varrho$ , die auf die oben erwähnten Weise ausgewählt wurde und deren Radius nicht vergrößbar ist,  $(n-d+1)$  Zylinder nur dann berühren kann, wenn es eine Zerlegung von  $E^{n-d}$  in regulären Simplexe gibt. Es ist bekannt, daß eine solche Zerlegung nur in den Fällen  $n-d=1$  und  $n-d=2$  existiert. Folglich ist der Radius der Kugel, die wir in den nicht überdeckten Teilen bei der Zylinderpackung  $\{Z^n(E_i^d, r)\}$  lagern können, mindestens (1), d.h. die Enge der Zylinderpackung  $\{Z^n(E_i^d, r)\}$  ist mindestens (1) und sie ist genau (1) nur in den Fällen  $d=n-1$  und  $d=n-2$  für die Zylinderpackungen  $\{Z^n(\bar{E}_i^{n-1}, r)\}$  (in 2.1.1) und  $\{Z^n(\bar{E}_i^{n-2}, r)\}$  (s. in 2.1.2).

**BEWEIS DES SATZES 2.** Haben zwei Zylinderachsen einen gemeinsamen Punkt, dann enthalten beide Zylinder die um diesen Punkt geschlagene Kugel vom Radius  $R$ , d.h., diese Kugel liegt in einem 2-fach überdeckten Raumteil. Die Behauptung des Satzes gilt offenbar (s. (2)).

Nehmen wir also an, daß  $E_i^d \cap E_j^d = \emptyset$  für zwei beliebige  $E_i^d, E_j^d \in \{E_i^d\}$  gilt. Es sei  $2r$  ( $r \geq 0$ ) das Infimum der Abstände der Zylinderachsen. Betrachten wir die Zylinderpackung  $\{Z^n(E_i^d, r)\}$ . Aus dem Satz 1 folgt, daß es eine Kugel gibt, deren Radius mindestens  $\sqrt{\frac{2(n-d)}{n-d+1}} r$  ist und die die Achsen der Zylinder nicht schneidet. Daraus folgt die Ungleichung

$$(7) \quad R \geq \sqrt{\frac{2(n-d)}{n-d+1}} r,$$

wo die Gleichheit nur in den Fällen 2.1.1 und 2.1.2 auftritt.

Wenn es zwei Unterräume  $E_i^d, E_j^d \in \{E_i^d\}$  gibt, deren Abstand genau  $2r$  ist, dann liegt die  $n$ -dimensionale Kugel vom Radius  $R-r$ , die um den Punkt  $P \in Z^n(E_i^d, r) \cap Z^n(E_j^d, R)$  geschlagen ist, in einem 2-fach überdeckten Raumteil. Das bedeutet, daß (2) gilt und die Gleichheit nur für die Überdeckungen  $\{Z^n(\bar{E}_i^{n-1}, R)\}$  (s. in 2.1.1) und  $\{Z^n(\bar{E}_i^{n-2}, R)\}$  (s. in 2.1.2) auftritt.

Wenn  $2r$  unter den Abständen der Zylinderachsen nicht vorkommt, dann existieren Achsen  $E_i^d, E_j^d \in \{E_i^d\}$ , deren Abstand  $2r + 2\varepsilon$  ist, wo  $\varepsilon > 0$  eine beliebige kleine reelle Zahl ist. In diesem Fall kann die Gleichheit in (7) nicht auftreten. Es sei (aus (7))

$$\varepsilon < \sqrt{\frac{n-d+1}{2(n-d)}} R - r.$$

Es ist leicht einzusehen, daß man in dem durch die Zylinder  $\bar{Z}^n(E_i^d, R)$  und  $\bar{Z}^n(E_j^d, R)$  2-fach überdeckten Raumteil eine Kugel lagern kann, deren Radius größer als  $\left(1 - \sqrt{\frac{n-d+1}{2(n-d)}}\right) R$  ist.

BEWEIS DES SATZES 3. Es sei  $\{K^{n-d}(O_i, r)\}$  die Kugelpackung im  $E^{n-d}$ , deren Enge  $\varrho$  ist, wo  $\{O_i\}$  die Menge der Kugelmittelpunkte ist. Es seien  $E_i^d \perp E^{n-d}$  und  $O_i \in E_i^d$ . Betrachten wir die Zylinderpackung  $\{Z^n(E_i^d, r)\}$ . Es ist leicht einzusehen, daß die Enge dieser Zylinderpackung  $\varrho$  ist.

Der BEWEIS DES SATZES 4 geht genau so wie der Beweis des Satzes 3.

## 2.4. Vermutungen.

**2.4.1.** Das Infimum der Engen der Zylinderpackungen  $\{Z^n(E_i^d, r)\}$  bzw. der Lockerheit der Zylinderüberdeckungen  $\{\bar{Z}^n(E_i^d, r)\}$  ist genau  $\varrho$  bzw.  $\bar{\varrho}$  im Satz 5 bzw. 6.

**2.4.2.** Es seien  $n > 3$  und  $d = n - 3$ . Es sei ein raumzentriertes Würfelgitter mit dem kürzesten Gittervektor  $2r$  im  $E^3$  gegeben. Nehmen wir die Menge der  $(n-3)$ -dimensionalen Unterräume  $\{\bar{E}_i^{n-3}\}$ , die in den Gitterpunkten auf  $E^3$  total senkrecht sind. Betrachten wir die Zylinderpackung  $\{Z^n(\bar{E}_i^{n-3}, r)\}$  bzw. die Zylinderüberdeckung  $\left\{\bar{Z}^n\left(E_i^{n-3}, \sqrt{\frac{5}{3}}r\right)\right\}$  im  $E^n$ . Die Vermutung ist, daß im Fall  $d = n - 3$  die enge Zylinderpackung vom Radius  $r$  die Packung  $\{Z^n(\bar{E}_i^{n-3}, r)\}$  und die lockere Zylinderüberdeckung vom Radius  $\sqrt{\frac{5}{3}}r$  die Überdeckung  $\left\{\bar{Z}^n\left(\bar{E}_i^{n-3}, \sqrt{\frac{5}{3}}r\right)\right\}$  ist.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BEZDEK, A., Remark on the closest packing of convex discs, *Studia Sci. Math. Hungar.* **15** (1980), 283—285. MR **84c**: 52018.
- [2] BÖRÖCZKY, K., Closest packing and loosest covering of the space with balls, *Studia Sci. Math. Hungar.* **21** (1986), 81—91.
- [3] FEJES TÓTH, L., Close packing and loose covering with balls. *Publ. Math. Debrecen* **23** (1976), 323—326. MR **55** # 1224.
- [4] FEJES TÓTH, L., Remarks on the closest packing of convex discs, *Comment. Math. Helv.* **53** (1978), 536—541. MR **58** # 24019.
- [5] HORVÁTH, J., Close lattice packing of balls in lattices of the first type, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **20** (1977), 191—194 (in Russian). MR **58** # 5534.
- [6] HORVÁTH, J., Narrow latticed packing of unit balls in the space  $E^n$ , Geometry of positive quadratic forms, *Trudy Math. Inst. Steklov* **152** (1980), 216—231 (in Russian). MR **83a**: 10058; English transl. in *Proc. Steklov Inst. Math.* **152** (1982), 237—254.

- [7] HORVÁTH, J., Über die Enge der Kugelpackung, die Lockerheit der Kugelüberdeckung und die  $k$ -Enge der Punktmenge, *Studia Sci. Math. Hungar.* (Russisch). (Im Druck.)
- [8] LINHART, J., Closest packings and closest coverings by translates of a convex disc, *Studia Sci. Math. Hungar.* **13** (1978), 157—162. *MR* **83d**: 52015.
- [9] RYŠKOV, S. S., The polyhedron  $\mu(m)$  and certain extremal problems of the geometry of numbers, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **194** (1970), 514—517 (in Russian). *MR* **43** # 2613. English transl. in *Soviet Math. Dokl.* **11** (1970), 1240—1244.
- [10] RYŠKOV, S. S., Density of an  $(r, R)$ -system, *Mat. Zametki* **16** (1974), 447—454 (in Russian). *MR* **53** # 282. English translation in *Math. Notes* **16** (1976).

(Eingegangen am 25. Juni 1984)

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
 TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR  
 MATEMATIKAI SZAKMÓDSZERTANI CSOPORT  
 RÁKÓCZI ÚT 5.  
 H—1088 BUDAPEST  
 HUNGARY



## ZUM PROBLEM DER ZERLEGBARKEIT VON SIMPLEXEN IN ORTHOSHEME

H. KAISER

*Herrn Professor L. Fejes Tóth zum 70. Geburtstag gewidmet*

### 1. Einleitung

In der Zerlegungstheorie der Polyeder in  $n$ -dimensionalen Räumen konstanter Krümmung spielen Polyederbaukästen eine wichtige Rolle.

Die Menge der Simplexe ist ein Polyederbaukasten, das heißt, in einem  $n$ -dimensionalen Raum konstanter Krümmung läßt sich jedes Polyeder als elementargeometrische Summe endlich vieler Simplexe darstellen (vgl. [1], S. 36). Für die allgemeine Zerlegungstheorie — aber auch für die Inhaltstheorie der nichteuklidischen Polyeder — ist es von Interesse, Polyederbaukästen mit noch einfacheren Bausteinen zu finden. H. Hadwiger äußerte die Vermutung, daß sich jedes Simplex elementargeometrisch in endlich viele spezielle Simplexe, sogenannte Orthoscheme, zerlegen läßt (vgl. [5], S. 9). Bisher ist diese Vermutung für euklidische und nicht-euklidische Simplexe mit einer Dimensionszahl  $n \leq 4$  bestätigt worden (vgl. [2] und [3]).

Die vorliegende Arbeit geht von einer Einteilung der  $n$ -dimensionalen Simplexe in Typen aus, unter denen die Menge der Orthoscheme als ein spezieller Typ vorkommt. Für mehrere Typen werden Konstruktionsverfahren angegeben, die zur Zerlegung der Simplexe in Orthoscheme führen. Dadurch kann das Hadwigersche Problem für  $n$ -dimensionale euklidische und nichteuklidische Simplexe auf ein spezielleres Zerlegungsproblem zurückgeführt werden.

Die bisher bekannten Ergebnisse für Simplexe der Dimensionszahlen  $n=2, 3$  und 4 ergeben sich als Spezialfälle.

### 2. Die $(k|l)$ -Orthogonalität von Simplexen

Für ein  $n$ -dimensionales Simplex  $S$  mit den Eckpunkten  $1, 2, \dots$  und  $n+1$  wird  $S=(1, 2, \dots, n+1)$  geschrieben. Der *Trägerraum* von  $S$  wird mit  $\varrho(S)$  bezeichnet. Jedes Simplex  $A=(a_1, a_2, \dots, a_{r+1})$  mit  $\{a_1, a_2, \dots, a_{r+1}\} \subseteq \{1, 2, \dots, n+1\}$  und  $0 \leq r \leq n$  heißt  $r$ -dimensionales *Untersimplex* oder  $r$ -dimensionale Seite von  $S$ . Die eindimensionalen Seiten werden auch Kanten genannt.  $S'$  ist diejenige  $(n-1)$ -dimensionale Seite von  $S$ , die dessen Eckpunkt  $t$  nicht enthält. Das Zeichen  $\mathfrak{S}^n$  steht für die Menge aller euklidischen, hyperbolischen und elliptischen Simplexe der Dimension  $n$ .

Unter einem *Kantenzug* eines Simplexes  $S$  aus  $\mathfrak{S}^n$  ( $n \geq 1$ ) soll ein orientierter Polygonzug aus  $n$  Kanten von  $S$ , der alle Eckpunkte von  $S$  enthält, verstanden

---

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A25; Secondary 52A20.

*Key words and phrases*. Decomposition theory, basis set of simplices, orthogonal simplex.

werden.  $[1, 2, \dots, n+1]$  ist die Bezeichnung für den aus den Kanten  $(1, 2), (2, 3) \dots$  und  $(n, n+1)$  des Simplexes  $S=(1, 2, \dots, n+1)$  bestehenden Kantenzug mit dem Anfangspunkt 1.

Grundlegende Bedeutung für das weitere besitzt die

DEFINITION 1. Ein Kantenzug  $[1, 2, \dots, n+1]$  eines Simplexes aus  $\mathfrak{S}^n$  heißt *k-orthogonal* ( $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ) genau dann, wenn für alle natürlichen Zahlen  $i$  und  $j$  mit  $1 \leq i < j \leq n$  und  $i \leq k$  die Simplexkanten  $(i, i+1)$  und  $(j, j+1)$  senkrecht zueinander sind  $((i, i+1) \perp (j, j+1))$ .

Eine Verallgemeinerung der Definition 1 ist die

DEFINITION 2. Ein *k-orthogonaler* Kantenzug  $K=[1, 2, \dots, n+1]$  eines Simplexes aus  $\mathfrak{S}^n$  heißt *(k|l)-orthogonal* genau dann, wenn der entgegengesetzt orientierte Kantenzug  $-K=[n+1, n, \dots, 1]$  für eine nichtnegative ganze Zahl  $l$  mit  $k+l \leq n-1$  *l-orthogonal* ist. Gilt  $k+l=n-1$ , so wird der Kantenzug  $K$  auch *total-orthogonal* genannt.

FOLGERUNG 1. (i) Ein *(k|l)-orthogonaler* Kantenzug ist auch *(k'|l')-orthogonal* für  $k' \in \{0, 1, \dots, k\}$  und  $l' \in \{0, 1, \dots, l\}$ .

(ii) Sämtliche Kanten eines *total-orthogonalen* Kantenzuges sind paarweise senkrecht zueinander.

DEFINITION 3. Ein Simplex aus  $\mathfrak{S}^n$  heißt *(k|l)-orthogonal* genau dann, wenn es einen *(k|l)-orthogonalen* Kantenzug besitzt. Die *(k|l)-orthogonalen* Simplexe aus  $\mathfrak{S}^n$  werden zum Typ  $\mathfrak{S}_{k|l}^n$  zusammengefaßt. Für  $\mathfrak{S}_{k|0}^n$  wird auch  $\mathfrak{S}_k^n$  geschrieben, und die Simplexe aus dieser Menge heißen *k-orthogonal*.

FOLGERUNG 2.

- (i)  $\mathfrak{S}_{k|l}^n = \mathfrak{S}_{l|k}^n$ .
- (ii)  $\mathfrak{S}_{k|l}^n \supset \mathfrak{S}_{k'|l'}^n$  für  $k \leq k', l \leq l'$  und  $k+l < k'+l'$ .
- (iii)  $\mathfrak{S}_{k|l}^n = \mathfrak{S}_{n-1}^n$  für  $k+l = n-1$ .

Simplexe, die einen *total-orthogonalen* Kantenzug enthalten, werden nach Schläfli ([7]) als *Orthoscheme* bezeichnet (vgl. auch [1], S. 71 ff). Die Menge der *Orthoscheme* aus  $\mathfrak{S}^n$  ( $n \geq 1$ ) ist demnach identisch mit dem Simplextyp  $\mathfrak{S}_{n-1}^n$ .

Die Existenz *(k|l)-orthogonaler* Simplexe aus  $\mathfrak{S}^n$  für  $k, l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  und  $k+l \leq n-1$  ergibt sich aus dem konstruktiven Charakter der Definition 1.

Ist ein Kantenzug  $K$  eines Simplexes aus  $\mathfrak{S}^n$  *(k|l)-orthogonal*, dann sind die ersten  $k$  und die letzten  $l$  Kanten von  $K$  senkrecht zu allen Kanten von  $K$ . Die übrigen  $n-k-l$  Kanten müssen nicht paarweise senkrecht zueinander sein. Da das von ihnen aufgespannte Untersimplex im weiteren eine besondere Rolle spielt, wird es ausgezeichnet durch die

DEFINITION 4. Ist  $K=[1, 2, \dots, n+1]$  ein *(k|l)-orthogonaler* Kantenzug eines Simplexes  $S$  aus  $\mathfrak{S}_{k|l}^n$  ( $n \geq 2$ ;  $k+l \leq n-2$ ), dann wird das  $(n-l-k)$ -dimensionale Untersimplex  $(k+1, k+2, \dots, n-l+1)$  als *Kern* von  $S$  bezüglich des Kantenzuges  $K$  und dessen *(k|l)-Orthogonalität* bezeichnet und mit dem Symbol  $v(S, K, (k|l))$  versehen.



Unmittelbar aus den bisherigen Definitionen ergibt sich die

**FOLGERUNG 3.** *Es sei  $K = [1, 2, \dots, n+1]$  ein  $(k|l)$ -orthogonaler Kantenzug eines Simplexes  $S$  aus  $\mathfrak{S}_{k|l}^n$  ( $n \geq 2$ ;  $k+l \leq n-2$ ). Wenn der Kantenzug  $[k+1, k+2, \dots, n-l+1]$  des Kerns  $v(S, K, (k|l))$   $(k'|l')$ -orthogonal ist, dann ist  $K$  und somit auch  $S$   $(k+k'|l+l')$ -orthogonal.*

### 3. Teilprobleme des Hadwigerschen Problems

Läßt sich für zwei Teilmengen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{S}^n$  jedes Element von  $\mathfrak{A}$  elementargeometrisch in endlich viele Elemente von  $\mathfrak{B}$  zerlegen, so soll das durch die Schreibweise

$$\mathfrak{A} \xrightarrow{z} \mathfrak{B}$$

symbolisiert werden. Die von H. Hadwiger vermutete Orthoschemzerlegbarkeit der  $n$ -dimensionalen Simplexe (erweitert auf die nichteuklidischen Simplexe) ist demnach identisch mit der Relation

$$\mathfrak{S}^n \xrightarrow{z} \mathfrak{S}_{n-1}^n.$$

Die bisher vorliegenden Untersuchungen zur Orthoschemzerlegbarkeit nicht-euklidischer Simplexe zeigen, daß im elliptischen Fall die Beschränkung auf Simplexe *ohne stumpfe Kanten* (Kanten, deren Länge größer als  $\frac{\pi}{2}$  ist) zweckmäßig ist. Da sich jedes elliptische Simplex in endlich viele Simplexe ohne stumpfe Kanten zerlegen läßt, ist diese Einschränkung für das vorliegende Problem nicht wesentlich (vgl. [1], S. 37). Die Menge der  $n$ -dimensionalen elliptischen Simplexe ohne stumpfe Kanten vereinigt mit den Mengen der euklidischen und hyperbolischen Simplexe aus  $\mathfrak{S}^n$  wird mit  $\mathfrak{B}^n$  bezeichnet, und es wird

$$\mathfrak{B}_{k|l}^n := \mathfrak{S}_{k|l}^n \cap \mathfrak{B}^n$$

definiert.

Damit reduziert sich das Hadwigersche Problem auf den Nachweis der Beziehung

$$\mathfrak{B}^n \xrightarrow{z} \mathfrak{B}_{n-1}^n.$$

Mit Hilfe der im zweiten Abschnitt eingeführten Simplextypisierung kann diese Aufgabe in  $n-1$  Teilaufgaben aufgegliedert werden. Wegen

$$\mathfrak{B}^n \supset \mathfrak{B}_1^n \supset \mathfrak{B}_2^n \supset \dots \supset \mathfrak{B}_{n-1}^n$$

(vgl. Folgerung 2) sind nämlich die Beziehungen

$$\mathfrak{B}_{i-1}^n \xrightarrow{z} \mathfrak{B}_i^n \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n-1$$

notwendig und hinreichend dafür, daß sich jedes Simplex aus  $\mathfrak{B}^n$  in Orthoscheme zerlegen läßt.

Außer prinzipiellen Zerlegbarkeitsaussagen sind auch Aussagen über die Anzahl der Teilsimplexe bei Simplexzerlegungen von Interesse. Dazu wird jedem geordneten

Paar  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  von Teilmengen von  $\mathfrak{S}^n$  unter der Voraussetzung  $\mathfrak{A} \xrightarrow{z} \mathfrak{B}$  durch die Festlegung

$$\delta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) := \max_{S \in \mathfrak{A}} \min_3 |\mathfrak{Z}(S, \mathfrak{B})|$$

genau eine natürliche Zahl (*Zerlegungszahl*) zugeordnet. Hierbei steht  $|\mathfrak{Z}(S, \mathfrak{B})|$  für die Anzahl der Simplexe aus  $\mathfrak{B}$ , in die das Simplex  $S$  durch die Zerlegung  $\mathfrak{Z}$  zerlegt wird. Für den Spezialfall  $\mathfrak{A} \xrightarrow{z} \mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}_{n-1}^n$  wird

$$\omega(\mathfrak{A}) := \delta(\mathfrak{A}, \mathfrak{S}_{n-1}^n)$$

definiert.

#### 4. Ein Verfahren zur Zerlegung der Simplexe aus $\mathfrak{B}^n$ in 1-orthogonale Simplexe

Durch den Nachweis der Beziehung  $\mathfrak{B}^n \xrightarrow{z} \mathfrak{B}_1^n$  soll das erste der im dritten Abschnitt aufgezählten Teilprobleme gelöst werden. Dazu wird zunächst eine *Lot-eigenschaft* von Simplexen eingeführt.

**DEFINITION 5.** Ein Simplex  $S$  aus  $\mathfrak{B}^n$  ( $n \geq 2$ ) mit einem Eckpunkt  $p$  besitzt die *Eigenschaft*  $(L/p)$  genau dann, wenn die  $(n-1)$ -dimensionale Seite  $S^p$  einen Punkt  $q$  mit  $(p, q) \perp S^p$  enthält.

Hat ein Simplex bezüglich eines Eckpunktes  $p$  die Eigenschaft  $(L/p)$ , dann läßt es sich offenbar in  $n$  oder weniger 1-orthogonale Simplexe zerlegen.

Schon unter den euklidischen Tetraedern existieren jedoch solche, die bezüglich keines ihrer Eckpunkte die geforderte Loteigenschaft besitzen (vgl. [2]).

Zu jedem Simplex aus  $\mathfrak{B}^n$  gibt es aber einen inneren Punkt, der als Ausgangspunkt für die Konstruktion 1-orthogonaler Teilsimplexe geeignet ist, nämlich den Mittelpunkt der *Inkugel*. Es seien  $S$  ein Simplex aus  $\mathfrak{B}^n$  ( $n \geq 2$ ),  $p$  der Mittelpunkt seiner Inkugel und  $T = (1, 2, \dots, n)$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Seite von  $S$ . Das Simplex  $(1, 2, \dots, n, p)$  besitzt dann notwendig die Eigenschaft  $(L/p)$ , das heißt, es existiert ein Punkt  $q$  mit  $q \in T$  und  $(p, q) \perp T$ . Die  $n$  Kantenzüge  $[p, q, 1, 2, \dots, j-1, j+1, j+2, \dots, n]$  mit  $j=1, 2, \dots, n$  sind 1-orthogonal, und die zugehörigen Simplexe bilden eine Zerlegung von  $(1, 2, \dots, n, p)$ .

(Falls  $q$  kein innerer Punkt von  $T$  ist, entarten gewisse dieser Teilsimplexe zu niederdimensionalen.) Da das  $n$ -dimensionale Simplex  $S$  genau  $n+1$  Seiten der Dimension  $n-1$  enthält, ergibt sich insgesamt der

**SATZ 1.** Jedes Simplex aus  $\mathfrak{B}^n$  ( $n \geq 2$ ) läßt sich in  $n(n+1)$  oder weniger Simplexe aus  $\mathfrak{B}_1^n$  zerlegen.

$$(\mathfrak{B}^n \xrightarrow{z} \mathfrak{B}_1^n \text{ mit } \delta(\mathfrak{B}^n, \mathfrak{B}_1^n) \leq n(n+1)).$$

#### 5. Ein Verfahren zur Zerlegung der Simplexe aus $\mathfrak{B}_{i|n-k-2}^n$ in Orthoscheme

In einem  $n$ -dimensionalen euklidischen, elliptischen oder hyperbolischen Raum ( $n \geq 2$ ) seien  $S$  ein  $i$ -dimensionales Simplex ( $1 \leq i \leq n-1$ ) und  $p$  ein Punkt mit  $p \notin \varrho(S)$ . Wenn das Lot von  $p$  auf  $\varrho(S)$  eindeutig konstruierbar ist, dann wird der Lotfußpunkt mit

$$l_p(S)$$

bezeichnet. In euklidischen und hyperbolischen Räumen ist ein Lot von einem Punkt auf einen Unterraum stets eindeutig konstruierbar, das heißt, es gibt genau eine Gerade mit  $p \in l$  und  $l \perp q(S)$ . In einem elliptischen Raum ist ein solches Lot genau dann eindeutig konstruierbar, wenn  $p$  und  $q(S)$  nicht in der *Pol-Polare-Beziehung* stehen. Besteht jedoch diese Beziehung, so ist jede Gerade  $l$  mit  $p \in l$  und  $l \cap q(S) \neq \emptyset$  ein Lot von  $p$  auf  $q(S)$ .

Im weiteren werden die Schreibweisen

$$p \dashv S \quad \text{bzw.} \quad p \nmid S$$

verwendet, um zu symbolisieren, daß zwischen dem Punkt  $p$  und dem elliptischen Raum  $q(S)$  die Pol-Polare-Beziehung besteht bzw. nicht besteht.

**HILFSSATZ 1.** *Es seien  $S$  ein Simplex aus  $\mathfrak{S}_{k|l}^n$  ( $n \geq 3$ ;  $1 \leq k+l \leq n-2$ ),  $K=[1, 2, \dots, n+1]$  ein  $(k|l)$ -orthogonaler Kantenzug von  $S$  und  $p$  ein Eckpunkt des Kerns  $C=v(S, K, (k|l))$  mit  $k+1 \neq p \neq n-l+1$ . Dann folgt aus  $p \nmid S^p$  die Identität  $l_p(S^p)=l_p(C^p)$ .*

Bei dem in [6] angegebenen Beweis des Hilfssatzes wird ausgenutzt, daß bestimmte Winkel zwischen den  $(n-1)$ -dimensionalen Seiten eines Simplexes aus  $\mathfrak{S}_{k|l}^n$  notwendig rechte sind.

**SATZ 2.** *Jedes Simplex aus  $\mathfrak{B}_{k|l}^n$  mit  $n \geq 2$  und  $k+l=n-2$  läßt sich in Orthoscheme zerlegen ( $\mathfrak{B}_{k|l}^n \xrightarrow{\pi} \mathfrak{B}_{n-1}^n$ ).*

$K=[1, 2, \dots, n+1]$  sei ein  $(k|l)$ -orthogonaler Kantenzug eines Simplexes  $S$  aus  $\mathfrak{B}_{k|l}^n$  ( $n \geq 2$ ;  $k+l=n-2$ ). Besitzt der Kern  $v(S, K, (k|l))$  die Eigenschaft

$$\begin{cases} (L/k+3) \\ (L/k+1), \\ (L/k+2) \end{cases} \quad \text{dann gilt} \quad \omega(S) \equiv \begin{cases} k+2 \\ n-k \\ \frac{k+2}{n-k-1} \binom{n}{k+2} \end{cases}.$$

**BEWEIS 1.** Der Kern  $v(S, K, (k|l))=(k+1, k+2, k+3)$  besitze die Eigenschaft  $(L/k+1)$ .

Zunächst gelte  $k=n-2$ . Wenn  $S$  nicht schon selber ein Orthoschem ist, liegt der Fußpunkt  $x$  des Lotes von  $n-1$  auf  $q(n, n+1)$  auf der Kante  $(n, n+1)$ , und  $S$  läßt sich in die beiden Orthoscheme  $S_1=(1, 2, \dots, n-1, x, n)$  und  $S_2=(1, 2, \dots, n-1, x, n+1)$  zerlegen. Daraus folgt  $\omega(S) \leq 2=n-(n-2)=n-k$ .

Im weiteren sei vorausgesetzt, daß der Satz im ersten Fall für  $k=i+1$  mit  $0 \leq i \leq n-3$  gilt. Gezeigt wird dann seine Gültigkeit für  $k=i$ . In diesem Fall ist  $C$  das Dreieck  $(i+1, i+2, i+3)$  mit der Eigenschaft  $(L/i+1)$ . Ist  $\sphericalangle((i+3)(i+2)(i+1))$  ein rechter Winkel, so ist  $S$  nach Folgerung 3 bereits selber ein Orthoschem. Anderenfalls gilt  $(i+1) \nmid (i+2, i+3, \dots, n+1)$ , und es kann  $x:=l_{i+1}(i+2, i+3, \dots, n+1)$  definiert werden. Da  $K$  nach Voraussetzung  $(i|n-i-2)$ -orthogonal ist, folgt aus dem Hilfssatz 1  $x=l_{i+1}(i+2, i+3)$ , und wegen der Kerneigenschaft  $(L/i+1)$  gilt  $x \in (i+2, i+3)$ . Deshalb läßt sich das Simplex  $S$  in die beiden Teilsimplexe  $S_1$  und

$S_2$  mit den Kantenziügen

$$K_1 = [1, 2, \dots, i+1, x, i+3, i+4, \dots, n+1] \quad \text{bzw.}$$

$$K_2 = [1, 2, \dots, i+1, x, i+2, i+4, i+5, \dots, n+1]$$

zerlegen. Wegen der  $i$ -Orthogonalität von  $K$  und der Lotkonstruktion von  $x$  sind  $K_1$  und  $K_2$   $(i+1)$ -orthogonal.

Andererseits folgt aus der  $(n-i-2)$ -Orthogonalität von  $-K$  im Falle  $x \neq i+3$  die  $(n-i-2)$ -Orthogonalität von  $[x, i+3, i+4, \dots, n+1]$ , so daß das Teilsimplex  $S_1$  nach Folgerung 3 ein Orthoschem ist. Sind die Punkte  $x$  und  $i+3$  identisch, so entartet  $S_1$  zu einem niederdimensionalen Simplex, woraus sich  $S=S_2$  ergibt.

Ebenso folgt aus der  $(n-i-2)$ -Orthogonalität von  $-K$  die  $(n-i-3)$ -Orthogonalität von  $[n+1, n, \dots, i+4, i+2, x]$ . Damit ist das Teilsimplex  $S_2$  nach Folgerung 3  $(i+1|n-(i+1)-2)$ -orthogonal. Nach Definition 2 gilt  $(i+2, i+3) \perp (i+3, i+4)$ . Da außerdem  $x$  auf  $(i+2, i+3)$  liegt, hat der Kern  $v(S_2, K_2, (i+1|n-(i+1)-2)) = (x, i+2, i+4)$  notwendig die Eigenschaft  $(L/x)$ .  $S_2$  ordnet sich demnach dem ersten Fall unter und läßt sich auf Grund der Induktionsvoraussetzung in  $n-(i+1)$  oder weniger Orthoscheme zerlegen.

Insgesamt ergibt sich also für den Fall  $k=i$  die Abschätzung  $\omega(S) \leq \omega(S_1) + \omega(S_2) \leq 1+n-(i+1)=n-i$ . Damit ist der erste Fall des Satzes für alle möglichen Werte von  $k$  und  $l$  bewiesen.

2. Der Kern  $v(S, K, (k|l))$  besitze die Eigenschaft  $(L/k+3)$ . In diesem Fall erfolgt durch die Festlegung  $i:=n-i+2$  für  $i=1, 2, \dots, n+1$  eine Umnummerierung der Eckpunkte von  $S$ . Der Kantenzug  $K'=[1, 2, \dots, n+1]$  des umnummerierten Simplexes  $S$  ist dann offenbar  $(n-k-2|k)$ -orthogonal, und mit den neuen Eckpunktbezeichnungen besitzt der Kern  $v(S, K', (n-k-2|k))=(n-k-1, n-k, n-k+1)$  die Loteigenschaft  $(L/n-k-1)$ . Somit ordnet sich das Simplex  $S$  vermöge der angewandten Eckenumnummerierung dem ersten Fall unter. Es läßt sich folglich in  $n-(n-k-2)=k+2$  oder weniger Orthoscheme zerlegen.

3. Der Kern  $v(S, K, (k|l))$  besitze die Eigenschaft  $(L/k+2)$ . Ist der Winkel  $\sphericalangle((k+1)(k+2)(k+3))$  nicht stumpf, so hat  $C$  außerdem mindestens eine der beiden Loteigenschaften  $(L/k+1)$  oder  $(L/k+3)$ ;  $S$  ordnet sich dann also einem der bereits untersuchten Fälle unter, und es gilt  $\omega(S) \leq k+2$  oder  $\omega(S) \leq n-k$ .

Auf jeden Fall ist  $\omega(S)$  unter dieser Voraussetzung nicht größer als  $\frac{k+2}{n-k-1} \binom{n}{k+2}$ , denn für  $2 \leq n$  und  $0 \leq k \leq n-2$  gelten die Ungleichungen

$$k+2 \leq \frac{k+2}{n-k-1} \binom{n}{k+2} \quad \text{und} \quad n-k \leq \frac{k+2}{n-k-1} \binom{n}{k+2}.$$

Im weiteren kann folglich die Loteigenschaft  $(L/k+2)$  durch die strengere Forderung  $|\sphericalangle((k+1)(k+2)(k+3))| > \frac{\pi}{2}$  (der Winkel  $\sphericalangle((k+1)(k+2)(k+3))$  sei stumpf) ersetzt werden.

Gezeigt wird die Zerlegbarkeit von  $S$  in  $\frac{k+2}{n-k-1} \binom{n}{k+2}$  oder weniger

Simplexe, die alle einen total-orthogonalen Kantenzug mit dem Anfangspunkt  $k+2$  enthalten. Solche Simplexe sollen in diesem Beweis als Simplexe mit der *Eigenschaft (K)* bezeichnet werden.

Im Falle  $n=2$  ist  $S$  ein Dreieck  $(1, 2, 3)$  mit  $|\angle(1, 2, 3)| > \frac{\pi}{2}$ . Der Fußpunkt des Lotes von 2 auf  $\varrho(1, 3)$  liegt auf der Kante  $(1, 3)$ .  $S$  läßt sich folglich in die Teildreiecke  $(2, x, 1)$  und  $(2, x, 3)$  zerlegen, die beide die Eigenschaft (K) besitzen. Auf Grund der Identität  $\frac{0+2}{2-0-1} \binom{2}{2} = 2$  ist damit der Satz für den zweiten Fall unter der Voraussetzung  $n=2$  bewiesen.

Im weiteren sei vorausgesetzt, daß sich jedes Simplex aus  $\mathfrak{B}^{i-1}$ , das einen  $(k|i-k-3)$ -orthogonalen Kantenzug  $[1, 2, \dots, i-1]$  besitzt und dessen Winkel  $\angle((k+1)(k+2)(k+3))$  stumpf ist, in  $\frac{k+2}{(i-1)-k-1} \binom{i-1}{k+2}$  oder weniger Simplexe mit der Eigenschaft (K) zerlegen läßt ( $2 \leq i-1 \leq n-1$ ;  $0 \leq k \leq i-3$ ).

Es sei  $S$  ein Simplex aus  $\mathfrak{B}^i$  mit dem  $(k|i-k-2)$ -orthogonalen Kantenzug  $K=[1, 2, \dots, i+1]$  und mit

$$|\angle((k+1)(k+2)(k+3))| > \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad (0 \leq k \leq i-2).$$

Wegen des stumpfen Winkels ist  $k+2$  im elliptischen Fall kein Pol des Träger-  
raumes von  $U=(1, 2, \dots, k+1, k+3, k+4, \dots, i+1)$ , so daß  $x:=l_{k+2}(U)$  definiert werden kann.

Nach Hilfssatz 1 gilt  $x=l_{k+2}(k+1, k+3)$ , und offenbar liegt  $x$  auf der Kante  $(k+1, k+3)$ . Die Simplexe  $S_1$  und  $S_2$  mit den 1-orthogonalen Kantenzügen

$$K_1 = [k+2, x, i+1, i, \dots, k+4, k+1, k, \dots, 1] \quad \text{bzw.}$$

$$K_2 = [k+2, x, 1, 2, \dots, k, k+3, k+4, \dots, i+1]$$

bilden deshalb eine Zerlegung von  $S$ .

Betrachtet werden die  $(i-1)$ -dimensionalen Untersimplexe von  $S_1$  bzw. von  $S_2$   $S'_1$  und  $S'_2$  mit den Kantenzügen

$$K'_1 = [1, 2, \dots, k+1, x, k+4, k+5, \dots, i+1] \quad \text{bzw.}$$

$$K'_2 = [1, 2, \dots, k, x, k+3, k+4, \dots, i+1].$$

Im Falle  $k=i-2$  ist  $K'_1=[1, 2, \dots, i-1, x]$  wegen der  $k$ -Orthogonalität von  $K$  und wegen  $x \in (i-1, i-3)$  total-orthogonal. Folglich ist  $S'_1=(i, x, i-1, i-2, \dots, 1)$  ein Simplex mit der Eigenschaft (K).

Für alle anderen zugelassenen Werte von  $k$  ist der Kantenzug  $K'_1$  wegen der  $(k|i-k-2)$ -Orthogonalität von  $K$   $(k|i-k-3)$ -orthogonal. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung läßt sich das Simplex  $S'_1$  folglich in  $\frac{k+2}{i-k-2} \binom{i-1}{k+2}$  Simplexe zerlegen, die jeweils einen total-orthogonalen Kantenzug mit dem Anfangspunkt  $x$  enthalten (Eigenschaft (K)).



Im Falle  $k=0$  ist  $K'_2 = [x, 3, 4, \dots, i+1]$  wegen der  $(i-2)$ -Orthogonalität von  $-K$  und wegen  $x \in (1, 3)$  total-orthogonal. Damit ist  $S_2 = (2, x, 3, 4, \dots, i+1)$  ein Simplex mit der Eigenschaft (K).

Für alle anderen zugelassenen Werte von  $k$  ist der Kantenzug  $K'_2$  wegen der  $(k|i-k-2)$ -Orthogonalität von  $K$   $(k-1|i-k-2)$ -orthogonal. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung läßt sich das Simplex  $S'_2$  folglich in  $\frac{k+1}{i-k-1} \binom{i-1}{k+1}$  Simplexe zerlegen, die jeweils einen total-orthogonalen Kantenzug mit dem Anfangspunkt  $x$  enthalten (Eigenschaft (K)).

Es sei  $(a_1, a_2, \dots, a_i)$  eines der Teilsimplexe mit der Eigenschaft (K), in die sich  $S'_1$  und  $S'_2$  zerlegen lassen. Wegen  $(k+2, x) \perp S'_1$  bzw.  $(k+2, x) \perp S'_2$  ist  $(k+2, a_1, a_2, \dots, a_i)$  dann ein Teilsimplex von  $S_1$  bzw.  $S_2$  mit der Eigenschaft (K).

Da die so konstruierten Teilorthoscheme von  $S_1$  bzw. von  $S_2$  insgesamt eine Zerlegung von  $S$  bilden, gilt

$$\begin{aligned} \omega(S) &\leq \omega(S_1) + \omega(S_2) \leq \frac{k+2}{i-k-2} \binom{i-1}{k+2} + \frac{k+1}{i-1-k} \binom{i-1}{k+1} = \\ &= \binom{i}{k+2} \left( \frac{(k+2)(i-k-2)}{i(i-k-2)} + \frac{(k+2)(k+1)}{i(i-k-1)} \right) = \frac{k+2}{i-k-1} \binom{i}{k+2}. \end{aligned}$$

Damit ist auch der dritte Fall durch vollständige Induktion bewiesen.  $\square$

Sowohl die Beziehung  $\mathfrak{B}_{n-2}^n \xrightarrow{z} \mathfrak{B}_{n-1}^n$ , als auch die Abschätzung  $\omega(\mathfrak{B}_{n-2}^n) \leq n$  ergeben sich als Spezialfälle des Satzes 2. Es gilt die

**FOLGERUNG 4.** *Es sei  $K = [1, 2, \dots, n+1]$  ein  $(n-2)$ -orthogonaler Kantenzug eines Simplexes  $S$  aus  $\mathfrak{B}_{n-2}^n$ . Falls der Kern  $v(S, K, (n-2|0)) = (n-1, n, n+1)$  die Eigenschaft  $(L|n-1)$  besitzt, ist  $S$  in zwei und sonst in  $n$  oder weniger Orthoscheme zerlegbar.*

Damit ist ein weiteres der im dritten Abschnitt aufgezählten Teilprobleme des allgemeinen Orthoschemazerlegbarkeitsproblems gelöst.

Es sollen nun Folgerungen für zwei- und dreidimensionale Simplexe aufgeführt werden.

Für  $n=2$  ergibt sich das triviale Ergebnis

$$\mathfrak{B}^2 \xrightarrow{z} \mathfrak{B}_1^2 \quad \text{mit} \quad \omega(\mathfrak{B}^2) = 2.$$

Für  $n=3$  gilt nach Satz 1

$$\mathfrak{B}^3 \xrightarrow{z} \mathfrak{B}_1^3 \quad \text{mit} \quad \delta(\mathfrak{B}^3, \mathfrak{B}_1^3) \leq 12,$$

und die Folgerung 4 beinhaltet

$$\mathfrak{B}_1^3 \xrightarrow{z} \mathfrak{B}_2^3 \quad \text{mit} \quad \omega(\mathfrak{B}^3) \leq 3.$$



Insgesamt ergibt sich also

$$\mathfrak{B}^3 \xrightarrow{z} \mathfrak{B}_2^3 \quad \text{mit} \quad \omega(\mathfrak{B}^3) \leq 36,$$

das heißt, jedes Tetraeder aus  $\mathfrak{B}^3$  läßt sich in 36 oder weniger Orthoscheme zerlegen. Daß diese Abschätzung recht grob ist, zeigt die von J. Böhm in [2] bewiesene Identität  $\omega(\mathfrak{B}^3)=12$ . In derselben Arbeit findet sich der Beweis für  $\omega(\mathfrak{B}_2^3)=3$ . Demnach ist das dem Satz 1 zu Grunde liegende Zerlegungsverfahren die Ursache für die Ungenauigkeit der obigen Abschätzung.

Es sei noch bemerkt, daß die entsprechenden Ergebnisse für  $n=2$  und  $n=3$  die Gültigkeit der Gleichung  $\omega(\mathfrak{B}_{n-2}^n)=n$  für  $n \geq 2$  vermuten lassen.

In seiner ganzen Allgemeinheit kommt der Satz 2 erst im folgenden Abschnitt zur Anwendung.

## 6. Ein Verfahren zur Zerlegung der Simplexe aus $\mathfrak{B}_{n-3}^n$ in Orthoscheme

Es sei  $K=[1, 2, \dots, n+1]$  ein  $(n-3)$ -orthogonaler Kantenzug eines Simplexes  $S$  aus  $\mathfrak{B}_{n-3}^n$ . Besitzt der Kern  $v(S, K, (n-3|0))=(n-2, n-1, n, n+1)$  die Eigenschaft  $(L/(n-2))$ , dann ist die Zerlegbarkeit von  $S$  in  $(n-2)$ -orthogonale Simplexe offensichtlich. Unter den anderen Fällen der Lage von  $l_{n-2}(n-1, n, n+1)$  bezüglich des Dreiecks  $(n-1, n, n+1)$  wird ein spezieller ausgezeichnet durch die

DEFINITION 5. Ein Simplex  $S$  aus  $\mathfrak{B}_{n-3}^n$  besitzt bezüglich eines  $(n-3)$ -orthogonalen Kantenzuges  $K=[1, 2, \dots, n+1]$  die Eigenschaft  $(L/K)$  genau dann, wenn die beiden Relationen  $(n-2)A(n-1, n, n+1)$  und  $l_{n-2}(n-1, n, n+1) \in \varrho(n-1, n) \setminus (n-1, n)$  gelten.

Jedes Simplex aus  $\mathfrak{B}_{n-3}^n$  mit der Eigenschaft  $(L/K)$  läßt sich in Orthoscheme zerlegen. Zum Beweis benötigt wird der

HILFSSATZ 2. Ein Simplex aus  $\mathfrak{B}_{n-3}^n$  besitze bezüglich seines  $(n-3)$ -orthogonalen Kantenzuges  $K=[n+1, n, \dots, 1]$  die Eigenschaft  $(L/K)$ , und der Winkel  $\sphericalangle(423)$  sei stumpf.

1. Ist der Winkel  $\sphericalangle(321)$  stumpf und wird  $x_0:=2$  festgelegt, so gelten für alle natürlichen Zahlen  $i$  mit  $1 \leq i \leq n-2$  die folgenden beiden Aussagen.

- (I) Das Lot von  $x_{i-1}$  auf  $\varrho(n+1, n, \dots, i+3, 3, 1)$  ist eindeutig bestimmt und der Lotfußpunkt  $x_i$  liegt im Dreieck  $(i+3, 3, 1)$ .
- (II) Die Dreiecke  $(x_i, i+3, 3)$  und  $(x_i, 3, 1)$  besitzen jeweils die Eigenschaft  $(L/x_i)$ .

2. Ist der Winkel  $\sphericalangle(231)$  stumpf und wird  $x_0:=l_3(2, 1)$  festgelegt, so gelten für alle natürlichen Zahlen  $i$  mit  $1 \leq i \leq n-2$  ebenfalls die Aussagen (I) und (II), und außerdem besitzt das Dreieck  $(x_i, 1, i+3)$  die Eigenschaft  $(L/x_i)$ .

Der Hilfssatz wird in [6] durch vollständige Induktion und unter Verwendung der Methode der Auffangsimplexe bewiesen.

SATZ 3. Jedes Simplex  $S$  aus  $\mathfrak{B}_{n-3}^n$ , das bezüglich seines  $(n-3)$ -orthogonalen Kantenzuges  $K=[n+1, n, \dots, 1]$  die Eigenschaft  $(L/K)$  besitzt, läßt sich in Ortho-

scheme zerlegen, und es gilt

$$\omega(S) \equiv \begin{cases} 2^n + \frac{n}{2}(n-3) - 1 & \left\{ \begin{array}{l} \text{für } |\angle(321)| > \frac{\pi}{2}; |\angle(423)| > \frac{\pi}{2} \\ \text{und für } |\angle(231)| > \frac{\pi}{2}; |\angle(432)| > \frac{\pi}{2}, \end{array} \right. \\ \frac{1}{2}(3n^2 - n - 2) & \left\{ \begin{array}{l} \text{für } |\angle(231)| > \frac{\pi}{2}; |\angle(423)| > \frac{\pi}{2} \\ \text{und für } |\angle(321)| > \frac{\pi}{2}; |\angle(432)| > \frac{\pi}{2}, \end{array} \right. \\ \frac{1}{2}(n^2 + n - 2) & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS. Auf Grund der Eigenschaft (L/K) von  $S$  muß einer der beiden Winkel  $\angle(423)$  und  $\angle(432)$  stumpf sein.

1. Der Winkel  $\angle(423)$  sei stumpf.

1.1. Die Winkel  $\angle(321)$  und  $\angle(231)$  seien beide nicht stumpf.

1.1.1. Mindestens einer der Winkel  $\angle(231)$  und  $\angle(321)$  sei ein rechter.

O.B.d.A. gelte  $|\angle(321)| = \frac{\pi}{2}$ . (Ist nur der Winkel  $\angle(231)$  ein rechter, so erfolgt der Beweis bis auf Vertauschung der Eckenbezeichnungen 2 und 3 genauso.)

Wegen der Eigenschaft (L/K) von  $S$  gilt  $(1, 2) \perp (2, 3, 4)$ . Wird außerdem die  $(n-3)$ -Orthogonalität von  $K$  berücksichtigt, so ergibt sich  $(1, 2) \perp (i, i+1)$  für  $2 \leq i \leq n$ , das heißt,  $K$  ist  $(n-3|1)$ -orthogonal. Da weiterhin der Kern  $v(S, K, (n-3|1)) = (4, 3, 2)$  nach Voraussetzung die Eigenschaft (L/2) besitzt, läßt sich  $S$  Satz 2 zufolge in  $n-1$  oder weniger Orthoscheme zerlegen. Wegen  $\frac{1}{2}(n^2 + n - 2) \geq n-1$  für  $n \geq 3$  gilt erst recht die Abschätzung  $\omega(S) \leq \frac{1}{2}(n^2 + n - 2)$ .

1.1.2. Die Winkel  $\angle(321)$  und  $\angle(231)$  seien beide keine rechten. Demnach gilt  $1 \nmid (2, 3, \dots, n+1)$ , so daß  $x := l_1(2, 3, \dots, n+1)$  definiert werden kann. Nach Hilfssatz 1 folgt  $x = l_1(2, 3, 4)$ . Wegen der Eigenschaft (L/K) gilt  $\varrho(1, 2, 3) \perp \perp \varrho(2, 3, 4)$ . Daraus ergibt sich  $x = l_1(2, 3)$ . Zusammen mit der Voraussetzung des Falles 1.1 folgt schließlich  $x \in (2, 3)$ , so daß die Simplexe  $S_1$  und  $S_2$  mit den Kantenzügen  $K_1 = [n+1, n, \dots, 3, x, 1]$  bzw.  $K_2 = [n+1, n, \dots, 4, 2, x, 1]$  eine Zerlegung von  $S$  bilden.  $K_1$  und  $K_2$  sind offenbar beide  $(n-3|1)$ -orthogonal. Aus der Voraussetzung des ersten Falles folgt, daß der Kern  $v(S_1, K_1, (n-3|1)) = (4, 3, x)$  die Eigenschaft (L/x) und der Kern  $v(S_2, K_2, (n-3|1)) = (4, 2, x)$  die Eigenschaft (L/2) besitzt.

Nach Satz 2 gilt deshalb  $S_1 \xrightarrow{z} \mathfrak{B}_{n-1}^n$  mit  $\omega(S_1) \leq n-1$  und  $S_2 \xrightarrow{z} \mathfrak{B}_{n-1}^n$  mit  $\omega(S_2) \leq \frac{n-1}{n-(n-1)+1} \binom{n}{n-1} = \frac{1}{2}(n^2 - n)$ . Insgesamt ergibt sich für den Fall 1.1.2  $S \xrightarrow{z} \mathfrak{B}_{n-1}^n$  mit

$$\omega(S) \leq \omega(S_1) + \omega(S_2) \leq \frac{1}{2}(n^2 - n) + (n-1) = \frac{1}{2}(n^2 + n - 2).$$

1.2. Der Winkel  $\angle(231)$  sei stumpf.

Es gilt  $x_0 \in (1, 2)$  für  $x_0 := l_3(2, 1)$ . Die Simplexe  $S_1$  und  $S_2$  mit den Kantenzügen  $K_1 = [n+1, n, \dots, 2, x_0]$  bzw.  $K_2 = [n+1, n, \dots, 3, 1, x_0]$  bilden eine Zerlegung von  $S$ .  $K_1$  und  $K_2$  sind  $(n-3)$ -orthogonal. Das Teilsimplex  $S_1$  besitzt darüber hinaus offenbar auch die Eigenschaft  $(L/K_1)$ , und da im Dreieck  $(3, 2, x_0)$  kein Winkel stumpf ist, ordnet sich  $S_1$  dem bereits untersuchten Fall 1.1 unter. Folglich gilt  $S_1 \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}_{n-1}^a$  mit  $\omega(S_1) \leq \frac{1}{2}(n^2 + n - 2)$ .

Das Simplex  $S$  erfüllt die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 (Teil 2). Im weiteren wird beschrieben, wie sich das Teilsimplex  $S_2$  unter Verwendung der in diesem Hilfssatz induktiv definierten Lotfußpunkte  $x_1, x_2, \dots$  und  $x_{n-2}$  in Orthoscheme zerlegen läßt.

Auf Grund der Aussage (I) des Hilfssatzes 2 gilt für  $x_i = l_{x_{i-1}}(n+1, n, \dots, i+3, 3, 1)$  mit  $i=1, 2, \dots, n-2$  die Beziehung  $x_i \in (i+3, 3, 1)$ . Folglich läßt sich das Teilsimplex  $S_{i+1} = (n+1, n, \dots, i+3, 3, 1, x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_0)$  im  $i$ -ten Schritt in die drei Simplexe  $S'_{i+1}$ ,  $S''_{i+1}$  und  $S_{i+2}$  mit den Kantenzügen

$$K'_{i+1} = [n+1, n, \dots, i+3, 1, x_i, x_{i-1}, \dots, x_0] \quad \text{bzw.}$$

$$K''_{i+1} = [n+1, n, \dots, i+3, 3, x_i, x_{i-1}, \dots, x_0] \quad \text{bzw.}$$

$$K_{i+2} = [x_0, x_1, \dots, x_i, 1, 3, i+4, i+5, \dots, n+1]$$

zerlegen. Auf diese Weise ergibt sich nach genau  $n-2$  Schritten eine Zerlegung von  $S_2$  in die Teilsimplexe  $S'_2, S'_3, \dots, S'_{n-1}, S''_2, S''_3, \dots, S''_{n-1}$  und  $S_n$ .

Wegen  $x_0, x_1, \dots, x_i \in \varrho(1, 2, \dots, i+3)$  und wegen der  $(n-3)$ -Orthogonalität von  $K = [n+1, n, \dots, 1]$  sind die Kantenzüge  $K'_{i+1}$  und  $K''_{i+1}$  der Simplexe  $S'_{i+1}$  bzw.  $S''_{i+1}$  alle  $(n-i-2)$ -orthogonal. Andererseits sind die Kantenzüge  $-K'_{i+1}$  und  $-K''_{i+1}$  auf Grund der Konstruktion der Punkte  $x_0, x_1, \dots$  und  $x_i$  jeweils  $i$ -orthogonal. Somit sind  $K'_{i+1}$  und  $K''_{i+1}$   $(n-i-2|i)$ -orthogonale Kantenzüge, und die zugehörigen Simplexe  $S'_{i+1}$  und  $S''_{i+1}$  lassen sich nach Satz 2 in Orthoscheme zerlegen.

Von den oben angeführten Teilsimplexen von  $S_2$  bleibt nur noch das Simplex  $S_n$  zu untersuchen. Aus der Konstruktion der Lotfußpunkte  $x_0, x_1, \dots$  und  $x_{n-2}$  folgt aber sofort, daß der Kantenzug  $K_n$  von  $S_n$   $(n-2)$ -orthogonal ist.

Nach Hilfssatz 2 (Teil 2) besitzen die Dreiecke

$$v(S'_{i+1}, K'_{i+1}, (n-i-2|i)) = (i+3, 1, x_i) \quad \text{und}$$

$$v(S''_{i+1}, K''_{i+1}, (n-i-2|i)) = (i+3, 3, x_i)$$

die Eigenschaft  $(L/x_i)$  und das Dreieck  $v(S_n, K_n, (n-2|0)) = (3, 1, x_{n-2})$  die Eigenschaft  $(L/x_{n-2})$ . Daraus folgen auf Grund des Satzes 2 die Beziehungen  $\omega(S'_{i+1}) \leq n-i$ ,  $\omega(S''_{i+1}) \leq n-i$  und  $\omega(S_n) = 2$ . Da der Index  $i$  der Teilsimplexe von  $S_2$  die Zahlen  $1, 2, \dots, n-2$  durchläuft, ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega(S_2) &\leq \sum_{i=1}^{n-2} \omega(S'_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-2} \omega(S''_{i+1}) + \omega(S_n) \leq \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^{n-2} (n-i) + 2 = n^2 - n. \end{aligned}$$

Wird außerdem die oben bewiesene Abschätzung für  $\omega(S_1)$  berücksichtigt, so folgt für das Simplex  $S$  insgesamt im Fall 1.2 die Ungleichung  $\omega(S) \leq \omega(S_1) + \omega(S_2) \leq \frac{1}{2}(n^2 + n - 2) + n^2 - n = \frac{1}{2}(3n^2 - n - 2)$ .

1.3. Der Winkel  $\angle (321)$  sei stumpf.

Dann erfüllt das Simplex  $S$  alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 (Teil 1). Unter Verwendung der dort induktiv definierten Lotfußpunkte  $x_0, x_1, \dots$  und  $x_{n-2}$  ( $x_0 := 2; x_i := l_{x_{i-1}}(n+1, n, \dots, i+3, 3, 1)$  für  $i = 1, 2, \dots, n-2$ ) läßt sich  $S$  auch in diesem Fall in Orthoscheme zerlegen.

Wegen der Aussage (I) des Hilfssatzes 2 kann  $S$  zunächst formal genauso wie das Simplex  $S_2$  des Falles 1.2 in die dort definierten Simplexe  $S'_2, S'_3, \dots, S'_{n-1}, S''_2, S''_3, \dots, S''_{n-1}$  und  $S_n$  mit den ebenfalls dort definierten Kantenzügen  $K'_2, K'_3, \dots, K'_{n-1}, K'_2, K'_3, \dots, K'_{n-1}$  bzw.  $K_n$  zerlegt werden. Mit denselben Begründungen wie im Falle 1.2 sind die Kantenzüge  $K'_{i+1}$  und  $K''_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-2$ )  $(n-i-2|i)$ -orthogonal und der Kantenzug  $K_n$   $(n-2)$ -orthogonal. Alle Teilsimplexe sind also nach Satz 2 orthoschemzerlegbar.

Unterschiede zum Fall 1.2 ergeben sich aber bei der Zuordnung der Teilsimplexe zu den verschiedenen Fällen des Satzes 2. Nach Hilfssatz 2 (Aussage (II)) besitzen die Dreiecke  $v(S'_{i+1}, K'_{i+1}, (n-i-2|i)) = (i+3, 3, x_i)$  die Eigenschaft  $(L/x_i)$  und das Dreieck  $v(S_n, K_n, (n-2|0)) = (3, 1, x_{n-2})$  die Eigenschaft  $(L/x_{n-2})$ . Da jedoch die Dreiecke  $v(S'_{i+1}, K'_{i+1}, (n-i-2|i)) = (i+3, 1, x_i)$  im allgemeinen keine der beiden Eigenschaften  $(L/x_i)$  und  $(L/i+3)$  besitzen, muß für diese diejenige Loteigenschaft angenommen werden, die zur größten der im Satz 2 angegebenen oberen Schranken für die Orthoschemzerlegungszahl der zugehörigen  $n$ -dimensionalen Simplexe führt. Dabei handelt es sich um die Eigenschaft  $(L/1)$ .

Der Satz 2 liefert demnach die Beziehungen

$$\omega(S'_{i+1}) \leq \frac{n-i}{n-n+i+1} \binom{n}{n-i} = \frac{n-i}{i+1} \binom{n}{n-i}, \quad \omega(S''_{i+1}) \leq n-i$$

und

$$\omega(S_n) = 2.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega(S) &\leq \sum_{i=1}^{n-2} \omega(S'_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-2} \omega(S''_{i+1}) + \omega(S_n) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-2} \frac{n-i}{i+1} \binom{n}{n-i} + \sum_{i=1}^{n-2} (n-i) + 2 = \\ &= (2^n - n - 2) + \frac{1}{2}(n^2 - n - 2) + 2 = \\ &= 2^n + \frac{n}{2}(n-3) - 1. \end{aligned}$$

2. Der Winkel  $\angle (432)$  sei stumpf.

Der Beweis erfolgt bis auf Vertauschung der Eckpunktbezeichnungen 2 und 3 genau wie im ersten Fall, und es ergeben sich genau die noch fehlenden Aussagen des Satzes.  $\square$

Um die Beziehung  $\mathfrak{B}_{n-3}^n \xrightarrow{x} \mathfrak{B}_{n-1}^n$  nachzuweisen, muß noch gezeigt werden, daß sich jedes Simplex aus  $\mathfrak{B}_{n-3}^n$  in solche mit der Eigenschaft (L/K) oder in  $(n-2)$ -orthogonale zerlegen läßt. Der folgende Satz gibt darüber hinaus auch Abschätzungen für  $\omega(\mathfrak{B}_{n-3}^n)$  an.

SATZ 4. Jedes Simplex aus  $\mathfrak{B}_{n-3}^n$  läßt sich in Orthoscheme zerlegen

$$(\mathfrak{B}_{n-3}^n \xrightarrow{x} \mathfrak{B}_{n-1}^n).$$

$K=[n+1, n, \dots, 1]$  sei ein  $(n-3)$ -orthogonaler Kantenzug eines Simplexes  $S$  aus  $\mathfrak{B}_{n-3}^n$ . Besitzt der Kern  $v(S, K, (n-3|0))=(4, 3, 2, 1)$  die Eigenschaft (L/4), so gilt  $\omega(S) \leq n+4$  und sonst

$$\omega(S) \leq 2^n + 2(n^2 - n - 1).$$

BEWEIS. 1.  $(4, 3, 2, 1)$  besitze die Eigenschaft (L/4).

1.1. Es gelte  $4 \dashv (3, 2, 1)$ .

In diesem Fall ist  $K$   $(n-2)$ -orthogonal, und nach Satz 2 ergibt sich

$$S \xrightarrow{x} \mathfrak{B}_{n-1}^n \quad \text{mit} \quad \omega(S) \leq n.$$

1.2. Es gelte  $4 \nmid (3, 2, 1)$ .

Aus  $x:=l_4(3, 2, 1)$  folgt  $x \in (1, 2, 3)$ . Demnach bilden die Simplexe  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  mit den Kantenzügen  $K_1=[n+1, n, \dots, 4, x, 2, 1]$  bzw.  $K_2=[n+1, n, \dots, 4, x, 3, 1]$  bzw.  $K_3=[n+1, n, \dots, 4, x, 3, 2]$  eine Zerlegung von  $S$ . Wegen der  $(n-3)$ -Orthogonalität von  $K$  und wegen der Konstruktion von  $x$  sind  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$   $(n-2)$ -orthogonal. Die Teilsimplexe  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  sind folglich nach Satz 2 orthoschemzerlegbar.

Da sich die Winkel  $\angle(2x1)$ ,  $\angle(3x2)$  und  $\angle(3x1)$  zu  $2\pi$  ergänzen, kann höchstens einer dieser Winkel spitz sein. Es haben also mindestens zwei der Dreiecke  $v(S_1, K_1, (n-2|0))=(x, 2, 1)$ ,  $v(S_2, K_2, (n-2|0))=(x, 3, 1)$  und  $v(S_3, K_3, (n-2|0))=(x, 3, 2)$  die Eigenschaft (L/x). Damit lassen sich nach Satz 2 mindestens zwei der Simplexe  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  in jeweils zwei und das dritte in  $n$  oder weniger Orthoscheme zerlegen. Insgesamt ergibt sich  $\omega(S) \leq n+4$ .

Falls  $x$  auf einer der Kanten des Dreiecks  $(3, 2, 1)$  liegt, entartet eines der Simplexe  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  zu einem  $(n-1)$ -dimensionalen, woraus  $\omega(S) \leq n-2$  folgt.

2.  $(4, 3, 2, 1)$  besitze nicht die Eigenschaft (L/4).

In diesem Fall gilt  $x \notin (3, 2, 1)$  für  $x:=l_4(3, 2, 1)$ .

2.1. Die Punkte  $x, 3, 2$  und  $1$  mögen ein konvexes Viereck bilden, in dem o.B.d.A.  $x$  der gegenüberliegende Punkt von  $3$  ist. Der Schnittpunkt der Geraden  $g(3, x)$  mit der Simplexkante  $(2, 1)$  soll mit  $y$  bezeichnet werden. Die Simplexe  $S_1$  und  $S_2$  mit den  $(n-3)$ -orthogonalen Kantenzügen  $K_1=[n+1, n, \dots, 3, y, 1]$  bzw.  $K_2=[n+1, n, \dots, 3, y, 2]$  bilden eine Zerlegung von  $S$ . Offenbar besitzen  $S_1$  die Eigenschaft (L/ $K_1$ ) und  $S_2$  die Eigenschaft (L/ $K_2$ ). Beide Teilsimplexe sind also nach Satz 3 orthoschemzerlegbar. Die Mengen der Simplexe aus  $\mathfrak{B}_{n-3}^n$ , die sich nach Satz 3



in  $\frac{1}{2}(3n^2 - n - 2)$  bzw. in  $\left(2^n + \frac{n}{2}(n-3) - 1\right)$  Orthoscheme zerlegen lassen, sollen hier mit  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{B}$  bezeichnet werden.

Wegen  $|\angle(y31)| + |\angle(y32)| < \pi$  und wegen  $|\angle(3y2)| + |\angle(3y1)| = \pi$  ist es nicht möglich, daß  $S_1$  und  $S_2$  beide aus  $\mathfrak{A}$  oder beide aus  $\mathfrak{B}$  sind. Es können aber o.B.d.A.  $S_1$  aus  $\mathfrak{A}$  und  $S_2$  aus  $\mathfrak{B}$  sein. Da andererseits für  $n \geq 3$  die Ungleichungen  $\frac{1}{2}(n^2 + n - 2) < 2^n + \frac{n}{2}(n-3) - 1$  und  $\frac{1}{2}(n^2 + n - 2) < \frac{1}{2}(3n^2 - n - 2)$  gelten, ergibt sich insgesamt die Abschätzung

$$\omega(S) \leq \omega(S_1) + \omega(S_2) \leq \left(2^n + \frac{n}{2}(n-3) - 1\right) + \left(\frac{n}{2}(3n-1) - 1\right) = 2^n + 2(n^2 - n - 1).$$

2.2. Die konvexe Hülle von  $(x, 3, 2, 1)$  sei ein Dreieck, in dessen Inneren einer der Punkte  $3, 2, 1$  liegt. O.B.d.A. soll  $3$  ein innerer Punkt des Dreiecks sein.

Der Schnittpunkt der Geraden  $\varrho(x, 3)$  und der Simplexkante  $(2, 1)$  sei mit  $y$  bezeichnet. Die Simplexe  $S_1$  und  $S_2$  mit den  $(n-3)$ -orthogonalen Kantenzügen

$$K_1 = [n+1, n, \dots, 4, y, 3, 1] \quad \text{bzw.} \quad K_2 = [n+1, n, \dots, 4, y, 3, 2]$$

bilden eine Zerlegung von  $S$ .  $S_1$  besitzt die Eigenschaft  $(L/K_1)$  und  $S_2$  die Eigenschaft  $(L/K_2)$ . Beide Teilsimplexe sind folglich nach Satz 3 orthoschemzerlegbar. Wegen  $|\angle(3y1)| + |\angle(3y2)| = \pi$  bzw. wegen  $|\angle(y32)| + |\angle(y31)| < \pi$  können auch in diesem Fall nicht beide Teilsimplexe aus  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{B}$  sein. Wie im Fall 2.1 ergibt sich deshalb nach Satz 3  $\omega(S) \leq 2^n + 2(n^2 - n - 1)$ .

2.3. Zu untersuchen bleibt der Fall, daß  $x$  auf der Trägergeraden einer Kante des Dreiecks  $(3, 2, 1)$  liegt. O.B.d.A. gelte  $x \in \varrho(3, 2)/(3, 2)$ . Offenbar besitzt  $S$  dann die Eigenschaft  $(L/K)$  bezüglich seines  $(n-3)$ -orthogonalen Kantenzuges  $K = [n+1, n, \dots, 1]$ . Aus dem Satz 3 ergeben sich deshalb die Orthoschemzerlegbarkeit von  $S$  und die Abschätzung

$$\omega(S) \leq \max \left\{ \left(2^n + \frac{n}{2}(n-3) - 1\right), \left(\frac{1}{2}(3n^2 - n - 2)\right), \left(\frac{1}{2}(n^2 + n - 2)\right) \right\} < 2^n + 2(n^2 - n - 1). \quad \square$$

Von Interesse sind die Konsequenzen des Satzes 4 für Simplexe der Dimensionszahlen  $3, 4$  und  $5$ . Zunächst gilt die

FOLGERUNG 5.  $\omega(\mathfrak{A}_{n-3}^n) \leq 2^n + 2(n^2 - n - 1)$ .

Im Falle  $n=3$  ergibt sich die Ungleichung  $\omega(\mathfrak{B}^3) \leq 18$ . Der dem Satz 4 zugrunde liegende Zerlegungsalgorithmus ist folglich hinsichtlich der Abschätzung von  $\omega(\mathfrak{B}^3)$  günstiger, als der aus den Sätzen 2 und 3 kombinierte. Da er für  $n=3$  jedoch nicht zu der in [2] nachgewiesenen Zerlegungszahl  $12$  führt, läßt sich die Abschätzung in der Folgerung 5 vermutlich auch für den allgemeinen Fall noch verbessern.

Für ein beliebiges Tetraeder  $S = (1, 2, 3, 4)$  aus  $\mathfrak{B}^3$  mit der Eigenschaft  $(L/1)$  folgt aus dem Satz 4 die Ungleichung  $\omega(S) \leq 7$ . Aus der Arbeit [2] geht hervor, daß für solche Tetraeder sogar  $\omega(S) = 7$  gilt.



Es könnte deshalb sein, daß sich die Abschätzung  $\omega(S) \leq n+4$  des Satzes 4 durch die Gleichung  $\omega(S) = n+4$  ersetzen läßt. Tatsächlich wäre das der Fall, wenn die im vierten Abschnitt aufgestellte Vermutung  $\omega(\mathfrak{B}_{n-2}^n) = n$  bestätigt werden könnte.

Für vierdimensionale Simplexe ergibt sich aus den Sätzen 1 und 4 die

FOLGERUNG 6. *Jedes Simplex aus  $\mathfrak{B}^4$  läßt sich in Orthoscheme zerlegen.*

Auf Grund der Beziehung  $\mathfrak{S}^4 \xrightarrow{z} \mathfrak{B}^4$  ist demnach jedes vierdimensionale euklidische, elliptische oder hyperbolische Simplex orthoschemzerlegbar (vgl. [3]).

Für die Teilmenge der vierdimensionalen euklidischen Simplexe kam bereits A. B. Charazišvili ([4]) zu diesem Ergebnis. Als eine obere Schranke für die Orthoschemzerlegungszahl dieser Simplexmengen erhielt er den Wert 730.

Wegen  $\delta(\mathfrak{B}^4, \mathfrak{B}_1^4) \leq 20$  (Satz 1) und  $\omega(\mathfrak{B}_1^4) \leq 38$  (Folgerung 5) ergibt sich  $\omega(\mathfrak{B}^4) \leq 760$  als eine erste Abschätzung für  $\omega(\mathfrak{B}^4)$ . Es läßt sich jedoch leicht zeigen, daß von den zwanzig 1-orthogonalen Simplexen, in die jedes Simplex aus  $\mathfrak{B}^4$  nach Satz 1 zerlegt werden kann, mindestens fünf die Voraussetzung dafür erfüllen, daß sie nach Satz 4 jeweils in acht oder weniger Orthoscheme zerlegbar sind. Somit ergibt sich

FOLGERUNG 7.  $\omega(\mathfrak{B}^4) \leq 610$ .

Auch zu diesem Ergebnis ist zu bemerken, daß — durch die vom Inkugelmittelpunkt ausgehende Konstruktion der total orthogonalen Kantenzüge (vgl. Satz 1) — die Abschätzung der Orthoschemzerlegungszahl recht grob ist. Diese Zahl liegt vermutlich erheblich unter der angegebenen oberen Schranke, ihre Bestimmung dürfte jedoch eine außerordentlich komplizierte Aufgabe sein.

Für die Dimensionszahl  $n=5$  gestattet der Satz 4 die

FOLGERUNG 8.  $\mathfrak{B}_2^5 \xrightarrow{z} \mathfrak{B}_4^5$  mit  $\omega(\mathfrak{B}_2^5) \leq 70$ .

Außer diesem Ergebnis ist für  $n=5$  nur die Gültigkeit der Beziehung  $\mathfrak{B}^5 \xrightarrow{z} \mathfrak{B}_1^5$  mit  $\delta(\mathfrak{B}^5, \mathfrak{B}_1^5) \leq 30$  bekannt (vgl. Satz 1). Um die Orthoschemzerlegbarkeit aller fünfdimensionalen euklidischen und nichteuklidischen Simplexe nachzuweisen, ist ein Zerlegungsalgorithmus zu finden, der die Beziehung  $\mathfrak{B}_1^5 \xrightarrow{z} \mathfrak{B}_2^5$  realisiert. Diesbezügliche Untersuchungen führten — außer in Spezialfällen — bisher noch zu keinem Ergebnis.

Abschließend soll das wichtigste Ergebnis der vorliegenden Arbeit hervorgehoben werden. Es ergibt sich als Zusammenfassung der Sätze 1 und 4 und der Beziehung  $\mathfrak{S}^n \xrightarrow{z} \mathfrak{B}^n$ :

KOROLLAR. *Wenn sich für  $n \geq 5$  jedes Simplex aus  $\mathfrak{B}_1^n$  in  $(n-3)$ -orthogonale Simplexe zerlegen läßt, dann ist jedes  $n$ -dimensionale euklidische, elliptische oder hyperbolische Simplex in Orthoscheme zerlegbar.*

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BÖHM, J. und HERTEL, E., *Polyedergeometrie in n-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung*, Mathematische Monographien, Band 14, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980. *MR 82k*: 52001b. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Band 70, Birkhäuser-Verlag, Basel—Boston—Stuttgart, 1981. *MR 82k*: 52001a.
- [2] BÖHM, J., Zur vollständigen Zerlegung der euklidischen und nichteuklidischen Tetraeder in Orthogonal-Tetraeder, *Beiträge Algebra Geom.* 9 (1980), 29—54. *MR 81m*: 52019.
- [3] BÖHM, J. und SCHWULOW, H., Eine Zerlegung von vierdimensionalen euklidischen und nicht-euklidischen Simplexen in Orthoscheme, *Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena Math.-Natur. Reihe* 31 (1982), 545—555. *MR 84d*: 52008.
- [4] HARAZIŠVILI, A. B., Orthogonal simplexes in four-dimensional space, *Sakharth. SSR Mech. Akad. Moambe* 88 (1977), 33—36 (russisch). *MR 58* # 12727.
- [5] HADWIGER, H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1957. *MR 21* # 1561.
- [6] KAISER, H., Beiträge zum Nachweis der Orthoschemzerlegbarkeit euklidischer und nichteuklidischer Simplexe, Dissertation, Friedrich-Schiller-Universität, Jena, 1983.
- [7] SCHLÄFLI, L., *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Band 1, (Theorie der vielfachen Kontinuität; aus dem Jahre 1852), Birkhäuser, Basel, 1950, S. 227 ff. *MR 11*—611.

(Eingegangen am 26. Juni 1984)

SEKTION MATHEMATIK DER  
FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT  
UNIVERSITÄTSHOCHHAUS, 17. OG.  
DDR—6900 JENA  
GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

## ON THE VOLUME OF A HYPERBOLIC SIMPLEX

J. J. SEIDEL

*To L. Fejes Tóth on the occasion of his 70th birthday*

### 1. Introduction

Gausz uses the word 'jungle' in relation to volumes in non-Euclidean spaces, cf. Fejes Tóth [4], p. 301. This may refer to the highly complicated transcendental methods involved. The present paper states some facts and some speculations which point at a different direction. However, we do not present explicit solutions for existing problems.

The basic fact is that the  $n$  points of any hyperbolic  $(n-1)$ -simplex are uniquely represented by a nonnegative doubly stochastic symmetric matrix of order  $n$ . This suggests a function of this matrix as a more algebraic expression for the volume of a hyperbolic simplex. The resemblance of recent results on simplices with maximum volume, and on the van der Waerden conjecture suggest a rôle for the permanent in the definition of volume. This idea is supported by certain connections between exterior and symmetric algebra. Perhaps there are relations with Poincaré's formula.

We do not present a coherent theory of volume. But maybe our facts and speculations contribute some material (of an algebraic and combinatorial nature) for the construction of a passable road through the jungle mentioned above.

### 2. Hyperbolic geometry

Lorentz space  $\mathbf{R}^{1,n}$  is the vector space of dimension  $n+1$  over the reals provided with the inner product

$$(x, y) = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \dots - x_n y_n,$$

for vectors  $x = (x_0; x_1, x_2, \dots, x_n)$ , etc. The lines  $\langle a \rangle$  through the origin are of three types: positive (timelike), negative (spacelike), and isotropic, according to the sign of  $(a, a)$ . We say that they are inside, outside and on the light cone

$$\{x \in \mathbf{R}^{1,n} \mid x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\},$$

respectively. The halflines, halfplanes, etc., inside one nappe of the light cone are the points, lines, etc. of the Bolyai–Lobatschewski space  $A^n$  of dimension  $n$ . The distance  $d_{A,B}$  between the points  $A = \langle a \rangle$  and  $B = \langle b \rangle$  is defined by

$$\cosh d_{A,B} = \frac{(a, b)}{\sqrt{(a, a)(b, b)}}.$$

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 51M10; Secondary 51M25.

*Key words and phrases*. Hyperbolic geometry, volume.

The ideal points of  $A^n$  are the lines on the light cone. The  $n+1$  points of a simplex  $S_n$  in  $A^n$ , ideal or not, may be represented by  $n+1$  independent vectors on or in one nappe of the light cone. These vectors have a Gram matrix  $A$ , all of whose entries are positive, apart from possible zeros on the diagonal (cf. [13], Theorems 2.3 and 5.1). Any one of these vectors may be multiplied by a positive real number and still represent its hyperbolic point. Hence the simplex is represented by the whole class  $DAD$  of Gram matrices, where  $D$  runs through the set of all positive diagonal matrices. The question arises whether this class has any interesting representatives. Indeed, in our case we may apply the well-known  $DAD$ -theorem, which is originally due to Sinkhorn [14]. This says that there exists a unique diagonal matrix  $D$  such that  $DAD$  is doubly stochastic (nonnegative, and all row sums and column sums equal to 1).

**FACT 1.** *Any  $n$ -simplex in  $A^n$  is uniquely represented by a set of  $n+1$  spanning vectors whose Gram matrix is doubly stochastic.*

Whatever volume means, each simplex is contained in an ideal simplex (all vertices are ideal) having a larger volume. Therefore, we shall concentrate on an ideal simplex. It is uniquely represented by a doubly stochastic Gram matrix with zero diagonal and positive entries elsewhere.

There are other interesting representations of an ideal  $n$ -simplex as well. Indeed, for any  $1 \leq k \leq n+1$  the class  $DAD$  contains a unique matrix  $K$  whose  $k$ th row and column have all entries equal to 1, apart from the  $(k, k)$ -entry 0. This  $K$  is the Cayley—Menger distance matrix [13] of  $n$  independent points in Euclidean  $(n-1)$ -space which are obtained from the lines in  $A^n$  connecting the  $k$ th with the remaining ideal points. Passing from one ideal point  $k$  with distance matrix  $K$  to any other ideal point  $l$  with distance matrix  $L$  amounts to inversion. Indeed, the  $n+1$  ideal points in  $A^n$  correspond to  $n+1$  points of Möbius  $(n-1)$ -space (the inversive  $(n-1)$ -space). We consider a few examples.

In the hyperbolic plane  $A^2$  all ideal triangles are congruent modulo isometries.

Indeed, suppose the vertices of an ideal triangle are spanned by the independent isotropic vectors  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$  which have the following positive inner products

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = c, \quad (\mathbf{p}, \mathbf{r}) = b, \quad (\mathbf{q}, \mathbf{r}) = a.$$

Then  $ap, bq, cr$ , divided by  $\sqrt{abc}$ , have mutual inner products equal to 1, hence

$$\begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

In Lorentz space  $\mathbf{R}^{1,3}$  with the inner product

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$$

the Gram matrix of the independent isotropic vectors  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$  may be taken as

follows, for suitable choice of  $\lambda\mathbf{p}$ ,  $\mu\mathbf{q}$ ,  $\varrho\mathbf{r}$ ,  $\sigma\mathbf{s}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1/bc & 1/ac & 1/ab \\ 1/bc & 0 & 1/ab & 1/ac \\ 1/ac & 1/ab & 0 & 1/bc \\ 1/ab & 1/ac & 1/bc & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

These matrices have signature (1, 3), and

$$\det A = -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) < 0,$$

$$\text{per } A = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Hence the positive numbers  $a, b, c$  satisfy the triangle inequality. In fact, by stereographic projection from  $\langle \mathbf{p} \rangle$  it is seen that the planes  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{s} \rangle$  constitute the vertices  $Q, R, S$  of a Euclidean triangle with sides  $a, b, c$ . As a consequence, any ideal hyperbolic 3-simplex has equal opposite dihedral angles  $\alpha, \beta, \gamma$  with  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

### 3. Volumes

We now turn to the notion of volume  $\text{Vol}(S_n)$  of a hyperbolic  $n$ -simplex  $S_n$  in  $A^n$ . Usually volume is defined and calculated as an integral over a region in a model. For instance, in the Poincaré half space we have

$$\text{Vol}(S_n) = \int \dots \int \frac{dx_1 \dots dx_n}{x_n^n},$$

integrated over the model of the  $n$ -simplex  $S_n$ , cf. [5], [9]. Another method, due to E. Schmidt, cf. [2], [15], considers the integral of the function  $\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}, \mathbf{x})\right)$  over the cone  $B\mathbf{x} \geq 0$  in  $\mathbf{R}^{1, n-1}$ , and uses polar coordinates to derive

$$\sqrt{|\det A|} \int_{\mathbf{y} \geq 0} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^t A \mathbf{y}\right) d\mathbf{y} = \text{Vol}(S_{n-1}) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2} \varrho^2\right) \varrho^{n-1} d\varrho.$$

Here we took  $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$  and  $BB^t = A^{-1}$ . The integral on the right-hand side equals  $2^{(1/2)n-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)$ . This explains why volumes in non-Euclidean spaces are important for statistics. Indeed [11], the left-hand side is the orthant probability for the multivariate distribution with zero means and covariance matrix  $BB^t$ . In these methods one encounters integrals which cannot be expressed in elementary functions. This refers to the functions of Lobatchewski and Schläfli, and to polylogarithms, hyperlogarithms, etc., cf. [1], [2], [3].

**FACT 2.** *The knowledge about  $\text{Vol}(S_n)$  is mainly expressed in terms of transcendental functions.*

For example, the volume of an ideal tetrahedron in  $A^3$  equals

$$\text{Vol}(S_3) = \Pi(\alpha) + \Pi(\beta) + \Pi(\gamma),$$

cf. [9], where  $\Pi(z)$  is the function of Lobatschewski, and  $\alpha, \beta, \gamma$  are the equal opposite dihedral angles of the ideal tetrahedron, which we encountered earlier.

**SPECULATION 1.**  *$\text{Vol}(S_n)$  should be expressed in terms of the unique doubly stochastic Gram matrix of Fact 1.*

Recently, hyperbolic geometry started a second phase in its existence [9]. One reason for the revived interest was Thurston's work on hyperbolic 3-manifolds, cf. [10]. In this connection Gromov gave a proof of Mostow's rigidity theorem, which also works for dimension  $n > 3$  provided the following is true. This now may be stated as a fact, since Thurston's conjecture has been proved by Haagerup, Munkholm [5].

**FACT 3.** *In hyperbolic  $n$ -space  $\text{Vol}(S_n)$  is maximal if and only if  $S_n$  is an ideal and regular simplex.*

An ideal regular simplex has Gram matrix  $J_{n+1} - I_{n+1}$ . The proof of this theorem uses the transcendental methods referred to above. In view of Speculation 1 we propose:

**SPECULATION 2.** *There should be an algebraic proof for Fact 3.*

Fact 3 deals with an extremal property of doubly stochastic matrices of a special kind. This makes one think of van der Waerden's conjecture, which was recently proved by Egoritsjev and by Falikman cf. [8].

**FACT 4.** *The permanent of a doubly stochastic  $n \times n$  matrix attains a unique minimum for the matrix  $\frac{1}{n}J_n$ .*

Here  $J_n$  denotes the  $n \times n$  matrix having all entries 1. The following similar open question is relevant to our subject.

**SPECULATION 3.** *Let  $Z_n$  denote the class of all  $n \times n$  symmetric matrices which have zero diagonal and positive entries elsewhere. Then  $\frac{1}{n-1}(J_n - I_n)$  is the unique matrix for which the permanent of the matrices from  $Z_n$  attains its minimum value.*

The question remains what the permanent of a matrix from  $Z_n$  in Speculation 3 has to do with the volume of an ideal simplex  $S_{n-1}$ . Clearly, the unique doubly stochastic Gram matrix  $A$  of the  $(n-1)$ -simplex belongs to the class  $Z_n$ .

However, the natural function to be used in relation to volume seems to be the determinant of  $A$ . Yet, we have a feeling that also the permanent of  $A$  should be involved.

**SPECULATION 4.** *The volume of an ideal simplex depends on both the determinant and the permanent of its unique Gram matrix  $A$ . It is increasing in  $|\det A|$ , and decreasing in  $\text{per } A$ .*

This speculation is proposed not only because it would fit into the earlier Facts and Speculations. It is also supported by certain connections between the exterior algebra  $E(V)$  and the symmetric algebra  $S(V)$  of a vector space  $V$ . From [7] we quote:



FACT 5.

$$\left( \sum_{k=0}^n (-t)^k E_k(V) \right) \left( \sum_{k=0}^n t^k S_k(V) \right) = 1.$$

There is a similar result in terms of matrices. To explain it, we need some notation. Let  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  denote a vector from  $\mathbb{Z}_+^n$  in the exterior, and from  $\mathbb{N}^n$  in the symmetric case. We write  $|\mathbf{k}| := k_1 + \dots + k_n$ . For  $|\mathbf{k}| = |\mathbf{1}| = k$ , let  $A(\mathbf{k}, \mathbf{1})$  denote the  $k \times k$  matrix which is obtained from the  $n \times n$  matrix  $A$  by repeating  $k_i$  times row  $i$ , and  $l_j$  times column  $j$ , for  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Finally let  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  denote the eigenvalues of  $A$ .

The  $k$ th exterior power  $E_k(A)$ , of size  $\binom{n}{k}$ , has the entries  $\det A(\mathbf{k}, \mathbf{1})$ , and the eigenvalues all elementary monomials of degree  $k$  in  $\alpha$ .

The  $k$ th symmetric power  $S_k(A)$ , of size  $\binom{n+k-1}{k}$ , has the entries  $\det A(\mathbf{k}, \mathbf{1}) / \sqrt{\mathbf{k}! \mathbf{1}!}$ , and the eigenvalues all homogeneous monomials of degree  $k$  in  $\alpha$ . Now Fact 6 follows from eigenvalue considerations:

FACT 6.

$$\det(I + tA) = \sum_{k=0}^n t^k \text{trace } E_k(A) = \sum_{\mathbf{k}} t^{|\mathbf{k}|} \det A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$$

$$\det^{-1}(I - tA) = \sum_{k=0}^n t^k \text{trace } S_k(A) = \sum_{\mathbf{k}} t^{|\mathbf{k}|} \frac{\text{per } A(\mathbf{k}, \mathbf{k})}{\mathbf{k}!}.$$

For the doubly stochastic Gram matrix  $A$  of a simplex in  $\mathbb{A}^{n-1}$  the first formula, for  $t = -1$ , yields

$$0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{|\mathbf{k}|=k} \det A(\mathbf{k}, \mathbf{k}).$$

**SPECULATION 5.** *The formulae of Fact 6 should be compared and confronted with the reduction formulae for volume by Poincaré and Schläfli.*

We recall Poincaré's formula for the spherical case, cf. [2], [15], [16]. Let  $\Omega$  denote the sphere in  $\mathbb{R}^n$  which has total volume 1. On  $\Omega$  a spherical  $(n-1)$ -simplex is given as the intersection of  $n$  halfspheres, which are denoted by their characteristic functions  $h_1, h_2, \dots, h_n$ . By reflection in the centre of  $\Omega$  we infer

$$\int_{\Omega} h_1 h_2 \dots h_n d\omega = \int_{\Omega} (1-h_1)(1-h_2) \dots (1-h_n) d\omega,$$

which implies:

FACT 7. *For a spherical  $(n-1)$ -simplex*

$$V_k := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \int_{\Omega} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} d\omega$$

satisfies:

$$V_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k V_k,$$

hence

$$V_{2m-1} = \sum_{k=1}^m V_{2m-2k} B_{2k} (2^{2k} - 1) k^{-1}.$$

Thus for odd  $n$  Poincaré's formula expresses volume  $V_n$  in the so-called generalized angle sums  $V_k$  of lower even dimensions. This is made precise in terms of the Bernoulli numbers  $B_{2k}$  by the second formula due to Schläfli. However, for even  $n$  things are more complicated, and volume is expressed by hyperlogarithmic functions and generalized hypergeometric series, cf. [1].

For the volume of a hyperbolic simplex there exist similar formulae and expressions. The generalized angle sums  $V_k$  need an adapted definition, and there are some sign changes. These formulae for the hyperbolic case follow from those for the spherical case by analytic continuation with respect to the (constant) curvature  $k$ , which is positive, zero, negative in the spherical, Euclidean, hyperbolic case, cf. [6] Satz III p. 138, [1] §5, [2] pp. 212, 263. It seems to us, also in view of Speculation 5, that hyperbolic geometry deserves its own proofs:

SPECULATION 6. *Volume of a hyperbolic simplex should be treated by intrinsic hyperbolic methods.*

#### REFERENCES

- [1] AOMOTO, K., Analytic structure of Schläfli function, *Nagoya Math. J.* **68** (1977), 1—16. *MR* **58** # 27972.
- [2] BÖHM, J. and HERTEL, E., *Polyedergeometrie in  $n$ -dimensionalen Räumen konstanter Krümmung*, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. 70, Birkhäuser-Verlag, Basel—Boston, 1981. *MR* **82k**: 52001a.
- [3] COXETER, H. S. M., The functions of Schläfli and Lobatschewsky, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **6** (1935), 13—29. *Zbl* **11**. 170 (also pp. 3—20 in H. S. M. Coxeter, *Twelve geometric essays*, Southern Illinois University Press, Carbondale, Ill.; Feffer & Simons, Inc., London—Amsterdam, 1968. *MR* **46** # 9843).
- [4] FEJES TÓTH, L., *Reguläre Figuren*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965. *MR* **30** # 3408.
- [5] HAAGERUP, U. and MUNKHOLM, H. J., Simplices of maximal volume in hyperbolic  $n$ -space, *Acta Math.* **147** (1981), 1—11. *MR* **82j**: 53116.
- [6] HOPF, H., Die Curvatura integra Clifford—Kleinscher Raumformen, *Nachr. Gesellsch. Wiss. Göttingen*, 1926, 134—141.
- [7] LANG, S., *Algebra*, Addison—Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1965. *MR* **33** # 5416.
- [8] LINT, J. H. VAN, The van der Waerden conjecture: two proofs in one year, *Math. Intelligencer* **4** (1982), 72—77. *MR* **83k**: 15008.
- [9] MILNOR, J. W., Hyperbolic geometry: the first 150 years, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* **6** (1982), 9—24. *MR* **82m**: 57005.
- [10] MUNKHOLM, H. J., Simplices of maximal volume in hyperbolic space, Gromov's norm, and Gromov's proof of Mostow's rigidity theorem (following Thurston), *Topology Symposium, Siegen, 1979* (Proc. Sympos., Univ. Siegen, Siegen, 1979), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 788, Springer-Verlag, Berlin, 1980, 109—124. *MR* **81k**: 53046.
- [11] RUBEN, H., The moments of the order statistics and of the range in samples from normal populations, *Contribution to order statistics*, ed. by A. E. Sarhan, B. G. Greenberg, Wiley, 1962, 165—190.
- [12] SAH, C. H., *Hilbert's third problem: scissors congruence*, Research Notes in Math. **33**, Pitman (Advanced Publishing Program), San Francisco—London, 1979. *MR* **81g**: 51011.
- [13] SEIDEL, J. J., Angles and distances in  $n$ -dimensional euclidean and non-euclidean geometry I, II, III, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **58** (= *Indag. Math.* **17**) (1955), 329—335, 336—340, 535—541. *MR* **17**—402.
- [14] SINKHORN, R., A relationship between arbitrary positive matrices and doubly stochastic matrices, *Ann. Math. Statist.* **35** (1964), 876—879. *MR* **28** # 5072.

- [15] WEISSBACH, B., Die Reduktionsformeln von Poincaré und Schläfli, *Enseignement Math.* (2) **16** (1970), 307—310. *MR* **44** # 4614.
- [16] WITT, E., Rekursionsformel für Volumina sphärischer Polyeder, *Arch. Math.* **1** (1949), 317—318. *MR* **11**—87.

(Received June 26, 1984)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND  
COMPUTING SCIENCE  
TECHNICAL UNIVERSITY EINDHOVEN  
POSTBUS 513  
NL—5600 MB EINDHOVEN  
THE NETHERLANDS



## PACKING AND COVERING WITH CONVEX DISCS

A. FLORIAN

*To my friend Professor L. Fejes Tóth on his 70<sup>th</sup> birthday*

By a *convex disc* we mean a convex compact subset of the Euclidean plane with non-empty interior. Let  $\mathcal{C}(a, A)$  denote the class of all convex discs of area not greater than a given constant  $a$  and affine perimeter not less than a given constant  $A$ . What is the densest packing and what is the most economical covering of the plane by discs from  $\mathcal{C}(a, A)$ ?

In [10] L. Fejes Tóth and the author solved both problems for a particular subclass of  $\mathcal{C}(a, A)$ , in the case of covering making the assumption that any two discs intersect simply (see below). In the present paper we shall establish the solution to both problems for the entire class  $\mathcal{C}(a, A)$ , in the case of covering on the same assumption of simple intersecting. The solutions will immediately follow from two general theorems concerning the packing and covering of a convex hexagon by convex discs. These theorems (1 and 2) form the main result of this paper. Finally, we shall show that the answer to the above questions for the whole class  $\mathcal{C}(a, A)$  can also be obtained by slightly modifying the arguments used in [10]. This result, however, does not lead to Theorem 1 and Theorem 2.

Analogous problems involving the ordinary perimeter instead of the affine perimeter are investigated in several publications [3, 6, 7, 11, 12].

### § 1. Affine length of a curve

The affine length of a curve is an additive measure of arc which is invariant under affine area-preserving transformations. It was introduced by G. Pick and W. Blaschke [2, § 4] in two different ways. If the curve  $AB$  is rectifiable and the curvature  $\kappa$  of the curve at a point  $P$  is a continuous function of the ordinary length  $s$  of the arc  $AP$ , then the affine length of the curve is defined by  $\int |\kappa|^{1/3} ds$ . The alternative definition, which was also adopted by L. Fejes Tóth [5, 8], makes use of chains of triangles covering  $AB$  and introduces the affine length as a limit. Blaschke proved, under certain assumptions on the regularity of the curve, the existence of this limit and the equivalence of the definitions.

For the sake of completeness we define the affine length of an arbitrary convex arc following the second way indicated above. A closed connected subset of the boundary of a convex disc is simply called an *arc*. Let  $AB=b$  be an arc on the

boundary of a convex disc  $C$ . We dissect  $b$  by a finite sequence of points

$$(1) \quad A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$$

into  $n$  sub-arcs  $P_{j-1}P_j$  ( $j=1, \dots, n$ ), allowing  $P_{j-1}=P_j$ . We shall frequently refer to the points  $P_j$  as points of dissection. Let  $s_j$  be a support line and  $\mathbf{u}_j$  the corresponding outer normal vector of  $C$  at  $P_j$ , where possibly  $s_{j-1}=s_j$  if  $P_{j-1} \neq P_j$ . We choose  $P_1, \dots, P_{n-1}$  and  $s_0, \dots, s_n$  so that the outer normal vectors at the points of the arc  $P_{j-1}P_j$  form a cone bounded by  $\mathbf{u}_{j-1}$  and  $\mathbf{u}_j$  and having aperture less than  $\pi$ , for  $j=1, \dots, n$ . Then the following two requirements are satisfied for  $j=1, \dots, n$ :

- (i)  $s_{j-1}$  and  $s_j$  have a point  $T_j$  in common;
- (ii) the arc  $P_{j-1}P_j$  is contained in the triangle  $\Delta_j = P_{j-1}P_jT_j$ .

In this case we call  $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  a *chain of triangles covering the arc  $b$* . Let  $\Delta_j$  denote also the area of  $\Delta_j$ . We define the *affine length* of the arc  $b$  by

$$(2) \quad \lambda(b) = \inf \sum_{j=1}^n 2\Delta_j^{1/3},$$

where the infimum extends over all chains of triangles covering  $b$ . Obviously, we have

$$0 \leq \lambda(b) < \infty$$

for any arc  $b$ . If  $b$  consists of a finite number of straight segments, then  $\lambda(b)=0$ . From the definition it follows that the affine length of an arc is invariant under affine area-preserving transformations.

Let  $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  be a chain of triangles covering  $b$ ; that means that the conditions (i) and (ii) are satisfied. We obtain a new chain of triangles covering  $b$  by the addition of a finite number of new points of dissection and corresponding support lines to  $\{P_0, \dots, P_n\}$  and  $\{s_0, \dots, s_n\}$ , respectively. Let  $\{\Delta'_1, \dots, \Delta'_m\}$  be the new chain which we may call a *refinement* of  $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ . The repeated application of a known inequality [2, § 16] shows that

$$(3) \quad \sum_{j=1}^m 2\Delta'_j{}^{1/3} \leq \sum_{j=1}^n 2\Delta_j{}^{1/3}.$$

From (3) it follows easily that

$$(4) \quad \lambda(b) = \lambda(b_1) + \lambda(b_2),$$

if  $b$  is the union of the non-overlapping sub-arcs  $b_1$  and  $b_2$ .

If  $\varepsilon > 0$  is given, there is a chain of triangles covering  $b$ , say  $\bar{K} = \{\bar{\Delta}_1, \dots, \bar{\Delta}_k\}$ , such that

$$(5) \quad \sum_{j=1}^k 2\bar{\Delta}_j{}^{1/3} - \lambda(b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Let now  $K = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  be a chain of triangles covering  $b$ , where

$$(6) \quad \max_{1 \leq j \leq n} \Delta_j < \left( \frac{\varepsilon}{4(k+1)} \right)^3.$$



Let  $K' = \{\Delta'_1, \dots, \Delta'_m\}$  be a chain of triangles whose points of dissection are points of dissection of  $K$ , or of  $\bar{K}$ , or of both. Since  $K'$  is a refinement of  $\bar{K}$ ,  $K'$  also covers  $b$ , and we have by (3) and (5)

$$(7) \quad \sum_{j=1}^m 2\Delta_j'^{1/3} - \lambda(b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$K'$  is formed from  $K$  by the successive addition of at most  $k+1$  points of dissection and of the corresponding support lines. Since the process of refining does not increase  $\max \Delta_j$ , we see that

$$(8) \quad \sum_{j=1}^n 2\Delta_j^{1/3} - \sum_{j=1}^m 2\Delta_j'^{1/3} \leq 2(k+1) \left( \max_{1 \leq j \leq n} \Delta_j \right)^{1/3}.$$

Hence, by (6) and (8),

$$(9) \quad \sum_{j=1}^n 2\Delta_j^{1/3} - \sum_{j=1}^m 2\Delta_j'^{1/3} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

From (7) and (9) we obtain the inequality

$$(10) \quad \sum_{j=1}^n 2\Delta_j^{1/3} - \lambda(b) < \varepsilon,$$

whenever (6) is satisfied. This result can be restated in the following form: Let  $(K_1, K_2, \dots)$  be an infinite sequence of chains of triangles covering  $b$ , where

$$K_r = \{\Delta_1^{(r)}, \dots, \Delta_{n_r}^{(r)}\}.$$

Let us further assume that the condition

$$(11) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq n_r} \Delta_j^{(r)} = 0$$

is satisfied. Then

$$(12) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_r} 2\Delta_j^{(r)1/3} = \lambda(b),$$

which establishes the existence of the limit mentioned in the introduction. A sequence of chains  $(K_1, K_2, \dots)$  having the property (11) may be obtained in the following way: Let  $P_j^{(r)}$  and  $u_j^{(r)}$  ( $j=0, \dots, n_r$ ) be the points of dissection and the outer normal vectors corresponding to  $K_r$ , and let  $\gamma_r = \max_{1 \leq j \leq n_r} \angle u_j^{(r)} u_1^{(r)}$ . We choose  $P_j^{(r)}$  and  $u_j^{(r)}$  so that

$$(13) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_r = 0.$$

If the disc  $C$  has diameter  $d$ , then

$$\max_{1 \leq j \leq n_r} \Delta_j^{(r)} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{d}{\cos \frac{\gamma_r}{2}} \right)^2 \sin \gamma_r.$$

Thus (11) is in fact a consequence of (13).

The affine length of the whole boundary of a convex disc  $C$  is called the *affine perimeter* of  $C$ . If  $a$  is the area and  $A$  the affine perimeter of  $C$ , then we have the "isoperimetric inequality" discovered by Blaschke [2, § 26]

$$(14) \quad A^3 \leq 8\pi^2 a$$

with equality only for the ellipses. A proof of (14) which is based on the relation (12) was given by L. Fejes Tóth [5, 8].

## § 2. Theorems and lemmas

Before stating our main results, let us introduce some notions. Let  $A$  be an affinely regular  $k$ -gon. Let  $B$  be the  $k$ -gon the vertices of which are the midpoints of the sides of  $A$ . We define a *regular conic- $k$ -gon* to be a convex disc bounded by  $k$  affinely equivalent arcs of a conic joining consecutive vertices of  $B$  and touching the respective sides of  $A$ . We call  $A$  the *case* and  $B$  the *kernel* of the conic- $k$ -gon. The conic- $k$ -gons with case  $A$  and kernel  $B$  form an array joining  $A$  and  $B$ . The array contains an ellipse  $E$ . The members of the array between  $B$  and  $E$  are said to be *elliptic*, and those between  $E$  and  $A$  *hyperbolic*. The ellipse  $E$  is considered to be both elliptic and hyperbolic.

Let  $C_1, \dots, C_n$  be convex discs of areas  $a_1, \dots, a_n$ , and let  $R$  denote a region and its area. The *density* of  $\{C_1, \dots, C_n\}$  relative to  $R$  is defined by the ratio  $(a_1 + \dots + a_n)/R$ .

We shall say that two convex discs  $C_1$  and  $C_2$  *intersect simply* if they satisfy one of the following conditions [1]:

- (i)  $C_1$  and  $C_2$  have no inner point in common;
- (ii) one of them is completely contained in the other; or
- (iii)  $C_1$  and  $C_2$  overlap, and the boundary of their intersection can be split up into two non-overlapping connected arcs, one belonging to the boundary of  $C_1$  and the other to that of  $C_2$ .

A convex polygon with at most six sides is simply called a hexagon.

We then have the following theorems.

**THEOREM 1.** *Let the convex discs  $C_1, \dots, C_n$  of average area  $(a_1 + \dots + a_n)/n = \bar{a}$  and average affine perimeter  $(A_1 + \dots + A_n)/n = \bar{A}$  form a packing in a hexagon  $H$ . Then the density of  $\{C_1, \dots, C_n\}$  relative to  $H$  is not greater than the density of a regular hyperbolic conic-hexagon of area  $\bar{a}$  and affine perimeter  $\bar{A}$  relative to its case.*

**THEOREM 2.** *Let the convex discs  $C_1, \dots, C_n$  of average area  $\bar{a}$  and average affine perimeter  $\bar{A}$  form a covering of a hexagon  $H$  such that any two discs intersect simply. Then the density of  $\{C_1, \dots, C_n\}$  relative to  $H$  is not less than the density of a regular elliptic conic-hexagon of area  $\bar{a}$  and affine perimeter  $\bar{A}$  relative to its kernel.*

These bounds for the density of a packing or a covering can be attained for  $n=1$  and approximated for large values of  $n$ . Note that they depend only on the ratio  $\bar{A}^3/\bar{a}$  and that  $\bar{A}^3/\bar{a} \leq 8\pi^2$ , in view of (14).

The proofs rest on several lemmas.

LEMMA 1. Let  $\{C\}$  be the class of convex discs of area  $a$  and affine perimeter not less than  $A$ , where  $0 < A \leq 2\pi^{2/3}a^{1/3}$ . The area of the smallest  $k$ -gon containing a disc from  $\{C\}$  attains its minimum,  $A(k, a, A)$ , if  $C$  is a regular hyperbolic conic- $k$ -gon with affine perimeter  $A$ .

LEMMA 2. The area of the greatest  $k$ -gon contained in a disc from  $\{C\}$  attains its maximum,  $B(k, a, A)$ , if  $C$  is a regular elliptic conic- $k$ -gon with affine perimeter  $A$ .

Let  $\Delta = XYZ$  be a triangle of area  $\Delta$ . We consider the conic which passes through  $X$  and  $Z$ , touches the lines  $XY$  and  $YZ$ , and bounds, together with the straight segment  $XZ$ , a segment of area  $q\Delta$ . Proceeding from (12), we can evaluate the affine length  $\lambda$  of the arc  $XZ$  of the conic in the form [5, 8]

$$\lambda = 2\Delta^{1/3}\Phi^{1/3}(q),$$

where  $\Phi(q)$  is given by the parametric equations

$$(15) \quad \Phi(q) = \frac{\alpha^3 \cos \alpha}{\sin^3 \alpha}, \quad q = \frac{(2\alpha - \sin 2\alpha) \cos \alpha}{2 \sin^3 \alpha} \quad (0 < \alpha \leq \pi/2),$$

for  $0 \leq q < 2/3$ ,

$$(16) \quad \Phi(q) = \frac{\beta^3 \cosh \beta}{\sinh^3 \beta}, \quad q = \frac{(\sinh 2\beta - 2\beta) \cosh \beta}{2 \sinh^3 \beta} \quad (0 < \beta < \infty),$$

for  $2/3 < q < 1$ ,  $\Phi(2/3) = 1$ , and  $\Phi(1) = 0$ . There is a one-to-one correspondence between the family of arcs of a conic and the values of  $q$  from  $(0, 1)$ . The values  $q = 0$  and  $q = 1$  correspond to the straight segment  $XZ$  and the polygon  $XYZ$ , respectively.

We now consider a regular conic- $k$ -gon  $a_q$  with area  $a_q$ , case  $A$  and kernel  $B$ , such that  $a_q = B + (A - B)q$ . Since  $B/A = \cos^2(\pi/k)$ ,  $a_q$  has the area

$$(17) \quad a_q = A \left( \cos^2 \frac{\pi}{k} + q \sin^2 \frac{\pi}{k} \right)$$

and the affine perimeter

$$A = 2k \left( \frac{A - B}{k} \right)^{1/3} \Phi^{1/3}(q) = 2k \left( \frac{A \sin^2 \frac{\pi}{k}}{k} \right)^{1/3} \Phi^{1/3}(q).$$

Writing  $a_q = a$ , we have

$$(18) \quad \frac{A^3}{a} = \frac{8k^2 \sin^2 \frac{\pi}{k} \Phi(q)}{\cos^2 \frac{\pi}{k} + q \sin^2 \frac{\pi}{k}}.$$

Let  $A$ ,  $a$  and  $k$  be given, where  $0 < A < 2\pi^{2/3}a^{1/3}$ ,  $k \geq 3$ . We shall show that (18) has exactly two roots,  $q_b$  and  $q_a$ , such that  $0 < q_b < q_a < 1$ . If  $A = 2\pi^{2/3}a^{1/3}$ , we have  $q_b = q_a$ . By using (17), we find the following expressions for the functions  $A(k, a, A)$  and  $B(k, a, A)$  defined by Lemma 1 and Lemma 2:

If  $a_q$  is hyperbolic, then

$$(19) \quad A(k, a, \Lambda) = A = \frac{a}{\cos^2 \frac{\pi}{k} + q_a \sin^2 \frac{\pi}{k}} = a + \frac{(1 - q_a)\Lambda^3}{8k^2 \Phi(q_a)}.$$

If  $a_q$  is elliptic, then

$$(20) \quad B(k, a, \Lambda) = B = A \cos^2 \frac{\pi}{k} = \frac{a \cos^2 \frac{\pi}{k}}{\cos^2 \frac{\pi}{k} + q_b \sin^2 \frac{\pi}{k}} = a - \frac{q_b \Lambda^3}{8k^2 \Phi(q_b)}.$$

In addition, we define

$$(21) \quad A(k, a, 0) = B(k, a, 0) = a \quad (k \geq 3, a > 0).$$

We can now state the following lemmas.

LEMMA 3.  $A(k, a, \Lambda)$  is a decreasing function of  $k$ , and a convex function of three variables, for  $k \geq 3$ ,  $a > 0$ , and  $0 \leq \Lambda \leq 2\pi^{2/3}a^{1/3}$ .

LEMMA 4.  $B(k, a, \Lambda)$  is an increasing function of  $k$ , and a concave function of three variables, for  $k \geq 3$ ,  $a > 0$ , and  $0 \leq \Lambda \leq 2\pi^{2/3}a^{1/3}$ .

### § 3. Proofs

For the proofs of Lemma 1 and Lemma 2 we refer to [9].

PROOF OF LEMMA 3. Some of the following deductions are contained in [10]. We reproduce them for the reader's convenience.

From (15) we obtain

$$(22) \quad q'(\alpha) \sin^4 \alpha = -\alpha \sin^2 \alpha - 3\alpha \cos^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha$$

and, with

$$\frac{\alpha^3 \cos \alpha}{\sin^3 \alpha} = F(\alpha),$$

$$F'(\alpha) = \alpha^2 q'(\alpha)$$

for  $0 < \alpha \leq \pi/2$ . As

$$(23) \quad q'(\alpha) < 0 \quad (0 < \alpha \leq \pi/2),$$

$q$  is a strictly decreasing function of  $\alpha$ . In view of

$$(24) \quad \Phi'(q) = \alpha^2 > 0, \quad \Phi''(q) = 2\alpha \frac{d\alpha}{dq} < 0 \quad (0 < q < 2/3),$$

$\Phi(q)$  is strictly increasing and concave on  $[0, 2/3]$ .

By applying (16) we can show in the same way that  $q'(\beta) > 0$  for  $0 < \beta < \infty$ , and that

$$(25) \quad \Phi'(q) = -\beta^2 < 0, \quad \Phi''(q) = -2\beta \frac{d\beta}{dq} < 0 \quad (2/3 < q < 1).$$

Since  $\lim_{q \rightarrow 2/3} \Phi'(q) = 0$ , we have  $\Phi'(2/3) = 0$  and  $\Phi'(q)$  is continuous on  $(0, 1)$ . Since, furthermore,  $\lim_{q \rightarrow 2/3} \Phi''(q) = -15/2$ , we see by (24) and (25) that  $\Phi''(q) < 0$  on  $(0, 1)$ . Thus  $\Phi(q)$  is strictly concave on  $[0, 1]$  and attains its maximum at  $q = 2/3$ . Note that  $\Phi''(q)$  is continuous on  $(0, 1)$ .

Let  $k \geq 3$  be fixed. The right-hand side of (18), as a function of  $q$ , assumes its maximum at the single point  $\bar{q} < 2/3$  which corresponds to  $\alpha = \pi/k$ . The maximum value of this function is  $8\pi^2$ . Thus, we have  $A^3 = 8\pi^2 a$ , and  $a_{\bar{q}}$  is an ellipse. In this case the functions (19) and (20) are reduced to  $(ak/\pi)\tan(\pi/k)$  and  $(ak/\pi)\sin(\pi/k)\cos(\pi/k)$ , the first function of  $k$  being strictly decreasing, the second strictly increasing. Let us now assume that

$$(26) \quad 0 < A^3 < 8\pi^2 a.$$

The right-hand side of (18) is strictly increasing for  $0 \leq q \leq \bar{q}$  and strictly decreasing for  $\bar{q} \leq q \leq 1$ . Hence, there are exactly two values of  $q$ ,  $q_b$  and  $q_a$ , satisfying (18) and

$$(27) \quad 0 < q_b < \bar{q} < q_a < 1.$$

In accordance with (18) we define  $q_b = 0$ ,  $q_a = 1$  for  $A = 0$ , and  $q_0 = q_a = \bar{q}$  for  $A^3 = 8\pi^2 a$ . Then  $q_b$  and  $q_a$  are continuous functions of  $k, a, A$  on the convex set

$$(28) \quad k \geq 3, \quad a > 0, \quad 0 \leq A \leq 2\pi^{2/3} a^{1/3}.$$

$A(k, a, A)$  is given by (19), where  $q_a = q(k, a, A)$  is the unique solution of

$$(29) \quad g(k, a, A, q) = 8k^2 \Phi(q) - \frac{A^3}{a} (u^2 + q) = 0$$

satisfying  $\bar{q} \leq q_a \leq 1$ , and

$$u = \cot \frac{\pi}{k}.$$

Observe that  $A(k, a, A)$  is continuous on the set (28).

We shall prove the first statement of Lemma 3 by showing that

$$(30) \quad \frac{\partial A}{\partial k} < 0$$

if (26) is satisfied.

Writing

$$(31) \quad \frac{1-q}{\Phi(q)} = f_1(q), \quad \frac{1}{8k^2} = f_2(k)$$

and

$$\frac{df_1(q)}{dq} = f_1', \quad \frac{df_2(k)}{dk} = f_2',$$

we obtain from (19)

$$\frac{A-a}{A^3} = f_1(q)f_2(k)$$

and

$$(32) \quad \frac{\partial A}{\partial k} = \frac{A^3}{g_q} (-f_1' f_2 g_k + f_1 f_2' q_k).$$

From (31) and (29) it follows that

$$(33) \quad f_2'(k) = -\frac{1}{4k^3}$$

and

$$(34) \quad g_k = \frac{16k\Phi}{u^2+q} \left[ u^2 + q - \frac{\pi}{k} u(1+u^2) \right].$$

Let us first consider the case  $q < 2/3$ . Then we have  $q = q(\alpha)$  with  $\alpha < \pi/k$ , and

$$(35) \quad f_1'(q) = -\frac{\tan \alpha}{\alpha \Phi},$$

$$(36) \quad (u^2 + q)g_q = 8k^2\alpha^2(u^2 - v^2),$$

where  $v = \cot \alpha$ . Because  $v > u$ , (36) implies that

$$(37) \quad g_q < 0.$$

From the formulae (31) to (36) we obtain that

$$(38) \quad \frac{\partial A}{\partial k} = \frac{2A^3(u^2+1)}{g_q(u^2+q)k\alpha v} \left( \alpha v - \frac{\pi}{k} u \right).$$

(30) now follows from (37) and (38), since  $x \cot x$  is strictly decreasing on  $[0, \pi/2]$ . It can be shown that (30) and (37) continue to hold for  $q \cong 2/3$ . We have only to remark that the substitution

$$(39) \quad \alpha = i\beta$$

transforms (15) into (16). By applying this transformation to (36) and (38) we immediately see that (30) and (37) remain valid.

In a similar way we obtain from (19), by means of (29), (35) and (36), that in the case  $q < 2/3$

$$(40) \quad \frac{\partial A}{\partial a} = \frac{u^2+1}{u^2-v^2}$$

and

$$(41) \quad \frac{\partial A}{\partial A} = -\frac{3A^2}{8} \frac{u^2+1}{k^2\alpha^2(u^2-v^2)}.$$

Turning to the second statement of Lemma 3, we first observe that the second derivatives of  $A$  with respect to  $k$ ,  $a$  and  $A$  are continuous at the inner points of the set given by (28). This follows from (19), (29), (37), and from the fact that  $\Phi''(q)$



is continuous on  $(0, 1)$ . Let  $M_A$  be the matrix of the second derivatives of  $A(k, a, A)$ .  $A$  will be proved to be convex on the set (28), if the following three conditions are satisfied:

- (i)  $\frac{\partial^2 A}{\partial a^2} > 0$ ;
- (ii)  $D = \frac{\partial^2 A}{\partial k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial a^2} - \left( \frac{\partial^2 A}{\partial k \partial a} \right)^2 > 0$ ;
- (iii)  $\det M_A > 0$ .

We shall prove these conditions only in the case  $q < 2/3$ . The remaining cases can be settled by applying to the result the substitution (39) and a limit process as  $\alpha \rightarrow 0$ .

By differentiating (40) and using (22) and (29) we find

$$(42) \quad \frac{\partial^2 A}{\partial a^2} = \frac{A^3}{a^2 g_q^2} \frac{16k^2 \alpha^2 v(u^2 + 1)}{(u^2 - v^2)(-\alpha - 3\alpha v^2 + 3v)},$$

which is in fact positive in view of (23).

By differentiating (32) we find, after some calculations,

$$(43) \quad (u^2 + q)^2 v g_q^2 \frac{\partial^2 A}{\partial k^2} = -16A^3 \alpha (1 + u^2)(u^2 - v^2) \times \\ \times \left\{ 3\alpha v - 6 \frac{\pi}{k} u + \left( \frac{\pi}{k} \right)^2 (1 + 3u^2) + 4 \frac{\pi}{k} uz + \frac{4\alpha v^2}{\alpha + 3\alpha v^2 - 3v} z^2 \right\}$$

and

$$(44) \quad (u^2 + q) a g_q^2 \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial k} = -16A^3 k \alpha (1 + u^2) \left\{ \frac{\pi}{k} \frac{u}{v} + \frac{2\alpha v}{\alpha + 3\alpha v^2 - 3v} z \right\},$$

where

$$z = \frac{u^2 + q - \frac{\pi}{k} u(1 + u^2)}{u^2 - v^2}.$$

Combining (42), (43), (44) and referring to (23), we obtain

$$(45) \quad (u^2 + q)^2 v g_q^4 (\alpha + 3\alpha v^2 - 3v) D = \\ = 256 \left( \frac{A^3}{a} \right)^2 k^2 (u^2 + 1)^2 \alpha^2 \left\{ 3 \left( \alpha v - \frac{\pi}{k} u \right)^2 + \alpha v \left( \frac{\pi}{k} \right)^2 \left( 1 - \frac{u^2}{v^2} \right) \right\} > 0,$$

so that  $D > 0$ .

To evaluate the determinant of  $M_A$  in a simple way, we remember that, by (19) and (29),  $A(k, a, A)$  has the form

$$A(k, a, A) = aF(k, s),$$

where

$$s = \frac{\Lambda^3}{a}, \quad F(k, s) = 1 + \frac{(1-q)s}{8k^2\Phi(q)},$$

and  $q=q(k, s)$  is given by (29). The partial derivatives of  $A$  can be expressed by those of  $F$ , for instance

$$(46) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial k} &= aF_k, & \frac{\partial A}{\partial a} &= F - \frac{\Lambda^3}{a} F_s, & \frac{\partial A}{\partial \Lambda} &= 3\Lambda^2 F_s, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial k^2} &= aF_{kk}, & \frac{\partial^2 A}{\partial a^2} &= \frac{\Lambda^6}{a^3} F_{ss}, \dots \end{aligned}$$

If we expand the determinant of  $M_A$  with respect to the third column and make use of (46) we obtain

$$(47) \quad \det M_A = 6\Lambda DF_s - 9 \frac{\Lambda^4}{a} F_s^2 F_{ss}.$$

By using (46), (38), (41), (42) and (45) we find the following final form for  $\det M_A$ :

$$(48) \quad (u^2 + q)^2 v^2 g_q^4 (\alpha + 3\alpha v^2 - 3v) \det M_A = 192 \frac{\Lambda^7}{a^2} \alpha \left( \frac{\pi}{k} \right)^2 (u^2 + 1)^3.$$

Thus, condition (iii) is satisfied, too. This completes the proof of Lemma 3.

**PROOF OF LEMMA 4.** Since the proof of Lemma 4 is rather similar to that of Lemma 3, we can now be more brief.

The function  $B(k, a, \Lambda)$  is given by (20), where  $q_b = q(k, a, \Lambda)$  is the unique solution of (29) satisfying  $0 \leq q_b \leq \bar{q}$ . Observe that  $B(k, a, \Lambda)$  is continuous on the set (28).

We shall prove the first statement of Lemma 4 by showing that

$$(49) \quad \frac{\partial B}{\partial k} > 0,$$

if (26) is satisfied.

Writing

$$(50) \quad -\frac{q}{\Phi(q)} = \tilde{f}_1(q), \quad \frac{1}{8k^2} = f_2(k),$$

we obtain from (20)

$$\frac{B-a}{\Lambda^3} = \tilde{f}_1(q)f_2(k)$$

and

$$(51) \quad \frac{\partial B}{\partial k} = \frac{\Lambda^3}{g_q} (-\tilde{f}_1' f_2 g_k + \tilde{f}_1 f_2' g_q).$$

Since in the case of covering  $\alpha > \pi/k$ , we have  $v < u$ . Thus, by (36),

$$(52) \quad g_q > 0.$$

From (34), (36), (50) and (51) we deduce that

$$(53) \quad \frac{\partial B}{\partial k} = \frac{2A^3 \pi u(u^2 + 1)}{g_q(u^2 + q)k^2} \left[ \frac{\sin(2\pi/k)}{2\pi/k} - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right],$$

which implies (49), since  $\sin x/x$  is strictly decreasing for  $0 \leq x \leq \pi$ . Similarly we find

$$(54) \quad \frac{\partial B}{\partial a} = \frac{u^2}{u^2 - v^2}$$

and

$$(55) \quad \frac{\partial B}{\partial A} = -\frac{3A^2}{8} \frac{u^2}{k^2 \alpha^2 (u^2 - v^2)}.$$

We proceed to prove the second part of Lemma 4. Let  $M_B$  be the matrix of the second derivatives of  $B$ . To prove that  $B(k, a, A)$  is concave on the set (28) it is sufficient to show that the following three conditions are satisfied at each inner point of (28):

$$(i) \quad \frac{\partial^2 B}{\partial a^2} < 0;$$

$$(ii) \quad \bar{D} = \frac{\partial^2 B}{\partial k^2} \frac{\partial^2 B}{\partial a^2} - \left( \frac{\partial^2 B}{\partial k \partial a} \right)^2 > 0; \text{ and}$$

$$(iii) \quad \det M_B < 0.$$

By differentiating (54) we obtain

$$(56) \quad \frac{\partial^2 B}{\partial a^2} = \frac{A^3}{a^2 g_q^2} \frac{16k^2 \alpha^2 v u^2}{(u^2 - v^2)(-\alpha - 3\alpha v^2 + 3v)},$$

which is negative in view of (23). Differentiation of (51) yields

$$(57) \quad \begin{aligned} (u^2 + q)^2 g_q^2 \frac{\partial^2 B}{\partial k^2} &= 16A^3 (u^2 - v^2) \alpha \sin \alpha \cos \alpha \times \\ &\times \left\{ -3 \frac{\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} u^2 + 6 \frac{\pi}{k} u(1 + u^2) - \left( \frac{\pi}{k} \right)^2 (1 + u^2)(1 + 3u^2) - \right. \\ &\left. - 4 \frac{\pi}{k} u(1 + u^2) z - 4 \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{u^2}{\alpha + 3\alpha v^2 - 3v} z^2 \right\} \end{aligned}$$

and

$$(58) \quad \begin{aligned} (u^2 + q) a g_q^2 \frac{\partial^2 B}{\partial k \partial a} &= -16A^3 k u \alpha \cos \alpha \times \\ &\times \left\{ \frac{\pi}{k} (1 + u^2) \sin \alpha + \frac{2\alpha}{\sin \alpha} \frac{u}{\alpha + 3\alpha v^2 - 3v} z \right\}, \end{aligned}$$

taking  $z$  as in (43) and (44). The required property (ii) follows if we combine (56), (57), (58) and refer to (23):

$$(59) \quad (u^2 + q)^2 g_q^4 (\alpha + 3\alpha v^2 - 3v) \bar{D} = 256 \left( \frac{\Lambda^3}{a} \right)^2 k^2 u^2 \alpha^2 \sin \alpha \cos^3 \alpha \times \\ \times \left\{ 3u^2 \left[ \frac{2\pi/k}{\sin(2\pi/k)} - \frac{2\alpha}{\sin 2\alpha} \right]^2 + 2 \left( \frac{\pi}{k} \right)^2 \frac{(1+u^2)(u^2-v^2)}{1+v^2} \frac{\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right\} > 0.$$

To evaluate  $\det M_B$  we recall that, by (20),  $B(k, a, \Lambda)$  has the form

$$B(k, a, \Lambda) = a \bar{F}(k, s),$$

where

$$s = \frac{\Lambda^3}{a}, \quad \bar{F}(k, s) = 1 - \frac{qs}{8k^2 \Phi(q)}$$

and  $q = q(k, s)$  is given by (29). The partial derivatives of  $B$  can be expressed by those of  $\bar{F}$ , according to the relations (46). Similarly, as in the proof of Lemma 3, we find

$$(60) \quad \det M_B = 6\Lambda \bar{D} \bar{F}_s - 9 \frac{\Lambda^4}{a} \bar{F}_k^2 \bar{F}_{ss}.$$

Hence, by (46), (53), (55), (56) and (59)

$$(61) \quad (u^2 + q)^2 g_q^4 (\alpha + 3\alpha v^2 - 3v) \det M_B = \\ = -384 \frac{\Lambda^7}{a^2} \left( \frac{\pi}{k} \right)^2 u^4 (u^2 + 1) \alpha \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha < 0.$$

Thus  $\det M_B < 0$  showing that also (iii) is satisfied. This completes the proof of Lemma 4.

**PROOF OF THEOREM 1.** Let  $C_1, \dots, C_n$  be convex discs as in Theorem 1. We use the known technique [4, 8] of expanding  $C_1, \dots, C_n$  so as to obtain non-overlapping convex polygons  $P_1, \dots, P_n$  with numbers of sides  $k_1, \dots, k_n$ , such that  $C_i \subset P_i \subset H$  ( $i=1, \dots, n$ ) and  $k_1 + \dots + k_n \leq 6n$ . Let  $a(X)$  denote the area of the set  $X$ . Then, by Lemma 1 and 3,

$$a(H) \cong \sum_{i=1}^n a(P_i) \cong \sum_{i=1}^n A(k_i, a_i, \Lambda_i) \cong nA \left( \frac{k_1 + \dots + k_n}{n}, \bar{a}, \bar{\Lambda} \right) \cong nA(6, \bar{a}, \bar{\Lambda}),$$

that is

$$(62) \quad \frac{a_1 + \dots + a_n}{a(H)} \cong \frac{\bar{a}}{A(6, \bar{a}, \bar{\Lambda})},$$

as required.

**PROOF OF THEOREM 2.** Let  $C_1, \dots, C_n$  be convex discs as in Theorem 2. We assume, as we clearly may, that, for some  $m \leq n$ ,  $\{C_1, \dots, C_m\}$  covers  $H$  and that no proper sub-system of  $\{C_1, \dots, C_m\}$  has this property. Since, furthermore,  $C_i$  and  $C_j$  intersect simply, there exist non-overlapping convex polygons  $P_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) such that  $P_i \subset C_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) and  $\bigcup_{i=1}^m P_i = H$  (see [1, 4, 7]). The numbers of

sides  $k_1, \dots, k_m$  of the polygons satisfy the inequality  $k_1 + \dots + k_m \leq 6m$ . If  $m < n$ , let  $k_i = 6$  for  $i > m$ , so that  $k_1 + \dots + k_n \leq 6n$ . Then we have, by Lemmas 2 and 4,

$$\begin{aligned} a(H) &= \sum_{i=1}^m a(P_i) \leq \sum_{i=1}^m B(k_i, a_i, \Lambda_i) \leq \sum_{i=1}^n B(k_i, a_i, \Lambda_i) \leq \\ &\leq nB\left(\frac{k_1 + \dots + k_n}{n}, \bar{a}, \bar{\Lambda}\right) \leq nB(6, \bar{a}, \bar{\Lambda}), \end{aligned}$$

that is

$$(63) \quad \frac{a_1 + \dots + a_n}{a(H)} \leq \frac{\bar{a}}{B(6, \bar{a}, \bar{\Lambda})},$$

as required.

Let us return to the problems suggested at the beginning of this paper. The following two corollaries of our theorems can easily be shown by use of (18), (19) and (20).

**COROLLARY 1.** *The density of any packing of the plane by convex discs from  $\mathcal{C}(a, \Lambda)$  is at most  $a/A(6, a, \Lambda)$ .*

**COROLLARY 2.** *The density of any covering of the plane by convex discs from  $\mathcal{C}(a, \Lambda)$ , where any two of them intersect simply, is at least  $a/B(6, a, \Lambda)$ .*

A densest packing of the plane by discs from  $\mathcal{C}(a, \Lambda)$  arises in the following way: We proceed from an affinely regular hexagonal tiling with faces of appropriate area. We inscribe in each face a regular hyperbolic conic-hexagon of area  $a$  and affine perimeter  $\Lambda$ . A thinnest covering of the plane can be obtained similarly.

**REMARK.** In a previous paper it was proved [10; Lemmas 3 and 4], in a rather complicated way, that  $A(k, a, \Lambda)$  is convex and  $B(k, a, \Lambda)$  is concave, when considered as functions of  $k$ . Based on this result, we proved the Corollaries 1 and 2 of the present paper, but only for a sub-class of  $\mathcal{C}(a, \Lambda)$ .

We shall show how we have to modify the arguments used in [10] so as to obtain the solution for the whole class  $\mathcal{C}(a, \Lambda)$ . Restricting ourselves to the case of packing, we leave that of covering to the reader.

By (40), we have

$$\frac{\partial(A-a)}{\partial a} = \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \frac{\pi}{k} - \cot^2 \alpha} \quad (\text{for } q < 2/3)$$

and

$$\frac{\partial(A-a)}{\partial a} = \frac{1 - \coth^2 \beta}{\cot^2 \frac{\pi}{k} + \coth^2 \beta} \quad (\text{for } q > 2/3),$$

so that the "area deviation"  $A-a$  is a strictly decreasing function of  $a$ . Let the

discs now be taken from  $\mathcal{C}(a, \Lambda)$ . Using the convexity of  $A$  as a function of  $k$ , we proceed as in the proof of Theorem 1

$$\begin{aligned} a(H) - \sum_{i=1}^n a_i &\equiv \sum_{i=1}^n (a(P_i) - a_i) \equiv \sum_{i=1}^n (A(k_i, a_i, \Lambda) - a_i) \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^n (A(k_i, a, \Lambda) - a) \equiv \\ &\equiv nA\left(\frac{k_1 + \dots + k_n}{n}, a, \Lambda\right) - na \equiv \\ &\equiv nA(6, a, \Lambda) - na. \end{aligned}$$

Thus

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{a(H)} \equiv \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{nA(6, a, \Lambda) - na + \sum_{i=1}^n a_i} \equiv \frac{na}{nA(6, a, \Lambda) - na + na},$$

that is

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{a(H)} \equiv \frac{a}{A(6, a, \Lambda)}.$$

This establishes Corollary 1.

NOTE added in proof. R. Schneider pointed out that a definition of the affine length of a convex curve similar to the definition (2) occurs, in a more general context, in a paper by F. Hausdorff (Dimension und äußeres Maß, *Math. Ann.* 79 (1919), 157—179).

#### REFERENCES

- [1] BAMBAH, R. P. and ROGERS, C. A., Covering the plane with convex sets, *J. London Math. Soc.* 27 (1952), 304—314. *MR* 13—971.
- [2] BLASCHKE, W., *Vorlesungen über Differentialgeometrie II*, Chelsea Publ. Co., New York, 1967.
- [3] FEJES TÓTH, G. and FLORIAN, A., Covering of the plane by discs, *Geometriae Dedicata* 16 (1984), 315—333. *MR* 86a: 52020.
- [4] FEJES TÓTH, L., Some packing and covering theorems, *Acta Sci. Math. Szeged* 12 (1950), Pars A, 62—67. *MR* 12—352.
- [5] FEJES TÓTH, L., Über den Affinumfang, *Math. Nachr.* 6 (1951), 51—64. *MR* 13—577.
- [6] FEJES TÓTH, L., Filling of a domain by isoperimetric discs, *Publ. Math. Debrecen* 5 (1957), 119—127. *MR* 19—763.
- [7] FEJES TÓTH, L., *Regular figures*, Pergamon Press, Oxford—London, 1964. *MR* 29 # 2705.
- [8] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Zweite verbesserte und erweiterte Auflage, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 65, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1972. *MR* 50 # 5603.
- [9] FEJES TÓTH, L., Approximation of convex domains by polygons, *Studia Sci. Math. Hungar.* 15 (1980), 133—138. *MR* 84d: 52002.



- [10] FEJES TÓTH, L. and FLORIAN, A., Packing and covering with convex discs, *Mathematika* **29** (1982), 181—193. *MR* **84f**: 52012.
- [11] FEJES TÓTH, L. and HEPPES, A., Filling of a domain by equiareal discs, *Publ. Math. Debrecen* **7** (1960), 198—203. *MR* **23** # A567.
- [12] HEPPES, A., Filling of a domain by discs, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **8** (1963), 363—371. *MR* **29** # 3957.

(Received July 11, 1984)

INSTITUT FÜR MATHEMATIK DER  
UNIVERSITÄT SALZBURG  
HELLBRUNNERSTRASSE 34  
A—5020 SALZBURG  
AUSTRIA



## ZUM ISOPERIMETRISCHEN PROBLEM BEI SIMPLEXEN IN $r$ -DIMENSIONALEN RÄUMEN KONSTANTER KRÜMMUNG

JOHANNES BÖHM

*Professor László Fejes Tóth zum 70. Geburtstag gewidmet*

0. Die Frage nach Simplexen in einem  $r$ -dimensionalen Raum konstanter Krümmung  $\kappa$  (normiert auf  $\pm 1; 0$ ) ( $r \geq 2$ ), die bei vorgegebener Oberfläche maximales Volumen besitzen, kann im  $r$ -dimensionalen euklidischen Fall ( $\kappa=0$ ) etwa mit Hilfe Steinerscher Symmetrisierung (vgl. z.B. [5]) dahingehend beantwortet werden, daß genau das reguläre Simplex unter allen Simplexen gleicher Oberfläche maximales Volumen besitzt. Im nichteuklidischen hyperbolischen Fall ( $\kappa=-1$ ) konnte bei zwei- und dreidimensionalen Simplexen L. Fejes Tóth ebenfalls jeweils die regulären als die einzigen mit maximalem Volumen bei gegebener Oberfläche nachweisen (vgl. [3]). Bei der Untersuchung von total asymptotischen hyperbolischen Simplexen (jede Simplexecke ist ein Fernpunkt) beliebiger Dimension kann das Ergebnis von U. Haagerup und H. J. Munkholm [4] Verwendung finden, daß unter allen  $r$ -dimensionalen hyperbolischen Simplexen genau das reguläre total asymptotische maximales Volumen besitzt. Mit dem elliptischen Fall hatte sich bereits J. Steiner [8] beschäftigt. Er konnte im Fall der Dimension zwei das reguläre elliptische Dreieck als dasjenige mit maximalem Flächeninhalt bei gegebenem Umfang nachweisen. Die oben erwähnte Lösung des isoperimetrischen Problems für den zwei- und dreidimensionalen hyperbolischen Fall — gleichwie für den zweidimensionalen elliptischen — bestätigte L. Fejes Tóth mit Hilfe des für die euklidische und nichteuklidische Ebene gültigen Momentenlemmas und unter Verwendung der Jensenschen Ungleichung durch einen direkten geometrisch verfolgbaren Beweis. Aber bereits für den dreidimensionalen elliptischen Fall versagt diese Methode insbesondere deshalb, weil dann hier gewisse Monotonievoraussetzungen für Momente erzeugende Funktionen nicht erfüllt sind. Darum muß nach einer völlig anderen Beweisidee gesucht werden.

Im folgenden soll ein erster Ansatz für eine Lösung des in Rede stehenden isoperimetrischen Problems in  $r$ -dimensionalen Räumen konstanter nicht verschwindender Krümmung gegeben werden, mit dessen Hilfe zunächst die regulären Simplexe in die engere Wahl der Lösungen kommen. Für die Dimensionen  $r=2$  und  $r=3$  kann in der elliptischen und hyperbolischen Geometrie für die regulären Dreiecke bzw. für die regulären Tetraeder der Nachweis eines (lokalen) Extremums der Volumenfunktion bei fester Oberfläche erbracht werden. Mit den hier verwen-

---

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A40; Secondary 51M10, 51M20.

*Key words and phrases*. Isoperimetric problem for simplices in hyperbolic and elliptic spaces of arbitrary dimension  $r$ , especially  $r=2$  and  $r=3$ .

deten Methoden läßt sich auch noch das bekannte Ergebnis zeigen, daß genau für das reguläre Dreieck die Inhaltsfunktion im Vergleich mit allen isoperimetrischen Dreiecken derselben Geometrie ihr Supremum annimmt. Diese letzte, auf einer Einzigkeitsaussage beruhende Tatsache konnte hier für den dreidimensionalen (insbesondere elliptischen) Fall in dieser Schärfe noch nicht bewiesen werden. Die verwendete analytische Methode ist ein Beispiel für die Anwendung des trigonometrischen Übertragungsprinzips [1], dessen Bedeutung und Funktion hier deutlich verfolgt werden kann. Insbesondere tritt auch der euklidische Fall in seiner Eigenschaft als trennender zwischen elliptischer und hyperbolischer Geometrie klar hervor.

1. Vorgelegt sei die Menge der  $r$ -dimensionalen Simplexe  $\mathfrak{S}_x$  in einem Raum konstanter nichtverschwindender Krümmung  $x = \pm 1$ . Der euklidische Fall ( $x=0$ ) wird erfaßt, wenn  $S \in \mathfrak{S}_x$  punktförmig entartet ist. Betrachtet werden alle Simplexe aus  $\mathfrak{S}_x$  mit gleichgroßer Oberfläche  $F$ , und gesucht sind unter diesen alle diejenigen mit extremalem Volumen. Die bisherigen Ergebnisse geben zu der Vermutung Anlaß, daß jeweils genau ein solches Simplex  $S_0$  mit minimalem Volumen existiert, nämlich das reguläre. Bekanntlich läßt sich diese Aufgabe auch dual formulieren, indem nach dem entsprechenden Simplex mit minimaler Oberfläche bei vorgegebenem Simplexvolumen gefragt wird.  $S_0$  ist dann ebenfalls Lösung dieses dualen Problems, wie man sich leicht im Sinne eines indirekten Beweises überlegen kann. Überhaupt ist es auch gleichgültig, ob man für das vorgelegte isoperimetrische Problem oder für die dazu duale Aufgabe Lösungen sucht, da diese Lösungen übereinstimmen.

$S$  sei ein Simplex in einem elliptischen oder hyperbolischen  $r$ -dimensionalen Raum. Es besitzt  $r+1$  Eckpunkte, die mit den Zahlen 1 bis  $r+1$  bezeichnet werden mögen. Jedem Eckpunkt  $j$  liegt eine  $(r-1)$ -dimensionale Seitenfläche  $S_j$  gegenüber. Zwei solche Seitenflächen bilden einen Keilwinkel höchster Ordnung, die Größe des Keilwinkels, der von den beiden Seitenflächen  $S_j$  und  $S_k$  erzeugt wird, sei  $v_{jk}$ . Der Durchschnitt der beiden Seitenflächen werde mit  $S_{jk}$  bezeichnet und kann als Scheitel des soeben beschriebenen Keilwinkels interpretiert werden. Die Größen der Keilwinkel höchster Ordnung von  $S_l$  können dann entsprechend mit  $v_{l;p,q}$  ( $1 \leq p < q \leq r+1$ ;  $p, q \neq l$ ) bezeichnet werden, wobei  $S_{l;p,q}$  den Scheitel des Keilwinkels von der Größe  $v_{l;p,q}$  von  $S_l$  symbolisiert, also das Untersimplex von

$S$  mit den Ecken von  $S$  außer  $l, p$  und  $q$ . Durch die Vorgabe der  $\binom{r+1}{2}$  Keilwinkelgrößen  $v_{jk}$  von  $S$  ist der Simplexinhalt  $\text{vol}_r S$  eindeutig bestimmt. Für das Differential des Volumens eines elliptischen  $r$ -dimensionalen Simplexes hat L. Schläfli [7] eine Differentialform angeben können, die sich bei geeigneter Interpretation unverändert auf den hyperbolischen Fall übertragen läßt, indem man, ausgehend vom  $r$ -dimensionalen elliptischen Raum, den man lokal als Teil der  $r$ -dimensionalen Oberfläche einer Hyperkugel im  $(r+1)$ -dimensionalen euklidischen Raum mit Radius 1 erklärt, den hyperbolischen  $r$ -dimensionalen Raum analog interpretiert mit der Modifikation, daß für den Radius der verwendeten Hyperkugel der Wert  $\sqrt{-1} = i$  anzunehmen ist (trigonometrisches Übertragungsprinzip; vgl. z.B. [1]). Der hyperbolische asymptotische Fall fügt sich durch Grenzübergang in die Inhaltstheorie ohne weiteres ein. Der euklidische Fall eines Simplexes erscheint in beiden Geometrien gleichermaßen als punktförmig entartetes Simplex. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Keilwinkelgrößen hinsichtlich des Vorliegens eines elliptischen, hyperbolischen bzw. euklidischen Simplexes können mit Hilfe

des Signums der Schläflischen Diskriminanten

$$(1) \quad \Delta_h(i_1, i_2, \dots, i_h) = \begin{vmatrix} 1 & -\cos v_{i_1 i_2} & -\cos v_{i_1 i_3} & \dots & -\cos v_{i_1 i_h} \\ -\cos v_{i_2 i_1} & 1 & -\cos v_{i_2 i_3} & \dots & -\cos v_{i_2 i_h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\cos v_{i_h i_1} & -\cos v_{i_h i_2} & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

formuliert werden: Zunächst muß in jedem Fall für alle  $h=1, 2, \dots, r$  und für alle Kombinationen  $h$ -ter Ordnung  $(i_1, i_2, \dots, i_h)$  aus den Zahlen  $1, 2, \dots, r+1$  die Ungleichung

$$\Delta_h(i_1, i_2, \dots, i_h) > 0$$

erfüllt sein. Das bedeutet geometrisch, alle Auffangsimplexe sind elliptisch. Das Simplex  $S$  mit den Keilwinkelgrößen  $v_{jk}$  ist genau dann ein

$$\left. \begin{array}{l} \text{elliptisches} \\ \text{euklidisches} \\ \text{hyperbolisches} \end{array} \right\} \text{ Simplex, wenn gilt, } \Delta_{r+1} \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0. \end{cases}$$

Die Schläflische Differentialform — in gleicher Weise für  $\kappa=1$  wie für  $\kappa=-1$  — hat die Gestalt

$$(2) \quad d\text{vol}_r S = \frac{1}{r-1} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^{r+1} \text{vol}_{r-2}(S_{jk}) dv_{jk} \quad (r \geq 2; \text{vol}_0(S_{jk}) = 1).$$

Die Oberfläche des Simplexes  $S \in \mathfrak{S}_\kappa$  mit den  $\binom{r+1}{2}$  Keilwinkelgrößen  $v_{jk}$  ( $1 \leq j < k \leq r+1$ ) wird durch die Summe der Volumina der  $r+1$  Seitenflächen  $S_j$  von  $S$  dargestellt.

Das isoperimetrische Problem und seine duale Aussage bedeuten dann, es sind diejenigen Simplexe  $S \in \mathfrak{S}_\kappa$  zu finden, für die gilt

$$(3a) \quad \text{vol}_{r-1} F = \text{const} \wedge \text{vol}_r S = \max$$

bzw.

$$(3b) \quad \text{vol}_r S = \text{const} \wedge \text{vol}_{r-1} F = \min.$$

Betrachtet man dieses als eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen, dann kann man unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel als notwendige Bedingungen für das Vorliegen eines (lokalen) Extremums das Verschwinden der partiellen Ableitungen erster Ordnung nach den Keilwinkelgrößen für die folgenden Hilfsfunktionen ansetzen:

$$(4a) \quad \text{vol}_r S + \lambda_1 \text{vol}_{r-1} F \quad (= \text{extr})$$

bzw.

$$(4b) \quad \text{vol}_{r-1} F + \lambda_2 \text{vol}_r S \quad (= \text{extr}).$$

In beiden Fällen ergeben sich bei  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$  die notwendigen Bedingungen

$$(5) \quad \frac{\partial \text{vol}_{r-1} F}{\partial v_{jk}} = \lambda \frac{\partial \text{vol}_r S}{\partial v_{jk}} \quad \text{für } j, k = 1, 2, \dots, r+1; j < k$$

mit einem geeigneten  $\lambda \neq 0$ . Dabei muß mindestens für ein Paar  $j, k$  die Funktion  $\frac{\partial \text{vol}_r S}{\partial v_{jk}}$  im betrachteten Bereich verschieden von 0 sein, zusätzlich ist noch bei (4a) die isoperimetrische Bedingung  $\text{vol}_{r-1} F = \text{const}$  und bei (4b) die Bedingung  $\text{vol}_r S = \text{const}$  hinzuzunehmen. Für die Aufgabe (3a) ist für jedes beliebige vorgegebene realisierbare Oberflächenvolumen  $\text{vol}_{r-1} F$  das Infimum von  $\text{vol}_r S$  gleich 0, was durch ein entartetes Simplex im Grenzfall realisiert werden kann. Schenkt man jetzt dem elliptischen Fall der Aufgabe (3b) weitere Aufmerksamkeit, so kann man zusätzlich auch noch folgende Aussagen zum Problem machen: Bei vorgegebenem Volumen  $\text{vol}_r S$  erhält man als Supremum für das Oberflächenvolumen den gleichen Wert wie für das Volumen der  $(r-1)$ -dimensionalen Oberfläche einer  $r$ -dimensionalen Einheitskugel  $S_{r-1}$  im euklidischen Raum, nämlich  $\text{vol}_{r-1} S_{r-1} = \frac{2\pi^{r/2}}{\Gamma(r/2)}$ . Die Hälfte dieses Wertes entspricht dem Gesamtvolumen des zugrunde gelegten elliptischen Raumes der Dimension  $r-1$ . Ein elliptisches Simplex mit vorgegebenem Volumen und möglichst großer Oberfläche kann man sich als den Entartungsfall vorstellen, der als Verallgemeinerung eines zweidimensionalen sphärischen Zweiecks entsteht mit einer geeigneten Dicke zwischen den Werten 0 und  $\pi$ , so daß sich gerade das vorgegebene Volumen ergibt. Dabei ist das Volumen einer ausgezeichneten Seitenfläche gleich  $\frac{1}{2} \text{vol}_{r-1} S_{r-1}$ , die Summe der Volumina der übrigen Seitenflächen ist ebenfalls  $1/2 \text{vol}_{r-1} S_{r-1}$  und verteilt sich in geeigneter Weise auf diese. Die Stetigkeit von  $\text{vol}_{r-1} F$  in bezug auf die Keilwinkelgrößen  $v_{jk}$  sichert dann die Existenz eines Simplexes mit minimaler Oberfläche bei festem Volumen im elliptischen Fall der Aufgabe (3b). Falls (4a) (oder (4b)) außer Grenzfällen genau eine Lösung  $v_{jk}^{(0)}$  besitzt, dann existiert genau ein solches extremales Simplex mit den Keilwinkelgrößen  $v_{jk}^{(0)}$ . Im hyperbolischen Fall gibt es für Simplexe verschiedenen Volumens aber gleicher Dimension ( $r > 2$ ) kein generell konstantes dimensionsunabhängiges Supremum für die Simplexoberfläche. Der absolut größte Wert für die Oberfläche eines  $r$ -dimensionalen hyperbolischen Simplexes ergibt sich auf Grund des Satzes von Haagerup und Munkholm [4] für das reguläre total asymptotische Simplex.

Unter Verwendung der Schläflischen Differentialform (2) ergibt sich aus (5) mit  $\lambda = \lambda_0 \frac{r-1}{r-2}$  für  $r > 2$  und  $\lambda = \lambda_0$  für  $r = 2$ , für  $\kappa = \pm 1$  und für alle  $j, k$  mit  $1 \leq j < k \leq r+1$  wegen

$$\frac{\partial \text{vol}_{r-1}(S_l)}{\partial v_{jk}} = \sum_{\substack{p, q=1 \\ p < q \\ p, q \neq l}}^{r+1} \frac{\partial \text{vol}_{r-1}(S_l)}{\partial v_{l; p, q}} \frac{\partial v_{l; p, q}}{\partial v_{jk}}$$

die Gleichung

$$(6) \quad \lambda_0 \text{vol}_{r-2}(S_{jk}) = \sum_{\substack{l=1 \\ p, q=1 \\ p < q \\ p, q \neq l}}^{r+1} \text{vol}_{r-3}(S_{l; p, q}) \frac{\partial v_{l; p, q}}{\partial v_{jk}} \quad (\neq 0).$$

Eine Lösung von (6) ist für jede Dimension  $v_{jk}^{(0)} = \text{const} (=v)$  für alle  $j, k$  mit dem zu  $\text{vol}_{r-1} F$  gehörigen Wert für  $v$  (analog bei (3b)). Diese Lösung wird durch



ein reguläres Simplex interpretiert, dessen Seiten beliebiger Dimension und Winkel beliebiger Ordnung jeweils untereinander kongruent sind und damit gleiche Größe besitzen. Sollte es noch eine weitere Lösung geben, dann gäbe diese Anlaß wegen gewisser Symmetrien der geometrischen Konfiguration sowie wegen der Gestalt der analytischen Formeln (6) zu noch weiteren Lösungen.

2. Die obigen Darlegungen lassen sich nun zunächst für den zweidimensionalen Fall konkretisieren.  $S$  sei ein elliptisches oder hyperbolisches Dreieck mit den drei nicht verschwindenden Winkelgrößen  $v_1 := v_{23}$ ,  $v_2 := v_{31}$  und  $v_3 := v_{12}$ . Die diesen drei Winkeln gegenüberliegenden Kanten haben die Größen  $a_1$ ,  $a_2$  bzw.  $a_3$  (vgl. Abb. 1). Es gilt  $\text{vol}_2 S = v_1 + v_2 + v_3 - \pi$ , wobei die oben dargelegte Vorstellung

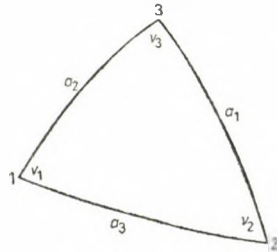


Abb. 1

für den elliptischen bzw. hyperbolischen Fall bedeutet, daß  $\text{vol}_2 S$  das Produkt aus dem wahren Inhalt von  $S$  und  $\kappa$  ( $= \pm 1$ ),  $\text{vol}_1 F$  das Produkt aus dem wahren Inhalt von  $F$  und  $\sqrt{\kappa}$  darstellen. Im elliptischen Fall beträgt das Supremum für die Oberfläche bei jedem beliebigen Inhalt  $0 < \text{vol}_2 S < 2\pi$  stets  $2\pi$ . Dieser Grenzfall wird dargestellt durch ein sphärisches Zweieck mit den Zweieckwinkelgrößen  $h$  und dem Inhalt  $\text{vol}_2 S = 2h$ . Im hyperbolischen Fall beträgt das Supremum für die Oberfläche  $\infty$ . Bei jedem Dreiecksinhalt zwischen den Werten 0 und  $2\pi$  im elliptischen bzw. zwischen 0 und  $\pi$  im hyperbolischen Fall existiert ein Dreieck mit minimalem Umfang. Die notwendige Bedingung (6) wird hierfür zu

$$(7) \quad \lambda_0 = \frac{\partial(a_1 + a_2 + a_3)}{\partial v_j} \quad (j = 1, 2, 3),$$

und eine Lösung ist  $v_j = v = \text{const}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) mit geeignetem  $v$ , die sich geometrisch durch ein reguläres Dreieck darstellen läßt. Um zu zeigen, daß es keine weiteren nichttrivialen Lösungen gibt und somit das betreffende reguläre Dreieck mit vorgegebenem Flächeninhalt den kleinsten Umfang unter allen Dreiecken gleichen Flächeninhalts besitzt, wird (7) weiter untersucht.

Zunächst wird die Frage gestellt, ob es weitere Lösungen gibt. Für die Seitenlängen  $a_j$  gilt

$$(8) \quad \cos a_j = \frac{\cos v_j + \cos v_{j+1} \cos v_{j+2}}{\sin v_{j+1} \sin v_{j+2}} \quad (j = 1, 2, 3; \text{Index mod } 3).$$

Setzt man

$$(9) \quad T_{jkl} = \sqrt{1 - \cos^2 v_j - \cos^2 v_k - \cos^2 v_l - 2 \cos v_j \cos v_k \cos v_l},$$

dann läßt sich unter Verwendung des Sinussatzes für nichteuklidische Dreiecke  $\frac{\sin v_j}{\sin a_j} = \text{const}$  ( $j=1, 2, 3$ ) schreiben

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_j}{\partial v_j} &= \frac{1}{T_{123}} \sin v_j, & \frac{\partial a_j}{\partial v_{j+1}} &= \frac{1}{T_{123}} \frac{\cos v_{j+2} + \cos v_j \cos v_{j+1}}{\sin v_{j+1}} = \\ (10) \quad & & &= \frac{1}{T_{123}} \frac{\sin v_{j+1}}{\sin a_{j+1}} \sin a_j \cos a_{j+2}, \\ \frac{\partial a_j}{\partial v_{j+2}} &= \frac{1}{T_{123}} \frac{\sin v_{j+2}}{\sin a_{j+2}} \sin a_j \cos a_{j+1}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} A_j &:= \frac{\partial(a_1 + a_2 + a_3)}{\partial v_j} = \frac{1}{T_{123}} \frac{\sin v_j}{\sin a_j} (\sin(a_{j+1} + a_{j+2}) + \sin a_j) = \\ (11) \quad & & &= \frac{2}{T_{123}} \frac{\sin v_1}{\sin a_1} \sin \frac{c}{2} \cos \left( \frac{c}{2} - a_j \right) \end{aligned}$$

für

$$c := \text{vol}_1 F = a_1 + a_2 + a_3.$$

Für spätere Zwecke läßt sich aus den obigen Rechnungen auch ableiten

$$(12) \quad A_j = \frac{\partial(a_1 + a_2 + a_3)}{\partial v_j} = \frac{1}{T_{123}} \frac{\sin v_j}{1 - \cos v_j} (1 - \cos v_j + \cos v_{j+1} + \cos v_{j+2}).$$

Wegen (11) wird (7) zu

$$\lambda_0 = \frac{2}{T_{123}} \frac{\sin v_1}{\sin a_1} \sin \frac{c}{2} \cos \left( \frac{c}{2} - a_j \right) \quad \text{für } j = 1, 2, 3.$$

Daraus ergibt sich nun

$$(13) \quad \cos \left( \frac{c}{2} - a_1 \right) = \cos \left( \frac{c}{2} - a_2 \right) = \cos \left( \frac{c}{2} - a_3 \right) \left( = \cos \left( \frac{a_1 + a_2 - a_3}{2} \right) \right).$$

In dem Bereich  $0 < a_1, a_2, a_3 < \pi$  für den elliptischen Fall bzw.  $0 < \frac{1}{i} a_1, \frac{1}{i} a_2, \frac{1}{i} a_3 < < \infty$  für den hyperbolischen Fall gibt es dann nur die einzige Lösung  $a_1 = a_2 \wedge a_1 = a_3$ , woraus  $a := a_1 = a_2 = a_3 = \frac{c}{3}$  folgt. Die sich ergebende weitere Lösung  $c = a_1 + a_2$

ist wegen  $a_3 \neq 0$  nicht brauchbar. Somit ist die Konfiguration des regelmäßigen Dreiecks die Lösung von (7) in beiden nichteuklidischen Geometrien der Dimension 2.

Jetzt werden — gleichzeitig auch als Vorleistung für die folgenden Untersuchungen der Dimension drei — hinreichende Bedingungen für das Vorliegen dieses Extremums angegeben.

Zur Lösung etwa von (3b) für  $r=2$  denke man sich den Dreiecksumfang  $\text{vol}_1 F = a_1 + a_2 + a_3$  als Funktion der Keilwinkelgrößen  $v_1, v_2$  und  $v_3$  aufgeschrieben, wobei die Keilwinkelgröße  $v_3$  ihrerseits als Funktion von  $v_1$  und  $v_2$  auf Grund der

Bindung

$$(14) \quad \text{vol}_2 S = v_1 + v_2 + v_3 - \pi = \text{const}$$

auftritt. Demzufolge sind (relative) Extrema von

$$A(v_1, v_2, v_3(v_1, v_2)) := a_1 + a_2 + a_3$$

zu bestimmen bei Beachtung, daß wegen der oben angegebenen Auffassung bezüglich des betreffenden elliptischen bzw. hyperbolischen Raumes für die vorgelegte Aufgabe Minima der reellen Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa}} A(v_1, v_2, v_3(v_1, v_2))$$

zu suchen sind. Die bekannten notwendigen Bedingungen dafür lauten

$$(15) \quad \frac{\partial A}{\partial v_j} = A_j + A_3 \frac{\partial v_3}{\partial v_j} = 0 \quad (j = 1, 2)$$

mit  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) aus (12). Die partiellen Ableitungen von (14) ergeben

$$\frac{\partial \text{vol}_2 S}{\partial v_j} = 1 + \frac{\partial v_3}{\partial v_j} = 0 \quad (j = 1, 2),$$

und folglich ist für  $j = 1, 2$ ,

$$(16) \quad \frac{\partial v_3}{\partial v_j} = -1$$

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial v_j \partial v_k} = \frac{\partial^2 \text{vol}_2 S}{\partial v_j \partial v_k} = 0.$$

Aus (11), (15) und (16) ergibt sich als Lösung (die nach den obigen Untersuchungen die einzige in Frage kommende ist)  $v_1 = v_2 = v_3(v_1, v_2) (=v)$ . Um analytisch nachzuweisen, daß an dieser Stelle ein Minimum vorliegt, sind die zweiten partiellen Ableitungen von  $A$  zu untersuchen. Die dafür nötigen partiellen Ableitungen von  $v_3$ , in (16) zusammengestellt, erhält man aus der Bedingungsgleichung (14). Im einzelnen ergibt sich für  $j = 1, 2$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial v_j^2} = \frac{\partial A_j}{\partial v_j} - \frac{\partial A_j}{\partial v_3} - \frac{\partial A_3}{\partial v_j} + \frac{\partial A_3}{\partial v_3} + A_3 \frac{\partial^2 v_3}{\partial v_j^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 A}{\partial v_1 \partial v_2} = \frac{\partial A_1}{\partial v_2} - \frac{\partial A_1}{\partial v_3} - \frac{\partial A_3}{\partial v_2} + \frac{\partial A_3}{\partial v_3} + A_3 \frac{\partial^2 v_3}{\partial v_1 \partial v_2}.$$

Darum ist für  $v_1 = v_2 = v$

$$(17) \quad a_{11} = a_{22} = \left( \frac{\partial^2 A}{\partial v_j^2} \right)_v = 2 \left( \frac{\partial A_1}{\partial v_1} - \frac{\partial A_1}{\partial v_2} \right)_v = 2 \frac{\sqrt{1 - 2 \cos v}}{1 - \cos v}$$

$$a_{12} = a_{21} = \left( \frac{\partial^2 A}{\partial v_1 \partial v_2} \right)_v = \left( \frac{\partial A_1}{\partial v_1} - \frac{\partial A_1}{\partial v_2} \right)_v = \frac{1}{2} a_{11}.$$

Folglich ist

$$(18) \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{3}{4} a_{11}^2 = \frac{3(1-2\cos v)}{(1-\cos v)^2}.$$

Der euklidische Fall mit  $\cos v = \frac{1}{2}$  trennt den elliptischen vom hyperbolischen mit  $a_{11}=0$ . Im elliptischen Fall gilt  $-1 < \cos v < \frac{1}{2}$  und darum  $a_{11} > 0$  sowie  $\det A > 0$ . Im hyperbolischen Fall gilt  $\frac{1}{2} < \cos v < 1$  und darum  $\frac{1}{\sqrt{-1}} a_{11} > 0$  sowie  $-\det A > 0$ . Infolgedessen sind in beiden nichteuklidischen Fällen

$$(19) \quad \frac{1}{\sqrt{\kappa}} a_{11} > 0 \quad \text{und} \quad \kappa \det A > 0.$$

Das ist zusammen mit (15) und der obigen Einzigkeitsaussage hinreichend für das Vorliegen des (absoluten) Minimums von  $\frac{1}{\sqrt{\kappa}} A$  bei  $v_1=v_2=v$ . Außer dem trennenden euklidischen Fall erkennt man auch ganz deutlich die Besonderheit des asymptotischen Falles mit  $v=0$  bzw.  $\cos v=1$  an den Formeln (17) und (18). Für  $v_3$  ergab sich der Zusammenhang (13) aus der Gleichung (15) in Verbindung mit (16), und so erhält man, wie oben,  $v_3=v_1=v_2=v$ , wobei  $v = \frac{\kappa \operatorname{vol}_2 S + \pi}{3}$  ist; und für die Kantenlängen  $a:=a_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) folgt aus (8)

$$\cos a = \frac{\cos v}{1 - \cos v}.$$

Demzufolge gilt im elliptischen Fall  $-\frac{1}{2} < \cos a < 1$  und im hyperbolischen  $1 < \cos a$ . Für den euklidischen erhält man wieder das punktförmig entartete Simplex mit  $\cos a=1$ . Auf diese Weise ist mit elementaren analytischen Mitteln zur Vorbereitung auf entsprechende Untersuchungen im dreidimensionalen Fall gezeigt, daß ein nichteuklidisches reguläres Dreieck die isoperimetrische Eigenschaft besitzt.

**3.** Jetzt soll der dreidimensionale Fall behandelt werden.  $S$  sei ein elliptisches oder hyperbolisches Tetraeder mit den Eckpunkten 1, 2, 3, 4. Die sechs Keilwinkel mögen die Größen

$$v_1 := v_{23}, \quad v_2 := v_{13}, \quad v_3 := v_{12}, \quad v_4 := v_{14}, \quad v_5 := v_{24} \quad \text{und} \quad v_6 := v_{34}$$

haben; die Größen der zugehörigen Scheitelkanten seien bzw.  $a_j$  (vgl. Abb. 2). Nunmehr werden sämtliche Tetraeder aus  $\mathfrak{S}_\kappa$  mit gleichem Inhalt betrachtet, also alle  $S \in \mathfrak{S}_\kappa$  mit

$$(20) \quad \operatorname{vol}_3 S = \text{const.}$$

Die Größe der Oberfläche  $F$  dieser Tetraeder ist gleich der Summe der Inhalte der vier Dreiecksseitenflächen des Tetraeders. Im elliptischen Falle ist das jeweilige



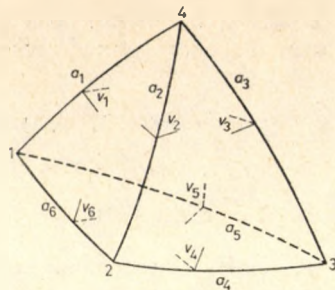


Abb. 2

Supremum der Oberfläche bei jedem möglichen Tetraederinhalt gleich  $4\pi$ , so daß hier aus Stetigkeitsgründen wiederum ein Tetraeder mit minimaler Oberfläche existieren muß. Als eine mögliche Lösung der Aufgabe (3b) für  $r=3$  wurde bereits oben

$$v_j = v \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, 6$$

mit geeignetem  $v$ , so daß (20) gilt, erkannt. Es wird jetzt nachgewiesen, daß für ein solches reguläres Tetraeder die Oberfläche ein (lokales) Minimum annimmt. Das Vorgehen ist analog wie im zweidimensionalen Fall.

Betrachtet wird für das Tetraeder  $S$  die Inhaltsfunktion  $\text{vol}_3 S$ , die mit  $\frac{1}{\sqrt{\kappa^3}} \text{vol}_3 S$  den wahren Tetraederinhalt angibt. Hinsichtlich der Untersuchung der Tetraeder-oberfläche wird die Funktion

$$(21) \quad A = 4\pi + \text{vol}_2 F$$

verwendet, die die Summe der Größen aller 12 Dreieckswinkel des Tetraeders  $S$  bis auf den Faktor  $\kappa$  darstellt. Man denke sich nun  $A$  als Funktion der sechs Keilwinkelgrößen  $v_j$ , wobei zusätzlich  $v_6 = v_6(v_1, v_2, \dots, v_5)$  infolge der Bindungsgleichung (20) angesetzt werden kann. Demnach sind relative Extrema von

$$(22) \quad A(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5))$$

zu bestimmen wiederum bei Beachtung der Tatsache, daß für die vorgelegte Aufgabe Minima von  $\frac{1}{\kappa} A$  zu suchen sind. Die bekannten notwendigen Bedingungen dafür lauten

$$(23) \quad \frac{\partial A}{\partial v_j} = A_j + A_6 \frac{\partial v_6}{\partial v_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 5),$$

mit

$$(24) \quad \begin{aligned} A_1 &= A_{123} + A_{156}, & A_2 &= A_{123} + A_{246}, & A_3 &= A_{123} + A_{345}, \\ A_4 &= A_{246} + A_{345}, & A_5 &= A_{156} + A_{345}, & A_6 &= A_{156} + A_{246}, \end{aligned}$$

wobei gilt

$$(25) \quad A_{jkl} = A_{jlk} = \frac{1}{T_{jkl}} \frac{\sin v_j}{1 - \cos v_j} (1 - \cos v_j + \cos v_k + \cos v_l) \quad (\text{vgl. (12)}).$$

Man erhält diese Darstellung (23)–(25), indem etwa jeweils diejenigen Dreieckswinkel zusammengefaßt werden, die eine Tetraederecke als gemeinsamen Scheitel besitzen. Für die Lösung von (23)

$$\begin{aligned} v_j &= v \quad (j = 1, 2, \dots, 5) \\ (26) \quad v_6 &= v_6(v, v, v, v, v) = v \\ &\quad (v \text{ erfüllt (20)}), \end{aligned}$$

die sich nach den obigen allgemeinen Untersuchungen anbietet, wird jetzt nachgewiesen, daß hinreichende Bedingungen für das Vorliegen eines Minimums der Oberfläche  $F$  erfüllt sind. Zu diesem Zwecke sind die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von  $A$  an der Stelle (26) zu bestimmen. Dafür erweist sich die Angabe der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von  $v_6(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$  als nötig, wiederum bezogen auf die Stelle (26), denn ihre Werte gehen in die hinreichenden Bedingungen ein. Sie ergeben sich aus (20) für  $j = 1, 2, \dots, 5$  gemäß

$$(27) \quad 2 \frac{\partial \text{vol}_3 S}{\partial v_j} = a_j + a_6 \frac{\partial v_6}{\partial v_j} = 0$$

und

$$(28) \quad \frac{\partial^2 \text{vol}_3 S}{\partial v_j \partial v_k} = \frac{\partial a_j}{\partial v_k} + \frac{\partial a_j}{\partial v_6} \frac{\partial v_6}{\partial v_k} + \frac{\partial a_6}{\partial v_k} \frac{\partial v_6}{\partial v_j} + \frac{\partial a_6}{\partial v_6} \frac{\partial v_6}{\partial v_j} \frac{\partial v_6}{\partial v_k} + a_6 \frac{\partial^2 v_6}{\partial v_j \partial v_k} = 0.$$

Die partiellen Ableitungen von  $a_k$  erhält man aus der Darstellung für  $\cos a_k$  von L. Schläfli [7] als Funktion der Keilwinkelgrößen  $v_j$ ; demgemäß ist z.B.

$$\begin{aligned} (29) \quad \cos a_1 &= \frac{1}{T_{123} T_{156}} (\cos v_2 \cos v_6 + \cos v_3 \cos v_5 + \sin^2 v_1 \cos v_4 + \\ &\quad + \cos v_1 \cos v_2 \cos v_5 + \cos v_1 \cos v_3 \cos v_6), \end{aligned}$$

und bei (26) ergibt sich hieraus dann für das reguläre Tetraeder ein Zusammenhang zwischen Keilwinkelgröße  $v$  und Kantenlänge  $a := (a_j)_v$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) in der Gestalt

$$(30) \quad \cos a = \frac{\cos v}{1 - 2 \cos v}.$$

Umformungen von (30) liefern die für spätere Berechnungen nützlichen Formeln

$$\cos v = \frac{\cos a}{1 + 2 \cos a}, \quad 1 - \cos v = \frac{1 + \cos a}{1 + 2 \cos a}, \quad 1 - 2 \cos v = \frac{1}{1 + 2 \cos a}$$

und

$$\sin a = \frac{\sqrt{1 - \cos v} \sqrt{1 - 3 \cos v}}{1 - 2 \cos v}.$$

Die Lösung (26) hat zur Folge

$$(31) \quad \left( \frac{\partial v_6}{\partial v_j} \right)_v = -1 \quad (j = 1, 2, \dots, 5),$$



wie sich sofort aus (27) wegen (30) ergibt. Durch (31) wird dann bei (26) auch (23) erfüllt, da hierfür aus (24) und (25) die Beziehung

$$(A_j)_v = \frac{2 \sin v}{(1 - \cos v) \sqrt{1 - 2 \cos v}}$$

für  $j=1, 2, \dots, 6$  abgelesen werden kann. Für

$$d_{jk} := \left( \frac{\partial^2 v_6}{\partial v_j \partial v_k} \right)_v$$

erhält man aus (28) unter Verwendung von (29) die drei hierfür grundlegenden Funktionen

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{2}{a} \frac{\cos v \sqrt{1 - 3 \cos v}}{(1 - 2 \cos v) \sqrt{1 + \cos v}} = 2 \frac{\sin a}{a} \frac{\cos v}{\sin v} \\ (32) \quad d_{14} &= -\frac{1}{a} \frac{\sqrt{1 - 3 \cos v}}{\sqrt{1 + \cos v}} = -\frac{\sin a}{a} \frac{1 - 2 \cos v}{\sin v} \\ d_{33} &= \frac{2}{a} \frac{\sqrt{1 - 3 \cos v}}{(1 - 2 \cos v) \sqrt{1 + \cos v}} = 2 \frac{\sin a}{a} \frac{1}{\sin v}, \end{aligned}$$

aus denen die übrigen Ableitungen gebildet werden können gemäß

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = d_{44} = d_{55} = 2 d_{12} = 2 d_{15} = 2 d_{24} = 2 d_{45}, \\ (33) \quad d_{14} &= d_{25}, \\ d_{33} &= 2 d_{13} = 2 d_{23} = 2 d_{34} = 2 d_{35}, \\ d_{jk} &= d_{kj}. \end{aligned}$$

Für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$(34) \quad \frac{\partial^2 A}{\partial v_j \partial v_k} = \frac{\partial A_j}{\partial v_k} + \frac{\partial A_j}{\partial v_6} \frac{\partial v_6}{\partial v_k} + \frac{\partial A_6}{\partial v_k} \frac{\partial v_6}{\partial v_j} + \frac{\partial A_6}{\partial v_6} \frac{\partial v_6}{\partial v_j} \frac{\partial v_6}{\partial v_k} + A_6 \frac{\partial^2 v_6}{\partial v_j \partial v_k}$$

an der Stelle (26) wird gesetzt

$$a_{jk} := \left( \frac{\partial^2 A}{\partial v_j \partial v_k} \right)_v.$$

Da  $A_6$  an der Stelle (26) den oben angegebenen Wert besitzt, kann

$$(35) \quad a_{jk} = \frac{2 \sin v}{(1 - \cos v) \sqrt{1 - 2 \cos v}} (c_{jk} + d_{jk})$$

geschrieben und die Funktionen  $d_{jk}$  aus (32) und (33) eingetragen werden. Die Funktionen  $c_{jk}$  ergeben sich aus (34) zu

$$c_{11} = \frac{1 - 6 \cos v + 7 \cos^2 v}{(1 - 2 \cos v) \sin v}$$

$$c_{14} = \frac{1 - 2 \cos v}{\sin v}$$

$$c_{33} = -\frac{2 \cos v (2 - 3 \cos v)}{\sin v (1 - 2 \cos v)}$$

und die übrigen  $c_{jk}$  analog wie in (33).

Durch den Übergang

$$(36) \quad a_{jk} = \frac{2\sqrt{1+2\cos a}}{1+\cos a} b_{jk}$$

ergibt sich unter Verwendung von (30) mit den weiteren daraus folgenden oben angegebenen Formeln schließlich

$$(37) \quad \begin{aligned} b_{11} &= (1 - \cos a) + \cos a \left( 2 \frac{\sin a}{a} - (1 + \cos a) \right) \\ b_{14} &= 1 - \frac{\sin a}{a} \\ b_{33} &= 2 \left\{ \left( \frac{\sin a}{a} - \cos a \right) + \cos a \left( 2 \frac{\sin a}{a} - (1 + \cos a) \right) \right\} \end{aligned}$$

und die übrigen  $b_{jk}$  analog wie in (33).

Für alle  $j, k = 1, 2, \dots, 5$  gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0} b_{jk} = 0$$

wegen des entsprechenden Verhaltens der drei in (37) auftretenden Funktionen

$$(38) \quad \frac{\sin a}{a} - \cos a, \quad 1 - \frac{\sin a}{a}, \quad 2 \frac{\sin a}{a} - (1 + \cos a).$$

Im elliptischen Fall gilt  $-1 < \cos v < \frac{1}{3}$  bzw.  $-\frac{1}{3} < \cos a < 1$  und im hyperbolischen Fall  $\frac{1}{3} < \cos v \leq \frac{1}{2}$  bzw.  $1 < \cos a$ , was auch  $0 < \frac{a}{\sqrt{-1}}$  bedeutet.  $\cos v = \frac{1}{2}$  charakterisiert den asymptotischen Grenzfall mit  $\frac{1}{i}a = \infty$ . Für den euklidischen Fall gilt  $\cos v = \frac{1}{3}$  bzw.  $\cos a = 1$  als punktförmig entarteter Grenz-

fall. In dem hier zu betrachtenden Bereich  $-1 < \cos \alpha \leq \frac{1}{2}$  ist darum

$$(39) \quad \frac{\sqrt{1+2\cos \alpha}}{1+\cos \alpha} > 0,$$

so daß

$$\operatorname{sgn} a_{jk} = \operatorname{sgn} b_{jk}$$

für  $j, k = 1, 2, \dots, 5$  ist. Deshalb gilt schließlich im interessierenden Bereich für alle  $j, k$  wegen des entsprechenden Verhaltens der Funktionen (38)

$$(40) \quad \frac{1}{x} b_{jk} > 0.$$

Hinreichend dafür, daß für (22) an der Stelle (26) ein (relatives) Minimum vorliegt, ist neben der Bedingung (23) die Positiv-Definitheit der quadratischen Form mit dem symmetrischen Koeffizientenschema  $A = (a_{jk})_{j,k=1,2,\dots,5}$ . Diese letzte Forderung ist wegen (36) und (39) auch äquivalent mit der Positiv-Definitheit der quadratischen Form mit dem Koeffizientenschema

$$(41) \quad B = (b_{jk})_{j,k=1,2,\dots,5} = \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{1}{2} b_{11} & \frac{1}{2} b_{33} & b_{14} & \frac{1}{2} b_{11} \\ \frac{1}{2} b_{11} & b_{11} & \frac{1}{2} b_{33} & \frac{1}{2} b_{11} & b_{14} \\ \frac{1}{2} b_{33} & \frac{1}{2} b_{33} & b_{33} & \frac{1}{2} b_{33} & \frac{1}{2} b_{33} \\ b_{14} & \frac{1}{2} b_{11} & \frac{1}{2} b_{33} & b_{11} & \frac{1}{2} b_{11} \\ \frac{1}{2} b_{11} & b_{14} & \frac{1}{2} b_{33} & \frac{1}{2} b_{11} & b_{11} \end{pmatrix}.$$

Diese Form ist positiv definit, wenn alle Determinanten  $B_l = \det (b_{jk})_{j,k=1,\dots,l}$  für  $l = 1, 2, 3, 4, 5$  positiv sind. Die Berechnung dieser Determinanten ergibt die Werte

$$B_1 = b_{11}, \quad B_2 = \frac{3}{4} b_{11}^2, \quad B_3 = \frac{1}{4} b_{11} b_{33} (3b_{11} - b_{33}),$$

$$B_4 = \frac{1}{4} b_{33} (2b_{11}^3 - b_{11}^2 b_{33} + b_{33} b_{14}^2 + 2b_{11}^2 b_{14} - 4b_{11} b_{14}^2),$$

$$B_5 = b_{33} b_{14} (2b_{11}^3 - b_{11}^2 b_{33} - 3b_{11}^2 b_{14} + 2b_{11} b_{33} b_{14} - b_{33} b_{14}^2 + b_{14}^3).$$

Aus (37) läßt sich der Zusammenhang

$$2b_{11} = b_{33} + 2b_{14}$$

ablesen, so daß die Werte für die Determinanten  $B_l$  vereinfacht werden können zu

$$B_3 = \frac{1}{4} b_{11} b_{33} (b_{11} + 2b_{14}), \quad B_4 = \frac{1}{4} b_{14} b_{33}^2 (b_{33} + 3b_{14}),$$

$$B_5 = \frac{3}{4} b_{33}^3 b_{14}^2.$$

Aus (40) ergibt sich nunmehr, daß alle fünf Determinanten im elliptischen Fall positiv ausfallen. Da im hyperbolischen Fall Minima für die Funktion  $-A$  zu suchen sind, hat man in den zu betrachtenden Determinanten die Koeffizienten  $b_{jk}$  durch  $-b_{jk}$  zu ersetzen, so daß wegen (40) ebenfalls alle Determinanten  $(-1)^l B_l$  positive Werte besitzen. Somit liegt bei (26) ein relatives Minimum in beiden Geometrien vor.

Es sei angemerkt, daß man bei der Lösung der dualen Aufgabe (3a) völlig analog vorgehen kann; für die Koeffizienten  $b_{jk}$  ergeben sich dann die Werte  $-b_{jk}$  im elliptischen Fall, im hyperbolischen Fall sind die Koeffizienten  $-(-b_{jk}) = b_{jk}$  zu verwenden. Die Negativ-Definitheit der dann zur Diskussion stehenden quadratischen Form, die ein relatives Maximum garantiert, ist gesichert, da gilt  $\operatorname{sgn} B_l = (-1)^l$  für  $l = 1, 2, \dots, 5$ .

Die hier bewiesene Aussage für den hyperbolischen Raum ist bereits bekannt und in [3] sogar noch schärfer formuliert worden. Für den elliptischen Raum ist sie neu und gibt somit auch für die regulären elliptischen Tetraeder eine Extremaleigenschaft an. Sie soll darum aufgeschrieben werden als

**THEOREM 1.** *Auf der Menge aller Tetraeder im elliptischen Raum, die ein vorgegebenes konstantes Volumen besitzen, nimmt die Oberflächenfunktion für das reguläre ein relatives Minimum an.*

Als duales Gegenstück gilt in gleicher Weise

**THEOREM 2.** *Für alle oberflächengleichen Tetraeder im elliptischen Raum nimmt die Inhaltsfunktion für das reguläre ein relatives Maximum an.*

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BÖHM, J. und HERTEL, E., *Polyedergeometrie in n-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung*, Mathematische Monographien, Bd. 14, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980. MR 82k: 52001b; Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. 70, Birkhäuser Verlag, Basel—Boston—Stuttgart, 1981. MR 82k: 52001a.
- [2] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Zweite verbesserte und erweiterte Auflage, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 65, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1972. MR 50 # 5603.
- [3] FEJES TÓTH, L., On the isoperimetric property of the regular hyperbolic tetrahedra, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* 8A (1963), 53—57. MR 29 # 3954.
- [4] HAAGERUP, U. und MUNKHOLM, H. J., Simplices of maximal volume in hyperbolic  $n$ -space, *Acta Math.* 147 (1981), 1—11. MR 82j: 53116.
- [5] LEICHTWEISS, K., *Konvexe Mengen*, Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 81, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980. MR 81b: 52001. Hochschultext, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1980. MR 81j: 52001.

- [6] MILNOR, J., Hyperbolic geometry: the first 150 years, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* **6** (1982), 9—24. *MR 82m*: 57005.
- [7] SCHLÄFLI, L., Theorie der vielfachen Kontinuität (aus dem Jahre 1852), *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Band 1, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1950, 227 ff. *MR 11*—611.
- [8] STEINER, J., Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze, *J. Reine Angew. Math.* **18** (1838), 281—296; *Ges. Werke* **2**, Berlin: Reimer, 1882, 75—91. Über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raum überhaupt, *J. Math. Pures Appl.* **6** (1842), 105—170; *J. Reine Angew. Math.* **24** (1842), 93—162 u. 189—250; *Ges. Werke* **2**, Berlin: Reimer, 1882, 177—308.
- [9] STEINITZ, E., Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern I, II, *J. Reine Angew. Math.* **158** (1927), 129—153; **159** (1928), 133—143.

(Eingegangen am 16. Juli 1984)

SEKTION MATHEMATIK DER  
FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA  
UNIVERSITÄTSHOCHHAUS, 17. OG.  
DDR—6900 JENA  
GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC





### THREE THEOREMS ON THE MINIMAL VECTORS OF PERFECT LATTICES

G. CSÓKA

*Dedicated to L. Fejes Tóth on his seventieth birthday*

This paper is devoted to the further study of the minimal vectors of perfect lattices. We shall prove three theorems concerning the arrangement of minimal vectors in the space  $E^n$  and the volume of parallelepiped spanned by minimal vectors, parallelepiped of minima, or "p.m."

In § 1 we have collected the most important definitions.

In § 2 we prove, that when all the minimal vectors of a perfect lattice are in one of its sublattices, then the sublattice itself is perfect (Lemma 1). Using this Lemma we shall prove, that if in a lattice of dimension  $n \leq 8$  the volumes of all p.m. are equal, say  $pV$ , where  $pV$  is different from the volume  $V$  of the basic parallelepiped of the lattice, then the lattice is not perfect. (There exists a counterexample for  $n \geq 9$ .)

In § 3 we show that if we omit a freely chosen vector from any basis of a perfect  $n$ -lattice, then from the  $(n-1)$ -dimensional plane spanned by the remaining  $n-1$  basic vectors at least  $n$  minimal vectors will point out of the plane (Theorem 2). Not all minimal vectors can be included in any two  $(n-1)$ -dimensional planes of this kind; at least one will leave them (Theorem 3).

#### § 1. Definitions

1.1. It is well-known that to any frame  $\{\mathbf{a}_j\}_1^n$  of the space  $E^n$  a metric quadratic form

$$f = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k$$

can be assigned, where  $a_{ik} = \mathbf{a}_i \mathbf{a}_k$ , moreover,  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$ . There is a one-one correspondence between the lattice, constructed on the basic frame  $\{\mathbf{a}_j\}_1^n$  and the class of quadratic forms equivalent to  $f$ . Thus it is possible to talk about a lattice  $\Gamma_f$  corresponding to the form  $f$  and vice versa [1—2].

1.2. Let  $\Gamma$  be a given lattice in the  $n$ -dimensional space  $E^n$ . As usual, by a minimal vector of this lattice we mean any of its vectors having least length among all non-zero vectors of  $\Gamma$ . Usually we consider minimal vectors as starting from the origin  $O$  of the coordinate system and we take their length to be 1.

1.3. A positive quadratic form is perfect, if the complete system of representations of the minimum (i.e. the set of non-trivial integers for which this minimum is attained) determines the form up to a positive factor. (In other words, see § 2, by the system (1) of representations of minimum we can form a matrix (2), from which the coefficients of the form can be calculated.) The lattice corresponding to such a form is a perfect one. It is known [3], that

1° there is a finite number of perfect  $n$ -lattices;

2° all extreme lattices, i.e. lattices giving locally densest lattice packings of equal  $n$ -dimensional spheres, are perfect;

3° in a perfect lattice there are at least  $N = \frac{1}{2}n(n+1)$  minimal vectors and also there are  $n$  linearly independent minimal vectors among them.

This means there is a p.m. in a perfect lattice.

1.4. Let  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  be a partially open parallelepiped of  $\Gamma$ , where  $x \in B$  if  $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i$  and  $0 \leq x_i < 1$ . Consider the  $n$ -lattice  $\Gamma^*$ , constructed on the vectors  $b_1, \dots, b_n$  as basic vectors.  $\Gamma$  will be given, in general, by a centering [4–6] of  $\Gamma^*$ . In the case, when  $\{b_1, \dots, b_n\}$  is a basic frame of  $\Gamma$ , we say that the centering is trivial. It is evident, that if the centering is not trivial,  $\Gamma$  has points in or on the boundary of the parallelepiped  $B$  other than its vertices. Therefore, we will often speak of  $\Gamma$  as the centering of the parallelepiped  $B$ . We consider only those centerings, which do not involve vectors shorter than the minimal vectors of the centered lattice. In order to stress this we often will speak of “admissible centerings”.

Throughout this paper we consider only those lattices, which have a p.m. (denoted by  $\Pi$  in what follows).

1.5. Suppose  $\Gamma$  is a given  $n$ -lattice and  $\Pi = \Pi(e_1, \dots, e_n)$  a p.m. in it with edges  $e_1, \dots, e_n$ . Consider the lattice  $\Gamma$  to be a non-trivial centering of  $\Gamma^*$ , then  $\Gamma$  has points  $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$  in or on the boundary of  $\Pi$ , other than its vertices.  $\Gamma$  itself is the union of lattices  $\Gamma^*, \alpha_1 + \Gamma^*, \dots, \alpha_{p-1} + \Gamma^*$ . The number  $p$  is the volume of  $\Pi$ , relative to the volume of a basic parallelepiped of  $\Gamma$ , it is called the index of  $\Pi$  (ind  $\Pi$ ) or the index of centering [5].

We call vectors  $\alpha_l$  ( $1 \leq l \leq p-1$ ) defining of the centering, or, their coordinate rows, defining rows. The centering is defined when we know the vectors  $\{\alpha_l\}$ .

When we fix the order of vectors  $e_1, \dots, e_n$  and their signs, the coordinates of vectors  $\{\alpha_l\}$  determine the type of centering. Consider all parallelepipeds  $\Pi(\pm e_1, \dots, \pm e_n)$  which generate  $2^n$  equivalent types (some of these types can simply coincide). These types form a class of centering.

When we consider two p.m.  $\Pi$  and  $\Pi'$  in  $\Gamma^*$ , then  $\text{ind } \Pi \neq \text{ind } \Pi'$  may occur, but when they have the same volume, they can be centered by other classes of centering or when the class is the same, by other types, although the centerings of  $\Pi$  and  $\Pi'$  involve the same lattice  $\Gamma$ .

Progressing upwards in the dimension, the first admissible centering of a p.m. is the space-centering in  $E^4$ , when the parallelepiped is a cube, because its half-diagonals will be exactly of length 1.

A centering is called free centering when further new minimal vectors do not necessarily appear in it. The first example is the space centering in 5 dimensions, for if the minimum parallelepiped is a cube, then the shortest of the new vectors will be of length  $\frac{1}{2}\sqrt{5} > 1$ .

At the same time by an affine deformation of this cube we can obtain such p.m. which has now a diagonal of length 2 and so by space-centering we get a new minimal vector. We say, that the (free) centering is not free for this parallelepiped. When one of its diagonals is reduced to a length  $< 2$ , then the space-centering is not admissible for that p.m.

All the admissible centerings, including the free centerings for the p.m. in dimensions  $n \leq 8$  are known [5—6], see the Table I.

## § 2

**THEOREM 1.** *If in a lattice of dimension  $n \leq 8$  for every minimum parallelepiped the volume relative to the basic parallelepiped is the same number  $p \neq 1$ , then the lattice is not perfect.*

**2.1. LEMMA 1.** *Suppose that all the minimal vectors of a perfect lattice  $\Gamma$  are in a sublattice  $\Gamma^*$ , then  $\Gamma^*$  itself is perfect.*

**PROOF.** Let us take a basis  $\{e_i\}$  in the perfect lattice  $\Gamma$  and let  $f$  be the corresponding quadratic form, which, according to our assumption, is a perfect form. In other words, in the lattice one can find  $\delta \cong N = \frac{1}{2}n(n+1)$  minimal vectors, whose coordinates clearly determine  $f$ . From this we can select  $N$  vectors, which already determine  $f$ . These are

$$(1) \quad \begin{aligned} m^1 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ m^2 &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ m^N &= (z_1, z_2, \dots, z_n). \end{aligned}$$

The  $N \times N$  matrix from which the coefficients of  $f$  may be calculated takes the following form:

$$(2) \quad M = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 & \dots & x_{n-1} x_n \\ y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_n^2 & y_1 y_2 & y_1 y_3 & \dots & y_{n-1} y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_n^2 & z_1 z_2 & z_1 z_3 & \dots & z_{n-1} z_n \end{bmatrix}$$

and  $\det M \neq 0$ . Let  $f^*$  be the metrical form, corresponding to the base  $\{e_i^*\}$  of

Table I

No	Dimension	Free	Denominator	Index	Defining basis							
1			1	1								
2	4—8		2	2	1	1	1	1	0	0	0	0
3	5—8	F	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0
4	6—8	F	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0
5	6—8		2	4	1	1	1	1	0	0	0	0
					0	0	1	1	1	1	0	0
6			3	3	1	1	1	1	1	1	0	0
7	7—8	F	2	2	1	1	1	1	1	1	1	0
8	7—8		2	4	1	1	1	1	1	1	0	0
					0	0	0	1	1	1	1	0
9	7—8		2	4	1	1	1	1	1	0	0	0
					0	0	0	1	1	1	1	0
10	7—8		2	8	1	1	1	1	0	0	0	0
					1	1	0	0	1	1	0	0
					0	1	1	0	1	0	1	0
11	7—8	F	3	3	1	1	1	1	1	1	1	0
12	7—8		4	4	1	1	1	1	1	1	2	0
13	7—8	F	4	4	1	1	1	1	1	2	2	0
14	7—8		4	4	1	1	1	1	2	2	2	0
15	8	F	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
16	8		2	4	1	1	1	1	1	1	1	1
					1	1	1	1	0	0	0	0
17	8		2	4	1	1	1	1	1	1	1	0
					1	1	1	0	0	0	0	1
18	8		2	4	1	1	1	1	1	1	0	0
					1	1	1	1	0	0	1	1
19	8	F	2	4	1	1	1	1	1	1	0	0
					0	0	0	1	1	1	1	1
20	8		2	8	1	1	1	1	1	1	1	1
					1	1	1	1	0	0	0	0
					0	0	1	1	1	1	0	0
21	8		2	8	1	1	1	1	1	1	0	0
					0	0	1	1	1	0	1	0
					0	0	0	0	1	1	1	1
22	8		2	8	1	0	1	0	1	0	1	1
					1	1	1	1	0	0	0	0
					0	0	1	1	1	1	0	0
23	8		2	16	1	1	1	1	0	0	0	0
					1	1	0	0	1	1	0	0
					1	0	1	0	1	0	1	0
					0	1	1	0	1	0	0	1

No	Dimension	Free	Denominator	Index	Defining basis							
24	8	F	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1
25	8		3	9	1 0	1 0	1 2	1 2	1 1	1 1	0 1	0 1
26	8		4	4	1	1	1	1	1	1	1	1
27	8	F	4	4	1	1	1	1	1	1	1	2
28	8	F	4	4	1	1	1	1	1	1	2	2
29	8	F	4	4	1	1	1	1	1	2	2	2
30	8		4	4	1	1	1	1	2	2	2	2
31	8		4	8	1 0	1 0	1 0	1 2	1 2	1 2	2 2	0 2
32	8		4	8	1 0	1 0	1 0	1 2	1 2	2 2	2 0	0 2
33	8		4	8	1 0	1 0	1 2	1 2	2 0	2 0	2 2	0 2
34	8		5	5	1	1	1	1	1	1	2	2
35	8	F	5	5	1	1	1	1	1	2	2	2
36	8		5	5	1	1	1	1	2	2	2	2
37	8		6	6	1	1	1	2	2	2	2	3
38	8		6	6	1	1	1	1	2	2	2	3
39	8		6	6	1	1	1	1	1	2	2	3
40	8		6	6	1	1	2	2	2	2	3	3
41	8		6	6	1	1	1	2	2	2	3	3
42	8		6	6	1	1	1	1	2	2	3	3

the lattice  $\Gamma^*$  and

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}^{1*} &= (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \\
 \mathbf{m}^{2*} &= (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{m}^{N*} &= (z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

the representations of the minimum in  $\Gamma^*$  (from (1)).

Let  $l$  be the matrix of that non-degenerate linear transformation, which takes  $\{e_i\}$  into  $\{e_i^*\}$  and  $\mathbf{m}^i$  into  $\mathbf{m}^{i*}$ . Obviously, the elements of  $l$  and also  $\det l$  are integers. We may consider a row of the matrix  $M$  as a point in the space  $E^N$  of the coefficients of the quadratic forms in  $n$  variables.

The transformation  $l$  of the space  $E^n$  induces in the space  $E^N$  a non-degenerate transformation, too (see [2] p. 34).

Hence in  $E^N$  a linearly independent system of  $N$  vectors (such as the rows of  $M$ , due to the perfectness of the lattice) passes into a linearly independent system of vectors. Thus the matrix  $M^*$ , which we assign to the vectors of (3), according to the construction of (2) from (1), does not degenerate either. Hence we have proved the perfectness of the lattice  $\Gamma^*$  and simultaneously Lemma 1.

**2.2. LEMMA 2.** *Suppose that the index of every p.m. in the lattice  $\Gamma$  is the same number  $p$ . Then all minimal vectors of  $\Gamma$  are in such a sublattice  $\Gamma^* \subset \Gamma$  that every p.m. is basic for  $\Gamma^*$ .*

PROOF. Let  $\Pi_0$  a p.m. (of index  $p$ ) in the lattice  $\Gamma$ , with edges  $e_1, \dots, e_n$  and  $\Gamma^*$  the lattice, constructed on  $\{e_i\}$ . We show that all further minimal vectors are in  $\Gamma^*$ , as well. Let us assume the contrary; this would mean that there is a minimum  $m \notin \Gamma^*$ , consequently its coordinates  $x_1, \dots, x_n$  in the system  $\{e_i\}$  are not all integers, let  $x_1 \neq 0$ . In this case for the p.m.  $\Pi_1$  with edges  $m, e_2, \dots, e_n$  we have  $\det \Pi_1 = x_1$ .

$$(4) \quad \Pi_1 : \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Since  $\det \Pi_0 = 1$  corresponds to index (volume)  $p$ , the following is true:

$$\text{ind } \Pi_1 = |\det \Pi_1| \cdot \text{ind } \Pi_0 = |x_1| p \neq p,$$

which contradicts our condition  $\text{ind } \Pi_1 = p$ .

Consequently, the coordinates of a minimum can be only integers that is  $m \in \Gamma^*$ . Noting that the index of every p.m. in  $\Gamma$  is the same number  $p$  (i.e. in  $\Gamma^*$  it is equal to 1), we can state that all of them are basic frames in  $\Gamma^*$ . With this we have proved Lemma 2.

PROOF OF THEOREM 1. Let us see Table I made after [5–6]. In the first column the number of the centering is given, in the second the dimension of the p.m. (or that of the lattice). We remark that a  $k$ -dimensional admissible centering is admissible in  $k+1$  dimensions, too. Indeed, if the centering is realized in a parallelepiped  $\Pi(k)$ , then it can be realized in  $\Pi(k+1)$  which is given by the edges of  $\Pi(k)$  and the unit vector  $e_{k+1}$ , perpendicular to all of these edges.

In the second column there are given those dimensions, in which the given centering is admissible.

The letter  $F$  will indicate free centerings. In the fourth column the denominator of a centering is given, that is, the least common denominator of the defining rows  $\{\alpha_i\}_{i=1}^{p-1}$ ; the fifth column contains the index of the centering, the final column the defining rows, not all of them, but only those, from which the others can be calculated (defining basis), so its number is less than  $p-1$ .

For example, in the case № 6 for  $p=3$ , we must have two defining vectors, but  $\alpha_1$  is one third of the diagonal of a 6-dimensional parallelepipedon, consequently  $\alpha_2 = 2\alpha_1$ . In Table I we give only one type from all classes of centerings (the "canonical" type).

We will make use of the result of Korkine and Zolotarief, which can be found in [2] as statement 7.3: "*For any  $n$  there exists only one class of perfect and extreme forms, in which the absolute value of the characteristic determinants do not exceed 1: this is the class of perfect form  $\varphi_0(n)$ .*"

We remark that they called characteristic determinant a determinant similar to (4), moreover, the class  $\varphi_0(n)$  corresponds to the lattice constructed on the regular simplex.

We rephrase the above statement as follows:



If in a lattice every p.m. is a basic one and the lattice is perfect, then this will be the lattice  $\Gamma_0(n)$ , constructed on the regular simplex.

According to Lemma 1 and 2, we could say in our Theorem that if a lattice  $\Gamma$  is perfect, it should be identical to  $\Gamma_0(n)$ . But this is impossible, since there is no admissible centering of the lattice  $\Gamma_0(n)$  for  $n \leq 8$  (or his basic p.m.  $\Pi_0$ ), in the course of which no new minimal vectors would appear. The appearance of a new minimal vector leads to new p.m. whose volume is smaller than ind  $\Pi_0$  (see (4)).

Let us take in  $\Gamma_0(n)$  a base  $e_1, \dots, e_n$  ( $e_i$  is minimal vector) whose metric form is

$$(5) \quad \varphi_0^{(n)} = 1/2 [\sum x_i^2 + (\sum x_i)^2]$$

and the corresponding parallelepiped is  $\Pi_0(n)$ .

According to Table I we go through all the admissible centerings to see whether they can be admissible in  $\Pi_0(n)$ . We emphasize some significant aspects.

1° We must examine only the free centerings. Indeed, when in the course of the centering a new minimum appears, it has some non-integer coordinates (in the basis  $\{e_i\}$ ). So, similarly as in (4) we get a p.m. of index not equal to  $p$ , which contradicts the assumption of Lemma 2. There remain only the centerings, marked by  $F$  in Table I.

2° Every  $k$ -dimensional face of  $\Pi_0(n)$  may be considered as a parallelepiped  $\Pi_0(k)$  of the lattice  $\Gamma_0(k)$ . Therefore, if  $\Pi_0^{(k)}$  cannot be centered according to a certain centering  $H$ , then  $\Pi_0^{(n)}$  could not be centered either in such a way, that one of its  $k$ -dimensional faces would be centered according to the above stated centering  $H$ . For example, we prove that the only 5-dimensional free centering N° 3 is not admissible for  $\Pi_0^{(5)}$  and then we may disregard all those  $n$ -dimensional centerings, which need the centering of a five-dimensional face of  $\Pi_0^{(n)}$  — these are the centerings N° 13, 19, 29 in Table I.

Let us consider now Table II. According to Remark 2° we have collected in Table II only those fundamental cases, from which the proof follows for all the others. It is a special property that in these centerings there is only one defining vector and the index is equal to the denominator. In the first column is the number of the centering in Table I, then comes the dimension, the index  $p$ , the vector  $p \cdot \alpha$ , when  $\alpha$  is the corresponding defining vector. In the fifth column such a vector  $v$  (appearing due to  $\alpha$ ) is given in the base  $\{e_i\}$ , its length is indicated in the sixth one. In the present case the length of the minimal vector is equal to 1. It is evident that when the vector  $v$  is shorter than 1, the centering is not admissible. If  $v$  is a minimal vector (these are the three cases, marked by \*), the centering is not free for  $\Pi_0^{(n)}$ . Consequently, according to statement 1°, the centering would lead to the appearance of a p.m. with a smaller volume, which is not possible by our assumption.

3° It is clear that the value in the sixth column does not change under the permutation of the variables  $v_i$ . Therefore, if we wish to examine to which type of a class does the centering of  $\Pi_0(n)$  belong it is not necessary to examine separately those types, the defining vectors of which derive from one another by a permutation of coordinates (or vectors  $e_i$ ).

Table II

№ in Table I	Dimension	Denominator	$p \cdot \alpha$ , where $\alpha$ is the defining row of the type	$p \cdot v$ , where $v$ is a vector of the centered lattice	$\varphi_0^{(n)}(v) =  v ^2$
3	5	2	1 1 1 1 1	-1 -1 1 1 1	6/8
4	6	2	1 1 1 1 1 1	-1 -1 -1 1 1 1	6/8
7	7	2	1 1 1 1 1 1 1	-1 -1 -1 1 1 1 1	8/8*
11	7	3	1 1 1 1 1 1 1	-2 -2 1 1 1 1 1	14/18
			-1 1 1 1 1 1 1	1 -2 1 1 1 1 1	14/18
			-1 -1 1 1 1 1 1	→	16/18
			-1 -1 -1 1 1 1 1	→	8/18
15	8	2	1 1 1 1 1 1 1 1	-1 -1 -1 -1 1 1 1 1	8/8*
24	8	3	1 1 1 1 1 1 1 1	-2 -2 1 1 1 1 1 1	18/18*
			-1 1 1 1 1 1 1 1	-1 -2 -2 1 1 1 1 1	14/18
			-1 -1 1 1 1 1 1 1	-1 -1 -2 1 1 1 1 1	12/18
			-1 -1 -1 1 1 1 1 1	→	12/18
			-1 -1 -1 -1 1 1 1 1	→	8/18
35	8	5	1 1 1 1 1 2 2 2	1 1 1 1 1 2 -3 -3	28/50
			-1 1 1 1 1 2 2 2	-1 1 1 1 1 2 -3 -3	28/50
			-1 -1 1 1 1 2 2 2	-1 -1 1 1 1 2 -3 -3	36/50
			-1 -1 -1 1 1 2 2 2	→	42/50
			-1 -1 -1 -1 1 2 2 2	→	26/50
			-1 -1 -1 -1 -1 2 2 2	→	18/50
			1 1 1 1 1 -2 -2 2	1 1 1 1 1 -2 -3 2	27/50
			-1 1 1 1 1 -2 2 2	→	42/50
			-1 -1 1 1 1 -2 2 2	→	26/50
			-1 -1 -1 1 1 -2 2 2	→	18/50
			-1 -1 -1 -1 1 -2 2 2	→	18/50
			-1 -1 -1 -1 -1 -2 2 2	→	18/50
			-1 -1 -1 -1 -1 -2 2 2	→	26/50
			-1 -1 -1 -1 -1 -2 2 2	→	26/50

4° When the denominator is equal to 2, then all types  $1/2(\pm 1, \dots, \pm 1)$  give the same lattice  $\Gamma$ , for the new point in  $\Pi_0$  is the same space (or face) center. So we consider only canonical types.

When the denominator is equal to 3 (or 5), then the different types involve different points of centerings in  $\Pi_0$  (the one third of different diagonals). We remark that the types with defining vectors  $\alpha$  and  $-\alpha$  are always equal.

From Table II it follows that the given centerings are not admissible or not free for  $\Pi_0(n)$ .

Let us denote the defining vector of the  $k$ -th centering in Table I by  $\alpha(k)$ . When among the coordinates of a vector five are equal to  $\frac{1}{2}$ , the others are zero, we say that the vector is  $\alpha(3)$ -like. The centering, involving an  $\alpha(3)$ -like vector is not admissible for  $\Pi_0(n)$  (see statement 3°). For the free centering

№ 13:  $2\alpha(13) - e_6 - e_7 = \alpha(3)$ ;

№ 19: the second defining vector is  $\alpha(3)$ -like;

№ 29:  $2\alpha(29) - e_6 - e_7 - e_8 = \alpha(3)$ ;

$$\text{№ 28: } 2\alpha(28) - e_7 - e_8 = \alpha(4);$$

$$\text{№ 27: } 2\alpha(27) - e_8 = \alpha(7).$$

Since all free centerings are considered, Theorem 1 is proved.

### § 3

3.1. THEOREM 2. *In every perfect  $n$ -lattice, given in any system of coordinates, there are at least  $n$  such minimal vectors, whose  $i$ -th coordinate is not 0 ( $i=1, \dots, n$ ).*

PROOF. Since the lattice is perfect, we may assume the existence of a matrix similar to (2) with a non-zero determinant. Without loss of generality we can take  $i=1$ . Our indirect assumption is that among the minimums there are at most  $n-1$  vectors whose first coordinates are different from 0. Then the  $N \times n$  matrix  $M_1$ , which is constructed from the 1st,  $(n+1)$ st,  $\dots$ ,  $(n+n-1)$ st columns of matrix  $M$  has at most  $n-1$  non-zero rows. Therefore, in  $M_1$  all minors of rank  $n$  are zero. In order to calculate  $\det M$ , let us apply the Laplace theorem and make use of the columns of matrix  $M_1$ . The result will be  $\det M=0$ . The contradiction proves Theorem 2.

3.2. THEOREM 3. *In every perfect  $n$ -lattice, given in any system of coordinates, there is at least one minimal vector, whose  $i$ -th and  $j$ -th coordinates are different from 0  $1 \leq i < j \leq n$ .*

PROOF. Without loss of generality we can take  $i=1, j=2$ . Let us study the matrix (2). If there is no minimal vector with non-zero 1st and 2nd coordinates, then the  $(n+1)$ st column of matrix  $M$  has only 0 elements and so  $\det M=0$ . The contradiction proves Theorem 3.

REMARK. The geometrical meaning of Theorem 3 is the following: A perfect  $n$ -lattice does not possess two  $(n-1)$ -dimensional sublattices, which together would include all the minimal vectors.

### REFERENCES

- [1] DELONE, B. N., Geometry of positive quadratic forms, *Uspehi Mat. Nauk* 3 (1937), 16—22; 4 (1938), 102—164 (in Russian).
- [2] RYŠKOV, S. S. and BARANOVSKIĬ, E. P., Classical methods of the theory of lattice packings, *Uspehi Mat. Nauk* 34 (1979), 3—63 (in Russian). MR 81a: 10045.
- [3] VORONOI, G. F., Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques, Première mémoire, *J. Reine Angew. Math.* 133 (1908), 97—178.
- [4] HOFREITER, N., Zur Geometrie der Zahlen I, II., *Monatsh. Math. Phys.* 40 (1933), 181—192. Zbl 6. 393; 42 (1935), 101—112. Zbl 11. 247.
- [5] RYŠKOV, S. S., On the problem of determining perfect quadratic forms of several variables, *Number theory, mathematical analysis and their applications, Trudy Mat. Inst. Steklov* 142 (1976), 215—239. MR 58 # 27807. English translation in *Proc. Steklov Inst. Math.* 142 (1979).
- [6] ZAHAROVA, N. V., Centerings of eight-dimensional lattices that preserve a frame of successive minima, Geometry of positive quadratic forms, *Trudy Mat. Inst. Steklov.* 152 (1980), 97—123 (in Russian). MR 82k: 10033.

(Received July 31, 1984)

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR  
GEOMETRIA TANSZÉK  
RÁKÓCZI ÚT 5  
H-1088 BUDAPEST  
HUNGARY



## ÜBER DIE LOCKERE DOPPELGITTERFÖRMIGE 2-FACHE ÜBERDECKUNG DER EBENE MIT EINHEITSKREISEN

ÁGOTA H. TEMESVÁRI

*Herrn Professor Dr. L. Fejes Tóth zum 70. Geburtstag gewidmet*

1. Wir betrachten ein System von abgeschlossenen Einheitskreisen in der euklidischen Ebene, das eine 2-fache Überdeckung bildet, d.h., jeder Punkt der Ebene gehört zu mindestens zwei Kreisen. Wir lagern Kreise in den mindestens 3-fach überdeckten Ebenenteilen. Es sei  $\varrho$  das Supremum der Radien dieser Kreise. Dann wird  $\varrho$  die Lockerheit der gegebenen 2-fachen Überdeckung der Ebene mit Einheitskreisen genannt. L. Fejes Tóth [2] hat die Frage aufgeworfen, wie groß  $\inf \varrho$  ist, wenn wir alle 2-fachen Überdeckungen mit Einheitskreisen betrachten, und bei welchen Überdeckungen dieses Infimum auftreten kann. Er hat eine 2-fache Überdeckung mit Einheitskreisen, bei der die Lockerheit minimal ist, lockere 2-fache Überdeckung der Ebene mit Einheitskreisen genannt.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Lockerheit der doppelgitterförmigen 2-fachen Überdeckungen der Ebene mit Einheitskreisen.

Es seien  $A$  und  $B$  linear unabhängige Vektoren,  $k$  und  $m$  seien ganze Zahlen. Mit  $\Gamma$  bezeichnen wir das Gitter, das die Vektoren  $kA + mB$  für jeden ganzzahligen Wert von  $k$  und  $m$  bilden.

Es sei  $H$  eine beliebige Punktmenge und  $Z$  ein beliebiger Vektor. Mit  $H + Z$  wird die Punktmenge bezeichnet, die aus  $H$  mit der Verschiebung um  $Z$  hervorgeht. Ein Doppelgitter wird als die Vereinigung von  $\Gamma$  und  $\Gamma + Z$  definiert und wird mit  $\Sigma$  bezeichnet.

Es sei  $K$  ein Einheitskreis. Die Menge  $K(\Gamma) := \{K + Y \mid Y \in \Gamma\}$  heißt gitterförmige Anordnung von  $K$ . Entsprechend heißt  $K(\Sigma) := \{K + Y \mid Y \in \Sigma\}$  doppelgitterförmige Anordnung von  $K$ .

Wir führen noch einige Bezeichnungen ein.  $O$  sei der Ursprungspunkt,  $A$  und  $B$  seien die Basisvektoren von  $\Gamma$ . Es seien  $|A| = a$ ,  $|B| = b$  und  $\sphericalangle(AOB) = \alpha$ . Wir können annehmen, daß  $\Gamma$  eine normale Darstellung hat, d.h., die folgenden Bedingungen für  $A$  und  $B$  gelten:

$$(1) \quad |A| \leq |B| \leq |B - A|, \quad 0 < \sphericalangle(AOB) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Wir können annehmen, daß  $O$  der Mittelpunkt von  $K$  bei der gitterförmigen Anordnung  $K(\Gamma)$  ist.

Mit  $k(X, r)$  bezeichnen wir den Kreis mit dem Mittelpunkt  $X$  und dem Radius  $r$ . Der durch die Punkte  $X, Y, Z$  bestimmte Kreis wird mit  $k[XYZ]$  bezeichnet, sein Radius mit  $r[XYZ]$ .



## 2. In dieser Arbeit beweisen wir den folgenden

**SATZ.** Die Lockerheit einer doppelgitterförmigen 2-fachen Überdeckung der Ebene mit Einheitskreisen ist  $\geq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Die Lockerheit  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  tritt bei unendlich vielen doppelgitterförmigen 2-fachen Überdeckungen mit Einheitskreisen auf.

**BEWEIS.** Betrachten wir eine beliebige doppelgitterförmige Einheitskreisüberdeckung  $K(\Sigma)$ . Wegen  $\Sigma = \Gamma \cup (\Gamma + Z)$  ist  $K(\Sigma) = K(\Gamma) \cup K(\Gamma + Z)$ . Wenn  $K(\Gamma)$  keine Überdeckung ist, dann müssen wir die durch  $K(\Gamma)$  nicht überdeckten Punkte mit  $K(\Gamma + Z)$  mindestens 2-fach überdecken. Das bedeutet, daß  $|A| = a < 2$  gilt.

Nach unserer Voraussetzung hat  $\Gamma$  eine normale Darstellung. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $Z$  in der Darstellung  $\Sigma = \Gamma \cup (\Gamma + Z)$  eine solche Verschiebung ist, bei der der Endpunkt von  $Z$  im Rechteck  $OAYX$  liegt, wo  $OX$  die Hälfte der zu  $B(B-A)$  gehörigen Höhe des Dreiecks  $OB(B-A)$  (Abb. 1) ist.

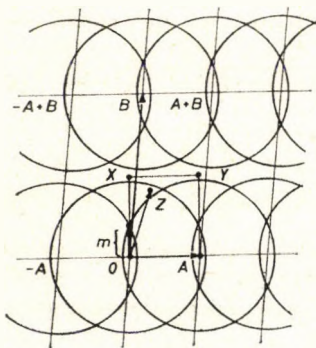


Abb. 1

**2.1.** Wenn  $b \geq 2$  und  $1 < a < 2$  für  $\Gamma$  gelten, dann sind die Bereiche  $(K + kA) \cap (K + (k+1)A)$  nicht leer und paarweise disjunkt. Wegen  $b \geq 2$  hat ein Kreis von  $\bigcup_k (K + kA)$  mit einem Kreis von  $\bigcup_k (K + B + kA)$  höchstens einen Punkt gemeinsam. Daraus folgt schon, daß es keinen Vektor  $Z$  gibt, für den  $K(\Gamma + Z)$  die durch  $K(\Gamma)$  nicht überdeckten Teile der Ebene 2-fach überdeckt. Deshalb könnte  $K(\Sigma) = K(\Gamma) \cup K(\Gamma + Z)$  höchstens eine einfache Überdeckung sein, d.h., dieser Fall kann nicht vorkommen.

**2.2.** Es seien  $b > 2$  und  $a \leq 1$  (Abb. 1). Wenn  $a < \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist, dann gelten  $1 - a > 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  und  $\sqrt{1 - a^2} > \frac{1}{2}$ . Deshalb können wir einen Kreis um  $O$  schlagen, dessen Radius  $> 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist und der in einem mindestens 3-fach überdeckten



Ebenenteil liegt. Das bedeutet aber, daß unter diesen Bedingungen die Lockerheit größer als  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist.

Im weiteren können wir annehmen, daß  $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq 1$  ist. Wir betrachten die Kreise aus  $\bigcup_k (K + kA)$  und aus  $\bigcup_k (K + B + kA)$ . Wegen  $b > 2$  ist der durch  $K(\Gamma)$  nicht überdeckte Ebenenteil, der in dem durch die Geraden  $OA$  und  $B(A+B)$  begrenzten Streifen liegt, zusammenhängend. Mit  $U$  bezeichnen wir diesen Ebenenteil. Es sei  $W$  der Ebenenteil, der durch die Kreise von  $\bigcup_k (K + kA)$  2-fach überdeckt ist. Weil  $K(\Sigma)$  eine 2-fache Überdeckung ist, gibt es einen Vektor  $Z$  derart, daß  $U$  von  $W + Z$  überdeckt ist.

Wir betrachten die auf  $OA$  senkrechten Sehnen von  $U$ . Es ist leicht einzusehen, daß jede von den kürzesten Sehnen durch irgendeinen von den Punkten  $\frac{B}{2} + kA$  hindurchgeht. (Im Falle  $|B| = |B - A|$  gehen kürzeste Sehnen auch durch die Punkte  $\frac{B}{2} + (2k+1)\frac{A}{2}$ .) Mit  $h$  bezeichnen wir die Hälfte der Längen dieser kürzesten Sehnen. Wir betrachten die auf  $OA$  senkrechten Sehnen auch bei  $W$ . Jede von den kürzesten Sehnen geht durch irgendeinen von den Punkten  $kA$ . Mit  $m$  bezeichnen wir die Hälfte der Längen dieser kürzesten Sehnen.

Ist die Überdeckung  $K(\Sigma)$  2-fach, dann gilt  $m \geq h$ . Wegen  $h = \frac{b}{2} \sin \alpha - \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cos^2 \alpha}$  und  $m = \sqrt{1 - a^2}$  kann man die Ungleichung  $m \geq h$  folgenderweise aufschreiben:

$$(2) \quad \left(\frac{b^2}{4} - a^2\right)^2 \leq b^2(1 - a^2) \sin^2 \alpha.$$

Wenn  $\angle(OZA) > \frac{\pi}{2}$  ist, d.h.,  $\left|Z - \frac{A}{2}\right| < \left|\frac{A}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$  gilt, dann können wir einen Kreis z.B. um  $\frac{A}{2}$  in dem durch die Kreise  $k(0, 1)$ ,  $k(A, 1)$  und  $k(Z, 1)$  bedeckten Ebenenteil schlagen, dessen Radius  $> 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist. Das bedeutet aber, daß die Lockerheit auch in diesem Fall  $> 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist.

Wenn  $\angle(OZA) \leq \frac{\pi}{2}$  ist, d.h., das Dreieck  $OZA$  nicht stumpfwinklig ist, dann beweisen wir, daß die Ungleichung  $r[OZA] \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  gilt. Der Radius  $r[OZA]$  ist maximal, wenn  $Z = X$  oder  $Z = Y$  ist. Es gilt also

$$(3) \quad r^2[OZA] \leq r^2[OXA] = r^2[OYA] = \frac{1}{4}(a^2 + |X|^2) \leq \frac{1}{4}\left(a^2 + \frac{b^2}{4}\right).$$

Aus (2) folgt  $\left(\frac{b^2}{4} - a^2\right)^2 \leq (1-a^2)b^2$ . Daraus ergibt sich  $b^2 \leq 4(2-a^2) + 8\sqrt{1-a^2}$ , deshalb gilt

$$(4) \quad \frac{1}{4} \left( a^2 + \frac{b^2}{4} \right) \leq \frac{1}{4} (2 + 2\sqrt{1-a^2}) \leq \frac{3}{4}$$

wegen  $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq 1$ . Aus (3) und (4) folgt  $r[OZA] \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Die Gleichheit tritt in dem Fall auf, daß  $Z=X$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  und  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$  gelten. Ist  $r[OZA] < \frac{\sqrt{3}}{2}$ , dann können wir einen Kreis um den Mittelpunkt des Kreises  $k[OZA]$  in einem mindestens 3-fach überdeckten Ebenenteil schlagen, dessen Radius größer als  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist.  $r[OZA] = \frac{\sqrt{3}}{2}$  gilt bei einer gitterförmigen 2-fachen Überdeckung von Einheitskreisen. In diesem Fall ist aber die Lockerheit  $> 0,153\,996\dots > 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  nach [3].

**2.3.** Es sei  $b \leq 2$ . Nehmen wir an, daß  $K(\Gamma)$  keine Überdeckung ist. Wenn  $a < \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist, dann können wir einen Kreis z.B. um  $O$  in einem mindestens 3-fach überdeckten Ebenenteil schlagen, dessen Radius  $> 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist. Deshalb können wir annehmen, daß  $a \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  gilt.

Wir betrachten die Kreise  $k(0, 1)$ ,  $k(A, 1)$ ,  $k(B, 1)$  und  $k(A+B, 1)$  (Abb. 2).

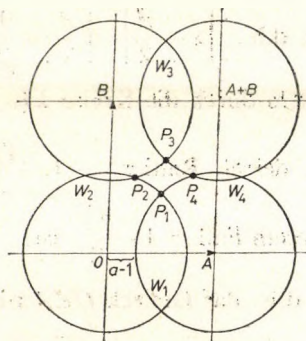


Abb. 2

Es seien  $W_1 = k(0, 1) \cap k(A, 1)$ ,  $W_2 = k(0, 1) \cap k(B, 1)$ ,  $W_3 = k(B, 1) \cap k(A+B, 1)$  und  $W_4 = k(A+B, 1) \cap k(A, 1)$ , weiterhin seien  $P_1, P_2, P_3, P_4$  die Schnittpunkte der entsprechenden Kreislinien, die im Parallelogramm  $OA(A+B)B$  liegen. Es ist

klar, daß das Viereck  $P_1P_2P_3P_4$  ein Parallelogramm ist und die Bereiche  $W_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) in je einem Scheitelwinkelbereich der Winkel des Parallelogramms  $P_1P_2P_3P_4$  liegen. Daraus folgt: Wenn ein Translat irgendeines  $W_i$  einen gemeinsamen inneren Punkt mit dem Parallelogramm  $P_1P_2P_3P_4$  hat, dann haben die Translats der anderen drei Bereiche keinen gemeinsamen inneren Punkt mit ihm. Im Parallelogramm  $P_1P_2P_3P_4$  kann man den in  $OA(A+B)B$  liegenden Ebenenteil  $U$  finden, der durch die Kreise von  $K(\Gamma)$  nicht überdeckt ist.  $K(\Sigma)$  ist eine 2-fache Überdeckung, deshalb müssen wir den Ebenenteil  $U$ , d.h. das Parallelogramm  $P_1P_2P_3P_4$ , mit der Verschiebung der Bereiche  $W_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) überdecken. Aus dem vorigen folgt, daß dies nur in dem Fall möglich ist, daß genau einer von den verschobenen Bereichen  $W_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) dieses Parallelogramm überdeckt.

**2.3.1.** Nehmen wir an, daß ein Translat von  $W_1$  den Ebenenteil  $U$  überdeckt. Dann muß die Ungleichung

$$(5) \quad a - 1 \leq \sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} \sin \alpha$$

gelten.

**2.3.1.1.** Zuerst nehmen wir an, daß  $b \geq \sqrt{3}$  gilt. Aus (5) folgt  $a \leq \frac{3}{2}$ . Der Punkt  $Z$  wurde so gewählt, daß  $Z$  im Rechteck  $OAYX$  liegt.

Ist  $\angle(OZA) > \frac{\pi}{2}$ , dann können wir einen Kreis um  $\frac{A}{2}$  in dem durch die Kreise  $k(0, 1)$ ,  $k(A, 1)$  und  $k(Z, 1)$  überdeckten Ebenenteil schlagen, dessen Radius größer als  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist.

Wenn  $\angle(OZA) \leq \frac{\pi}{2}$  gilt, dann betrachten wir den Kreis  $k[OZA]$ . Es gilt offenbar

$$(6) \quad r^2[OZA] \leq r^2[OXA] = \frac{1}{4} \left( a^2 + \frac{b^2}{4} \sin^2 \alpha \right).$$

Ist  $a \leq 1$ , dann gilt  $r[OZA] \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ , d.h., wir können einen Kreis um den Mittelpunkt des Kreises  $k[OZA]$  in einem mindestens 3-fach überdeckten Ebenenteil schlagen, dessen Radius  $> 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist. Folglich können wir annehmen, daß  $a > 1$  gilt. Aus (5) und (6) ergibt sich

$$(7) \quad r^2[OZA] \leq \frac{1}{4} \left( 1 + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} \right) \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} \right).$$

Weil  $b \geq \sqrt{3}$  ist, folgt  $r[OZA] \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Im Fall  $r[OZA] < \frac{\sqrt{3}}{2}$  können wir einen Kreis um den Mittelpunkt von  $k[OZA]$  in einem mindestens 3-fach überdeckten Ebenenteil schlagen, dessen Radius  $> 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist. Die Gleichheit  $r[OZA] = \frac{\sqrt{3}}{2}$

tritt nur im Fall  $Z=X$ ,  $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ,  $b=\sqrt{3}$  auf. Die entsprechende Überdeckung ist aber gitterförmig und folglich ist die Lockerheit  $>1-\frac{\sqrt{3}}{2}$  nach [3].

**2.3.1.2.** Es sei  $b<\sqrt{3}$ . Weil  $a\leq b<\sqrt{3}$  ist, können wir Kreise um die Punkte  $-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}, \frac{B}{2}$  in den von  $K(\Gamma)$  mindestens 2-fach überdeckten Ebenenteilen schlagen, deren Radien  $>1-\frac{\sqrt{3}}{2}$  sind.  $Z$  liegt im Rechteck  $OAYX$ , deshalb gibt es einen Gitterpunkt aus  $\Gamma+Z$ , der im Parallelogramm  $\left(-\frac{A}{2}\right)\left(\frac{A}{2}\right)\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{B-A}{2}\right)$  (Abb. 3) liegt. Mit  $G$  bezeichnen wir diesen Punkt. Weil die Kreise  $k\left(\frac{B}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,

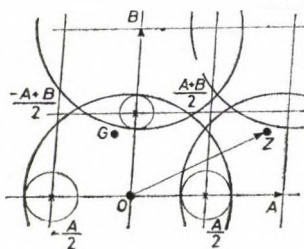


Abb. 3

$k\left(-\frac{A}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  das Parallelogramm  $\left(-\frac{A}{2}\right)O\left(\frac{B}{2}\right)\left(\frac{B-A}{2}\right)$  und die Kreise  $k\left(\frac{B}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $k\left(\frac{A}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  das Parallelogramm  $O\left(\frac{A}{2}\right)\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{B}{2}\right)$  überdecken, ist der Abstand eines beliebigen Punktes des Parallelogramms

$$\left(-\frac{A}{2}\right)\left(\frac{A}{2}\right)\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{B-A}{2}\right)$$

von  $-\frac{A}{2}$  oder  $\frac{A}{2}$  oder  $\frac{B}{2}$  kleiner als  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Folglich überdeckt  $k(G, 1)$  mindestens einen von den Kreisen, die wir um  $-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}$  und  $\frac{B}{2}$  in den von  $K(\Gamma)$  mindestens 2-fach überdeckten Ebenenteilen geschlagen haben. Die Lockerheit ist also  $>1-\frac{\sqrt{3}}{2}$  auch in diesem Fall.



**2.3.2.** Nehmen wir an, daß ein Translat von  $W_2$  den Ebenenteil  $U$  überdeckt. In diesem Fall gilt

$$(8) \quad b-1 \leq \sqrt{1-\frac{a^2}{4}} \sin \alpha.$$

**2.3.2.1.** Ist  $b < \sqrt{3}$ , dann kann man die Richtigkeit der Behauptung des Satzes ebenso wie in 2.3.1.2 beweisen.

**2.3.2.2.** Es sei  $b \geq \sqrt{3}$ . Aus (8) ergibt sich  $a \leq 2\sqrt{2\sqrt{3}-3} = 1,3625... < \sqrt{3}$ .

Wir betrachten wieder das Dreieck  $OZA$ . Wenn  $\sphericalangle(OZA) > \frac{\pi}{2}$  ist, d.h.,  $\left|Z - \frac{A}{2}\right| < \left|\frac{A}{2}\right| < \frac{\sqrt{3}}{2}$  gilt, dann können wir einen Kreis um  $\frac{A}{2}$  in dem durch die Kreise  $k(0, 1)$ ,  $k(A, 1)$ ,  $k(Z, 1)$  überdeckten Ebenenteil schlagen, dessen Radius  $> 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist.

Ist  $\sphericalangle(OZA) \leq \frac{\pi}{2}$ , dann sehen wir wieder die Richtigkeit der Ungleichung  $r[OZA] < \frac{\sqrt{3}}{2}$  ein. Wie in den vorigen Fällen ergibt sich

$$(9) \quad r^2[OZA] \leq r^2[OXA] = \frac{1}{4} \left( a^2 + \frac{b^2}{4} \sin^2 \alpha \right).$$

Wenn  $a \leq 1$  ist, dann gilt  $r[OZA] \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Im folgenden können wir annehmen, daß  $a > 1$  ist. Mit der Anwendung von (8) ergibt sich

$$(10) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{4} \left( a^2 + \frac{b^2}{4} \sin^2 \alpha \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{4} \left( a^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \left( 1 + 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} + \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right) \sin^2 \alpha \right) \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{15}{16} a^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} \right). \end{aligned}$$

Aus (9) und (10) folgt, daß wir die Ungleichung

$$(11) \quad \frac{1}{2} + \frac{15}{16} a^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} < 3$$

einsehen müssen. (11) und die Ungleichung

$$(12) \quad 0 < 225a^4 - 1184a^2 + 1536$$

sind in diesem Fall äquivalent. Die rechte Seite von (12) nimmt ab, wenn  $a$  zunimmt,

deshalb ist ihre Minimumstelle  $a_0 = 2\sqrt{2\sqrt{3}-3}$ . Man kann ausrechnen, daß (12) für  $a_0$  gilt. Das bedeutet, daß wir einen Kreis um den Mittelpunkt von  $k[OZA]$  in einem mindestens 3-fach überdeckten Ebenenteil schlagen können, dessen Radius  $> 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist.

Die Fälle 2.1—2.3 zeigen: Wenn  $K(\Gamma)$  bei einer doppelgitterförmigen 2-fachen Einheitskreisüberdeckung  $K(\Sigma) = K(\Gamma) \cup K(\Gamma + Z)$  keine Überdeckung ist, dann ist die Lockerheit dieser Überdeckungen  $> 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**2.4.** Ist  $K(\Gamma)$  eine Überdeckung, dann bildet  $K(\Sigma) = K(\Gamma) \cup K(\Gamma + Z)$  eine 2-fache Überdeckung für einen beliebigen Vektor  $Z$ .

Die Lockerheit von  $K(\Gamma)$  ist  $\cong 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Die Gleichheit tritt nur dann auf, wenn  $|A| = |B| = \sqrt{3}$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  für  $\Gamma$  gelten, d.h.,  $\Gamma$  ein reguläres Dreiecksgitter ist. Dieses Gitter wird mit  $\Gamma_s$  bezeichnet. Es ist offenbar, daß die Lockerheit der doppelgitterförmigen 2-fachen Überdeckung  $K(\Gamma_s) \cup K(\Gamma_s + Z) \cong 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist. Die Gleichheit tritt z.B. bei dem Vektor  $Z$  auf, für den  $Z \perp A$  und  $|Z| = 1$  (Abb. 4) gelten.

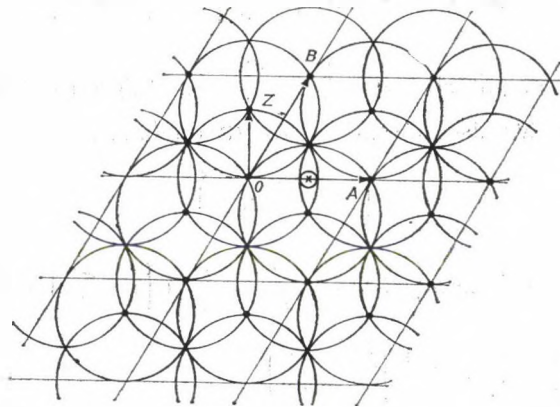


Abb. 4

Es ist klar, daß wir mit einer kleinen Veränderung von  $Z$  solche doppelgitterförmige 2-fache Überdeckungen bekommen, deren Lockerheit wieder  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist. Auch im Fall  $Z = O$  bekommen wir eine lockere Überdeckung. Wir bemerken, daß die weiteren lockeren doppelgitterförmigen 2-fachen Überdeckungen von Einheitskreisen nach [3] nicht gitterförmig sein können.

Damit haben wir den Beweis des Satzes beendet.



## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Zweite verbesserte und erweiterte Auflage, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 65, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1972. *MR* 50 # 5603.
- [2] FEJES TÓTH, L., Close packing and loose covering with balls, *Publ. Math. Debrecen* 23 (1976), 323—326. *MR* 55 # 1224.
- [3] HORVÁTH, J., Lockere gitterförmige  $k$ -fache Kreis- und Kugelüberdeckungen, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* 20 (1985), 59—95.

(Eingegangen am 15. Oktober 1984)

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR  
GEOMETRIA TANSZÉK  
RÁKÓCZI ÚT 5.  
H—1088 BUDAPEST  
HUNGARY



## CIRCULAR DISK PATTERNS ON A SPHERE

BRANKO GRÜNBAUM and G. C. SHEPHARD

*Dedicated to László Fejes Tóth on his seventieth birthday*

In many of his publications L. Fejes Tóth discusses arrangements of circular disks in the Euclidean plane  $E^2$ . These often arise as extremal configurations in packing and covering problems, but at times are considered as circular disk patterns. For example, in [3, pp. 47—52] in discussing plane ornaments, Fejes Tóth reproduces diagrams of the 31 “coherent” open circular disk patterns in the plane. These were originally investigated by Niggli [10] and Sinogowitz [11]; the latter showed that, in addition to these coherent patterns there are exactly one hundred other “types” of periodic open circular disk patterns (see [7] for more details about this and related classifications).

Analogous patterns on the 2-sphere  $S$  in  $E^2$  whose motifs are circular disks (circular spherical caps) have also attracted some attention. For example we mention another paper of Fejes Tóth [2]; see also the recent article by Tarnai [12] and the references given there. Our aim here is to present a complete enumeration of the types of circular disk patterns on  $S$ . In the first section of the paper we review the necessary terminology and definitions. In particular, we shall explain the method of classification that we shall use. This is by *homeomerism*, which we have already applied in several other contexts (see, for example, [6], [7], [8] and [9]). It yields a rigorous mathematical procedure for determining whether two given patterns are of the same “type” or not — clearly a prerequisite for attempting the solution of any enumeration problem. It turns out that there are nine families of types of closed circular disk patterns on  $S$ , each family depending on a positive integer parameter, and 25 other types of such patterns. In the case of open circular disk patterns there are 28 families and 94 other types of patterns. In the second section of the paper we shall explain briefly how the enumeration of types is carried out, and this section will also include tables giving further information as well as diagrams representing all the types.

The only previous attempt at enumerating circular disk patterns on the sphere appears to be that of Finsterwalder [4]. He considered only what we call “coherent” patterns and relied on his intuition to classify them, without explicitly formulating any principle of classification. Finsterwalder missed a number of types (see below, Table I and Remark (B) in Section 3). His paper is illustrated by meticulously hand-drawn diagrams showing projections of the spherical patterns onto the plane, using

---

Research supported by the National Science Foundation grant MOS830 1971.

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A45; Secondary 51M20, 51F99, 05B40.

*Key words and phrases*. Spherical pattern, circular disk, classification, homeomeric type, homeomeric type.

a variant of the stereographic projection. It seems to us that these do not represent the patterns as well or as usefully as the computer drawn diagrams of parallel projections presented here. Our diagrams were prepared using the ICL 1904S computer at the University of East Anglia, Norwich, England, coupled to a Calcomp 1051 graph-plotter, and using GINO-F software. We are grateful to the director and staff of the Computing Centre for providing the facilities that enabled this work to be carried out.

For a more general treatment of spherical patterns the reader is referred to our earlier paper [8]. We shall have occasion to draw on the material presented there, though we shall attempt to make the treatment here self-contained.

### 1. Definitions and terminology

A *spherical pattern*  $\mathcal{P}$  is a finite family  $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$  of sets  $M_j$ , each of which is a subset of a given 2-sphere  $S$ , such that the following conditions hold:

SP1 There exists a set  $M$ , called the *motif* of  $\mathcal{P}$ , such that each of the sets  $M_j$  is congruent to  $M$ , that is, is an isometric image of  $M$ . The sets  $M_j$  are called the *copies of the motif*.

SP2 The copies of the motif are pairwise disjoint.

SP3 The *symmetry group*  $G(\mathcal{P})$ , by which we mean the group of isometries that leave  $\mathcal{P}$  invariant, is transitive on the copies of the motif.

We are here interested in those spherical patterns for which the motif  $M$  is an (open or closed) circular disk (circular cap) on  $S$ , and these will be referred to as (open or closed) *circular disk patterns* on  $S$ . Except in the cases where  $\mathcal{P}$  contains only one disk ( $n=1$ ) or consists of two antipodal disks, it is clear that the symmetry group  $G(\mathcal{P})$  will necessarily be discrete. In addition, all symmetries of  $\mathcal{P}$  must leave fixed one point, namely the centre of the sphere  $S$ . Such discrete groups of isometries in  $E$  are well-known; details can be found in [1], [8] and [9]. In the notation of Coxeter and Moser [1], there exist seven families of such groups, denoted by  $[q]$ ,  $[q]^+$ ,  $[2, q]$ ,  $[2, q]^+$ ,  $[2, q^+]$ ,  $[2^+, 2q]$ ,  $[2^+, 2q^+]$ , each depending on a positive integer parameter  $q$ , and, in addition, seven other groups (the "polyhedral groups") denoted by  $[3, 3]$ ,  $[3, 3]^+$ ,  $[3, 4]$ ,  $[3, 4]^+$ ,  $[3^+, 4]$ ,  $[3, 5]$ ,  $[3, 5]^+$ .

If the union of the closures of the disks in an open circular disk pattern  $\mathcal{P}$  forms a connected set, then  $\mathcal{P}$  is called *coherent*. It seems that many authors have been especially attracted to the consideration of such patterns, and they occur in certain extremal problems.

A very coarse method of classifying patterns is by their symmetry groups. But clearly this is not satisfactory for many purposes, since circular disk patterns on  $S$  may have the same symmetry group (and so be of the same "type" in this classification) yet have different numbers of copies of the motif. This drawback may be overcome by using a finer method of classification known as *homeomerism*, which we have described elsewhere (see [6], [7] and [8]). However, in the present context the most suitable method of classification is by *homeomerism*, which we shall now describe. This classification seems to coincide with our intuitive ideas of which patterns

should be considered "the same", and appears to be what Finsterwalder was mainly striving after. It has the feature of taking into account the possibility that open circular disks on  $S$  may "touch", by which we mean that though the disks are disjoint their closures may have a point in common.

Let  $\mathcal{P}_1 \subset S_1$  and  $\mathcal{P}_2 \subset S_2$  be two given spherical patterns and suppose that there exists a homeomorphism  $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$  such that  $\varphi(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}_2$ . Suppose moreover that for every symmetry  $s_1$  of  $\mathcal{P}_1$ ,  $\varphi s_1 \varphi^{-1}$  is a symmetry of  $\mathcal{P}_2$  of the same kind (reflection, rotation, or rotary reflection) as  $s_1$  and for every symmetry  $s_2$  of  $\mathcal{P}_2$ ,  $\varphi^{-1} s_2 \varphi$  is a symmetry of  $\mathcal{P}_1$ . Then  $\mathcal{P}_1$  and  $\mathcal{P}_2$  are said to be of the *same homeomeric type*. An informal way to understand homeomerism is to regard the patterns  $\mathcal{P}_1$  and  $\mathcal{P}_2$  as being of the same type if the homeomorphism  $\varphi$ , whose existence is postulated in the definition, not only maps  $S_1$  onto  $S_2$ , and  $\mathcal{P}_1$  onto  $\mathcal{P}_2$ , but maps every symmetry-element of  $G(\mathcal{P}_1)$  (that is, centre of  $k$ -fold rotation, great-circle of reflection or of  $j$ -fold rotary reflection) onto a symmetry-element of  $G(\mathcal{P}_2)$  of the same kind; moreover, the analogous situation holds for  $\varphi^{-1}$ .

With each (open or closed) circular disk pattern  $\mathcal{P}$  there is a naturally associated *dot pattern*, that is, a spherical pattern whose motif is a single point. To obtain the latter we replace each circular disk of  $\mathcal{P}$  by a point, namely its centre. The finite set of points that arise in this way clearly forms a spherical dot pattern. As is easily verified, the homeomeric type of the resulting dot pattern is determined by the homeomeric type of  $\mathcal{P}$ . Moreover, for a closed circular disk pattern the homeomeric type is determined by the homeomeric type of the associated spherical dot pattern. Since these have been determined in [8, Theorem 3], this yields the following

**THEOREM.** *In the homeomeric classification of closed circular disk patterns on the 2-sphere there are nine families of types, each family depending on a positive integer parameter, and 25 other types.*

The patterns listed in Table I in the column marked F1, and specified in Figures 2, 3, 4 and 5 by having F1 following the first hyphen in their symbol, may be regarded as illustrating these types.

## 2. Enumeration of homeomeric types of open circular disk patterns

The classification of open circular disk patterns on the sphere is more interesting than that of closed circular disk patterns since topological considerations enter; the question as to whether or not the circles "touch" becomes relevant. To begin with we consider only those patterns for which each circular disk (copy of the motif) is strictly smaller than a hemisphere.

If  $\mathcal{P}$  is a spherical pattern which has an open set  $M$  as motif, we shall say that  $\mathcal{P}$  is *isolated* if the copies of the motif of  $\mathcal{P}$  have disjoint closures. Given any closed circular disk pattern, the interiors of its disks form an isolated open circular disk pattern, and the closures of the copies of the motif of any isolated open circular disk pattern form a closed circular disk pattern. It follows that there is a natural correspondence between the homeomeric types of isolated open circular disk patterns, and those of closed circular disk patterns, and hence of spherical dot patterns. Therefore the enumeration of the isolated open circular disk patterns in Table I and the corresponding illustrations in Figures 2 to 5, derived from the enumeration

*Table I*  
*The homeomeric types*

Associated Dot Pattern Type	Number Circular Disks	Symmet- ry Group	F1	F2	F3	F4	F5
SDP1( $q$ ), $q \cong 2$	$2q$	$[q]$	SP1( $q$ )	SP2( $q$ )			
SDP2( $q$ ), $q \cong 2$	$q$	$[q]$	SP2( $q$ )				
SDP3( $\infty$ )	1	$[\infty]$	SP3( $\infty$ )				
SDP6( $q$ ), $q \cong 2$	$2q$	$[2, q]$	SP6( $q$ )	SP7( $q$ ) SP8( $q$ )		SP9( $q$ )	
SDP7( $q$ ), $q \cong 3$	$2q$	$[2, q]$	SP7( $q$ )	SP9( $q$ )			
SDP8( $q$ ), $q \cong 2$	$2q$	$[2, q]$	SP8( $q$ )	SP9( $q$ )			
SDP9( $q$ ), $q \cong 2$	$q$	$[2, q]$	SP9( $q$ )				
SDP10( $\infty$ )	2	$[2, \infty]$	SP10( $\infty$ )				
SDP11( $q$ ), $q \cong 2$	$2q$	$[2, q]^+$	SP11( $q$ )	SP12( $q$ )			
SDP17( $q$ ), $q \cong 2$	$4q$	$[2^+, 2q]$	SP17( $q$ )	SP18( $q$ ) SP19( $q$ )			
SDP18( $q$ ), $q \cong 2$	$2q$	$[2^+, 2q]$	SP18( $q$ )				
SDP23	24	$[3, 3]$	SP23	SP24A SP24B			
SDP24A	12	$[3, 3]$	SP24A	SP25	SP26		
SDP24B	12	$[3, 3]$	SP24B		SP26		
SDP26	4	$[3, 3]$	SP26				
SDP27	12	$[3, 3]^+$	SP27	SP28	SP29		
SDP30	48	$[3, 4]$	SP30	SP31 SP32A SP32B		SP33	
SDP31	24	$[3, 4]$	SP31	SP33		SP35	
SDP32A	24	$[3, 4]$	SP32A	SP33	SP34		
SDP32B	24	$[3, 4]$	SP32B		SP34	SP35	
SDP33	12	$[3, 4]$	SP33				
SDP34	8	$[3, 4]$	SP34				
SDP35	6	$[3, 4]$	SP35				



*of open spherical disk patterns*

F6	F8	F10	F(q)	Coherent	Platonic or Archimedean Polyhedron	Isogonal Tiling (see Sec. 3(D))	Finsterwalder Reference
				C		SIG* 9(q)	1(a) on p.17
			SCP10(q)	C( $\alpha$ )	(4 <sup>2</sup> .q)	SIG 60(q)	1(f) on p.17
				C		SIG* 12(q)	1(b) on p.17
				C			
			SCP13(q)	C( $\beta$ )		SIG 56(q)	1(g) on p.17
				C		SIG* 2(4q)	1(e) on p.17
			SCP20(q)	C-1 C-2( $\gamma$ )	(3 <sup>3</sup> .q)	SIG* 8(2q) SIG 63(q)	1(c) on p.17 1(d) on p.17
SCP26							
				C	(3.6 <sup>3</sup> )	SIG 7	41,42
				C	(3 <sup>9</sup> )	SIG 5	36
				C		SIG 6	45
SCP34	SCP35			C	(4.6.8)	SIG 24	56
				C	(4.6 <sup>3</sup> )	SIG 23	43,51
				C	(3.8 <sup>3</sup> )	SIG 10	53
				C	(3.4 <sup>9</sup> )	SIG 45	50
				C	(3.4.3.4)	SIG 42	40,49
				C	(4 <sup>3</sup> )	SIG 20	46,47,48
				C	(3 <sup>4</sup> )	SIG 37	37,38,39

Table 1

Associated Dot Pattern Type	Number Circular Disks	Symmetry Group	F1	F2	F3	F4	F5
SDP36	24	$[3,4]^+$	SP36	SP37	SP38	SP39	
SDP40	24	$[3^+,4]$	SP40	SP41	SP43		
SDP41	12	$[3^+,4]$	SP41	SP42			
SDP44	120	$[3,5]$	SP44	SP45A SP45B SP45C		SP46	
SDP45A	60	$[3,5]$	SP45A	SP46			SP48
SDP45B	60	$[3,5]$	SP45B	SP46	SP47		
SDP45C	60	$[3,5]$	SP45C		SP47		SP48
SDP46	30	$[3,5]$	SP46				
SDP47	20	$[3,5]$	SP47				
SDP48	12	$[3,5]$	SP48				
SDP49	60	$[3,5]^+$	SP49	SP50	SP51		SP52

Notes:

 $(\alpha) q \neq 4$  $(\beta) q \equiv 3$  $(\gamma) q \equiv 4$ 

of homeomeric types of dot patterns given in [8], can serve for both the open and the closed circular disk patterns.

If  $\mathcal{P}$  is a nonisolated open circular disk pattern, we still consider the associated dot pattern  $\mathcal{D}$  formed by the centres of the copies of the motif of  $\mathcal{P}$ . Clearly,  $\mathcal{P}$  arises by using the points of  $\mathcal{D}$  as centres of the *largest possible* (congruent) open circular disks which yield a pattern (that is, are disjoint, in accordance with condition SP2); we shall say that  $\mathcal{P}$  is the *maximal* open circular disk pattern associated with  $\mathcal{D}$ . Hence all that is necessary in order to enumerate the non-isolated open circular disk patterns and their homeomeric types is to start with a complete description of the spherical dot patterns of each homeomeric type (which involves 0, 1 or 2 real-valued parameters) and then determine which circular disks touch in the corresponding maximal open circular disk pattern.

In practice, this can be carried out as follows. We start with a fundamental domain  $D$  for a discrete group  $G$  of isometries of  $S$ , and choose a point  $M$  in  $D$ .

(continued)

F6	F8	F10	F(q)	Coherent	Platonic or Archimedean Polyhedron	Isogonal Tiling (see Sec. 3(D))	Finsterwalder Reference
				C-1		SIG 43	
				C-2		SIG 21	52
				C-3		SIG 8	54
				C-4	(3 <sup>4</sup> .4)	SIG 54	57
				C		SIG 9	55
				C		SIG 40	
SCP47		SCP48		C	(4.6.10)	SIG 25	69
				C	(5.6 <sup>2</sup> )	SIG 29	65
				C	(3.10 <sup>2</sup> )	SIG 12	67
				C	(3.4.5.4)	SIG 47	64
				C	(3.5.3.5)	SIG 49	63
				C	(5 <sup>3</sup> )	SIG 27	59,60,61,62
				C	(3 <sup>5</sup> )	SIG 53	44,58
				C-1		SIG 46	
				C-2		SIG 28	66
				C-3		SIG 11	68
				C-4	(3 <sup>4</sup> .5)	SIG 55	70

The orbit of  $M$  under  $G$  is a dot pattern  $\mathcal{D}$ , and the homeomeric type of  $\mathcal{D}$  is determined by the choice of  $M$ . In Figure 6 we have schematically indicated the possibilities in case  $G$  is  $[3, 4]$ ,  $[3, 4]^+$  or  $[3^+, 4]$ ; the other cases are handled analogously, and we omit the details. This procedure yields the isolated circular disk patterns. To obtain the non-isolated types, in each case we have to determine where the contacts among the circular disks of the maximal patterns will occur. For the three groups mentioned above this is illustrated in Figure 7. We have carried out this procedure in all cases, but suppress the details as the arguments are completely straightforward and can easily be supplied by anyone wishing to check our enumeration. The final result which we obtain can be formulated as follows.

*In the homeomeric classification of open circular disk patterns on the 2-sphere there are 28 families of types, each family depending on a positive integer, and 94 other types. Of these, 7 families and 28 other types are coherent.*

In order to obtain a system of symbols which indicate the relationship between dot patterns and the open circular disk patterns derived from them we consider the connected components of the union of the closures of copies of the motif in each pattern. Each of these components will be called the *supermotif* of the pattern. A supermotif can consist of one circular disk (if the pattern is isolated), or of 2, 3, 4, 5, 6, 8 or 10 circular disks; the only other possibilities are that there is just one connected component (consisting of the union of the closures of all the disks of the pattern) if the pattern is coherent, or that the symmetry group is non-polyhedral and there are two connected components. The designation of an open circular disk pattern consists of the letters SCP (for "spherical circle pattern") followed by the number of the dot pattern associated with it and, following a hyphen, either C for "coherent", or F1, F2, F3, F4, F5, F6, F8, F10 if the pattern is not coherent. In the latter case, the integer following the letter F indicates the number of circular disks in the supermotif. The three cases in which the supermotif consists of one-half the disks are indicated by  $F(q)$ . If these rules give the same symbol to several distinct homeomeric types, we add another hyphen followed by an ordinal. (It should be noted that for some very small values of  $q$ , the above rules are ambiguous. For example, an F2 pattern may also be coherent; in such cases we have usually opted for the F-notation.)

The supermotifs of an open circular disk pattern form a pattern, which is usually called the *superpattern* of the given pattern.

The designation by F followed by a numeral is convenient in other respects as well, as one can see from Table 1. The first column of that table indicates the dot pattern associated with the given pattern type, from which the pattern type can be derived as explained above, and, if a parameter appears, the restriction on its values. The second column shows the number of circular disks (copies of the motif) in the pattern; the third column indicates the symmetry group. The next ten columns correspond to the possible supermotifs. For example, an entry SP29 in column F3 and row SDP27 shows that circles whose centres form the dot pattern SDP27 can be arranged in triples (supermotifs F3) so as to form a superpattern of type SP29. In Figure 3 this circular disk pattern is labelled SCP27—F3. For the families of patterns in Figure 2 we show just one representative of each family — with parameter  $q$  equal to 6 or 12. The appearance of the patterns for other values of the parameters should be readily apparent.

For some coherent patterns the associated dot pattern forms the set of vertices of a Platonic or Archimedean (uniform) polyhedron in  $E^3$  inscribed in  $S$ . In this cases the usual symbol for the polyhedron is indicated in the last column but two. The penultimate column shows the isogonal tiling associated with each coherent pattern (as described in part (D) of the next section), and the last column gives references to Finsterwalder's enumeration [4]; the numbers apply either to his diagrams or to his descriptions of the infinite families.

The diagrams in Figures 2, 3, 4 and 5 show parallel projections of the sphere  $S$  with the circular disks drawn upon it; black disks are to be interpreted as lying on the front of the sphere, those in outline only are on the back of the sphere. (The only exception is the pattern SCP10( $\infty$ ) in Figure 2, which consists of the two hemispheres bounded by a great circle; in this case the hemispheres have been left white.) In addition, in order to help with the visualisation of the patterns we have

drawn "grids" on  $S$  as shown in Figure 1. For patterns with the nonpolyhedral symmetry groups an equatorial circle is drawn (Figure 2). For groups  $[3, 3]$  and  $[3, 3]^+$  the grid consists of the central projection onto  $S$  of the edges of a regular tetrahedron (Figure 3). For groups  $[3, 4]$ ,  $[3, 4]^+$ ,  $[3^+, 4]$  the grid is the central projection onto  $S$  of the edges of a cube (Figure 4), and for groups  $[3, 5]$ ,  $[3, 5]^+$  it is the central projection of the edges of a regular dodecahedron (Figure 5).

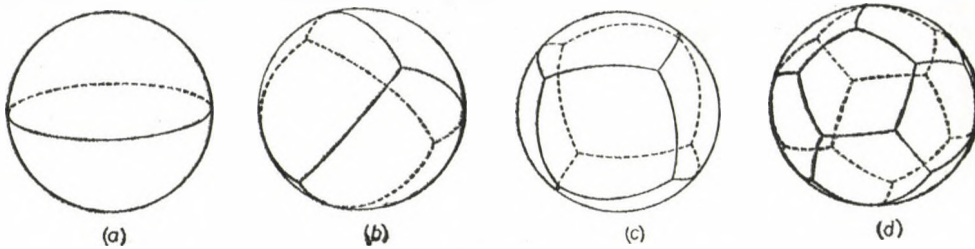


Fig. 1. The four types of "grids" used in Figures 2 to 5 to facilitate visualisation of the patterns

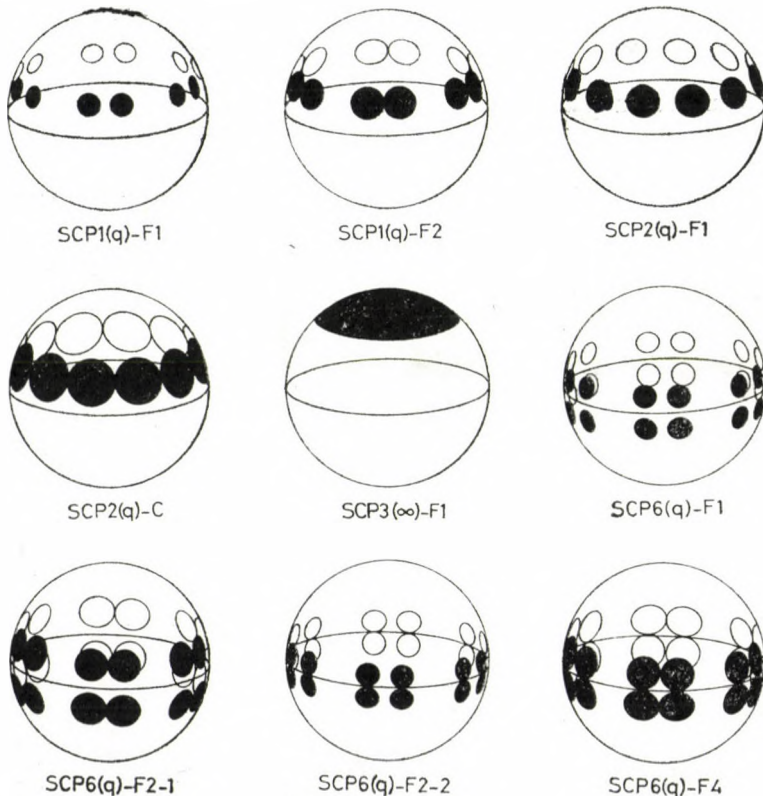
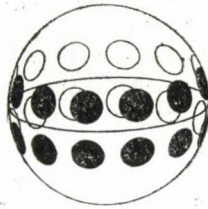
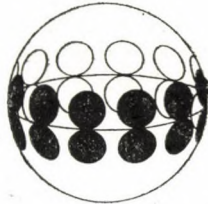


Fig. 2. Examples of the homeomeric types of open circular disk patterns with non-polyhedral symmetry group. Each infinite family of types is indicated by one pattern. The types whose symbols contain F1 can be interpreted as also representing closed circular disk patterns.





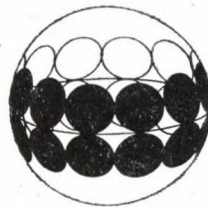
SCP7(q)-F1



SCP7(q)-F2



SCP7(q)-F(q)



SPC7(q)-C



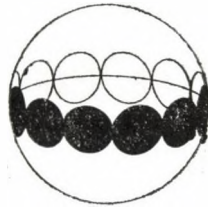
SCP8(q)-F1



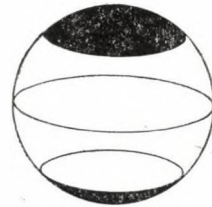
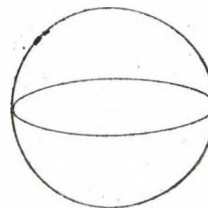
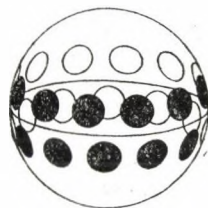
SCP8(q)-F2



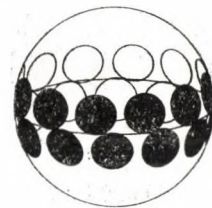
SCP9(q)-F1



SCP9(q)-C

SCP10( $\infty$ )-F1SCP10( $\infty$ )-C

SCP11(q)-F1



SCP11(q)-F2

*Fig. 2 (continued)*

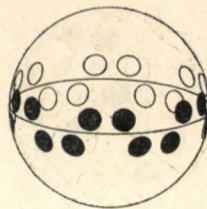




SCP11(q)-F(q)



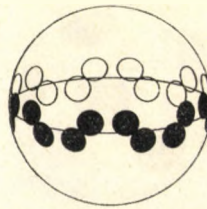
SCP11(q)-C



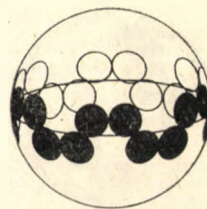
SCP17(q)-F1



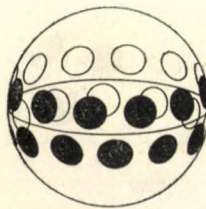
SCP17(q)-F2-1



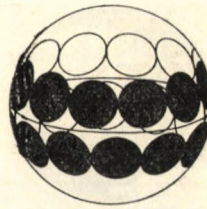
SCP17(q)-F2-2



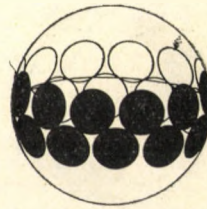
SCP17(q)-C



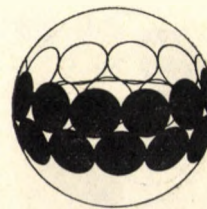
SCP18(q)-F1



SCP18(q)-F(q)



SCP18(q)-C-1



SCP18(q)-C-2

*Fig. 2 (concluded)*



SCP23-F1



SCP23-F2-1



SCP23-F2-2



SCP23-F6



SCP24A-F1



SCP24A-F2



SCP24A-F3



SCP24A-C



SCP24B-F1



SCP24B-F3



SCP26-F1



SCP26-C

Fig. 3. Examples of patterns with symmetry group  $[3, 3]$  or  $[3, 3]^+$ .



SCP27-F1



SCP27-F2



SCP27-F3



SCP27-C

*Fig. 3 (concluded)*

SCP30-F1



SCP30-F2-1



SCP30-F2-2



SCP30-F2-3



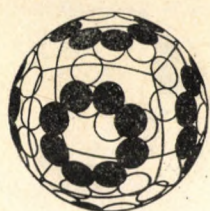
SCP30-F4



SCP30-F6

*Fig. 4. Examples of patterns with symmetry group  $[3, 4]$ ,  $[3, 4]^+$ , or  $[3^+, 4]$ .*





SCP30-F8



SCP30-C



SCP31-F1



SCP31-F2



SCP31-F4



SCP31-C



SCP32A-F1



SCP32A-F2



SCP32A-F3



SCP32A-C



SCP32B-F1



SCP32B-F3

*Fig. 4 (continued)*



SCP32B-F4



SCP32B-C



SCP33-F1



SCP33-C



SCP34-F1



SCP34-C



SCP35-F1



SCP35-C



SCP36-F1



SCP36-F2



SCP36-F3



SCP36-F4

*Fig. 4 (continued)*



SCP36-C-1



SCP36-C-2



SCP36-C-3



SCP36-C-4



SCP40-F1



SCP40-F2



SCP40-F3



SCP40-C



SCP41-F1



SCP41-F2



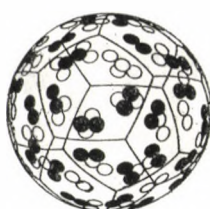
SCP41-C

*Fig. 4 (concluded)*





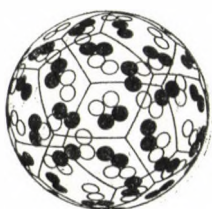
SCP44-F1



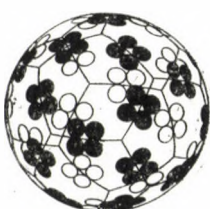
SCP44-F2-1



SCP44-F2-2



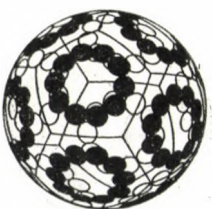
SCP44-F2-3



SCP44-F4



SCP44-F6



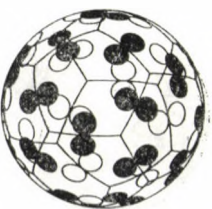
SCP44-F10



SCP44-C



SCP45A-F1



SCP45A-F2



SCP45A-F5



SCP45A-C

Fig. 5. Examples of patterns with symmetry group  $[3, 5]$  or  $[3, 5]^+$ .



SCP45B-F1



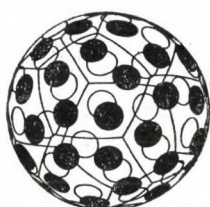
SCP45B-F2



SCP45B-F3



SCP45B-C



SCP45C-F1



SCP45C-F3



SCP45C-F5



SCP45C-C



SCP46-F1



SCP46-C

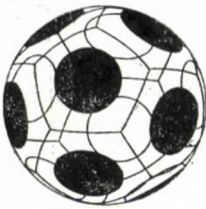


SCP47-F1



SCP47-C

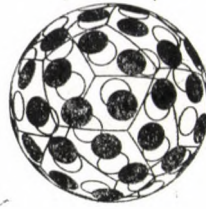
*Fig. 5 (continued)*



SCP48-F1



SCP48-C



SCP49-F1



SCP49-F2



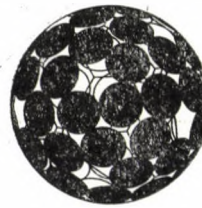
SCP49-F3



SCP49-F5



SCP49-C-1



SCP49-C-2



SCP49-C-3



SCP49-C-4

*Fig. 5 (concluded)*

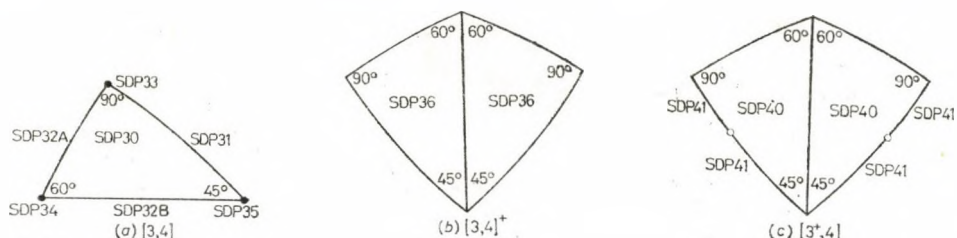


Fig. 6. Schematic representation of fundamental domains for the groups  $[3, 4]$ ,  $[3, 4]^+$ , and  $[3^+, 4]$ , and the homeomeric types of dot patterns which arise as orbits of a point chosen in the fundamental domain. The designation of the types of spherical dot patterns (SDP) follows [8]. In (a) all points of the interior of the fundamental domain lead to the same type (SDP30) of dot pattern; similarly, for each edge its relatively interior points lead to a different type. In (b), all points of the interior of the fundamental domain lead to SDP36 *except* those on the diagonal shown; points on the diagonal or on the boundary lead to dot patterns with symmetry group  $[3, 4]$ . Points situated symmetrically relative to the diagonal lead to enantiomorphic dot patterns. In (c) all the interior points not on the marked diagonal lead to SDP40; the relatively interior points of the two edges, *except* for the single point marked by an empty circle, lead to SDP41. The two exceptional points, the points on the diagonals or the other two edges, and the vertices of the fundamental domain lead to dot patterns with symmetry groups properly containing  $[3^+, 4]$ . Points situated symmetrically relative to the diagonal lead to isometric dot patterns. The classifications of dot patterns indicated here serve also as classifications of closed circular disk patterns, and of isolated open circular disk patterns. These are signaled in the diagrams and in Table 1 by F1 following the first hyphen in the symbol.

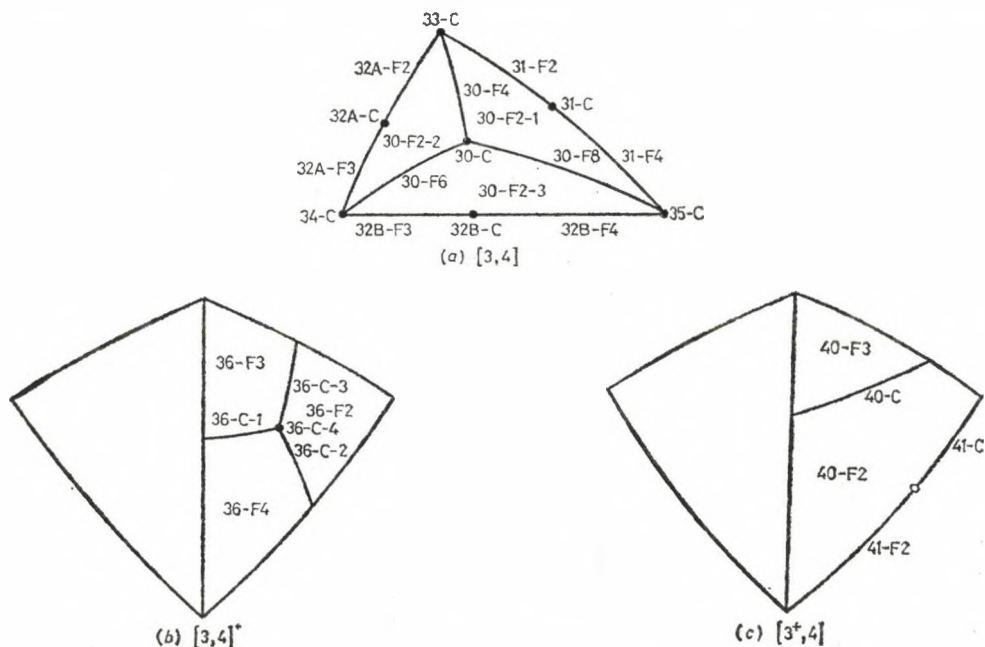
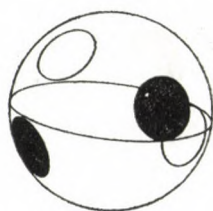


Fig. 7. The generation of non-isolated open circular disk patterns with the symmetry groups indicated. To reduce clutter, the letters SCP have been omitted from the symbols. In each of the parts (b) and (c), the left half of the diagram leads to the same types as the right half.

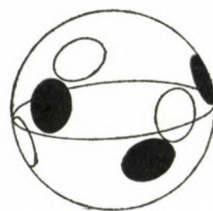




SCP7(4)-F1



SCP18(2)-F1



SCP18(3)-F1

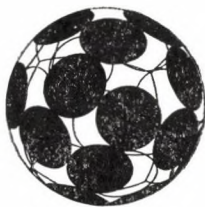


SCP41-F1

*Fig. 8.* The four homeomeric types (SCP7(4)—F1, SCP18(2)—F1, SCP18(3)—F1 and SCP41—F1) which split into two homeotopic types. Two representatives of each type are shown, and it will be observed that in each case one representative cannot be transformed continuously into the other without changing the homeomeric type at some stage during the transformation.



SCP27-C



SCP36-C-2



SCP36-C-3



SCP40-C

*Fig. 9.* The additional types of open circular disk patterns on the sphere which arise if we refine the homeomeric classification by taking into account the convexity character of the associated isogonal tiling  $T$ , see remark (D) of Section 3. The six homeomeric types illustrated (SCP27-C, SCP36-C-2, SCP36-C-3, SCP40-C, SCP49-C-2 and SCP49-C-3) each splits into three types in this refinement. In the examples shown, the first diagram shows a pattern leading to a tiling  $T$  of which some tiles are non-convex; the third diagram shows a pattern for which all the tiles of  $T$  are convex; the second diagram shows the intermediate case where pairs of edges of the tiling are collinear, that is, lie on the same great circle



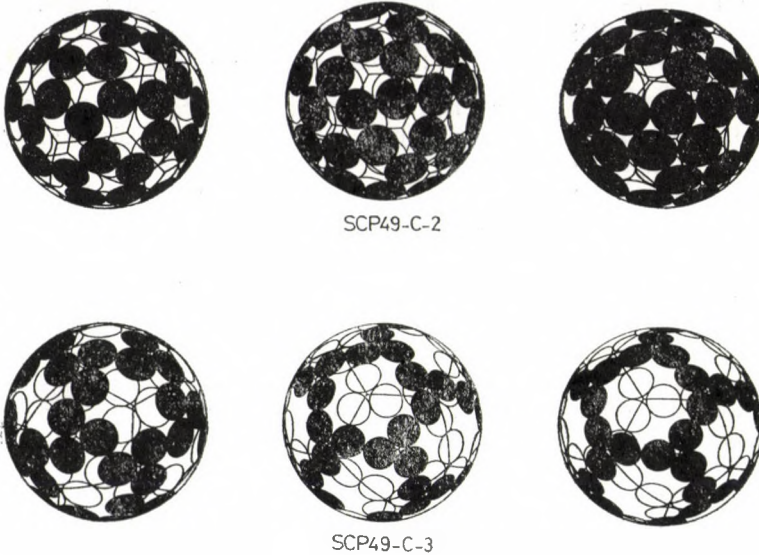


Fig. 9 (concluded)

### 3. Remarks

(A) Open circular disk patterns  $\mathcal{P}_0$  and  $\mathcal{P}_1$  in  $S$  are said to be *strictly homeotopic* provided they are of the same homeomeric type and for each  $\lambda$  with  $0 \leq \lambda \leq 1$  there exists an open circular disk pattern  $\mathcal{P}(\lambda)$  of the same homeomeric type as  $\mathcal{P}_0$  and  $\mathcal{P}_1$ , such that  $\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}_0$ ,  $\mathcal{P}(1) = \mathcal{P}_1$ , and  $\mathcal{P}(\lambda)$  depends continuously on  $\lambda$  (in the sense of the Hausdorff metric for subsets of  $S$ ). Patterns  $\mathcal{P}_0$  and  $\mathcal{P}_1$  are *homeotopic* if  $\mathcal{P}_0$  is strictly homeotopic to  $\mathcal{P}_1$  or to the pattern obtained by reflecting  $\mathcal{P}_1$  in a plane through the centre of  $S$ . Our method of enumerating the homeomeric types of open circular disk patterns can easily be adapted to an enumeration of homeotopic and strictly homeotopic types of such patterns. The result is as follows.

*The homeotopic types of open circular disk patterns on the sphere are in one-to-one correspondence with the homeomeric types of such patterns, except that to each of the homeomeric types SCP7(4)—F1, SCP18(2)—F1, SCP18(3)—F1 and SCP41—F1 correspond two homeotopic types (see Figure 8). Each of the homeotopic types having as symmetry group one of  $[2, q]^+$ ,  $[3, 3]^+$ ,  $[3, 4]^+$ ,  $[3, 5]^+$  splits into two types under strict homeotopy; for patterns with other symmetry groups homeotopic and strictly homeotopic types coincide.*

(B) The identification of our types with those of Finsterwalder [4] in many cases depends on a measure good will. This is not surprising, in view of the fact that he does not give precise definitions. So, for example, he seems to single out as a "type" certain patterns in which strings of four circular disks have centres lying on a great circle; this can happen with our types SCP27—C, SCP40—C, etc., but it is not a

property of all patterns of these homeomeric types. On the other hand, types such as SCP36—C—2 and SCP41—C are only described rather vaguely as “deformations” of types SCP32B—C and SCP33—C. Similar uncertainties occur elsewhere.

(C) If the motifs of the open circular disk patterns were defined not as interiors of spherical caps (bounded by circles) but as “open metric balls”, one additional type would have arisen, namely the pattern consisting of a single “disk”, which is obtained by deleting from the sphere a single point. Due to the topologically peculiar nature of this example, we considered the approach used in the text to be the more reasonable.

(D) Let  $\mathcal{P}$  be a coherent circular disk pattern, whose symmetry group is one of the polyhedral groups, and let  $\mathcal{D}$  be the corresponding dot pattern of centres. Join two dots of  $\mathcal{D}$  by the small arc of the great circle they determine if and only if the corresponding circular disks touch. In this way we obtain a tiling of the sphere  $S$  which is isogonal, polygonal and isosceles (that is, its symmetry group is transitive on the vertices, and the boundary of each tile consists of congruent arcs of great circles).

In [5] we refined the homeomeric classification of polygonal tilings in the Euclidean plane by taking into account the convexity character of the tiles. An exactly similar procedure can be applied to polygonal tilings on the sphere, and this leads to a finer classification of circular disk patterns than that by homeomerism.

For example, the drawing of SCP36—C—3 in Figure 4 leads to a tiling of the sphere by eight triangles and six nonconvex octagons. But the same pattern type can also lead to a tiling in which the octagons are convex — or, as an intermediate case, the octagons become quadrilaterals because alternate angles become equal to  $\pi$  radians. All the possibilities are shown in Figure 9 — so in this finer classification an extra 12 types arise.

In an analogous manner, a finer classification can be devised which takes account of whether sets of three contiguous circular disks in SCP36—C—1 or SCP49—C—1 have centres on a great circle or not. Unlike the other cases considered above, this does not affect the convexity character of the tiles in the associated isogonal tiling, so we do no more than mention the possibility here.

(E) For the benefit of reviewers of this paper who find it hard to distinguish theorems from other material (see, for example, *Zentralblatt für Mathematik* 501.51011) we wish to state that each of the italicized paragraphs in the previous three sections is to be considered as a theorem.

#### REFERENCES

- [1] COXETER, H. S. M. and MOSER, W. O. J., *Generators and relations for discrete groups*, Fourth edition, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Band 14, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1980. *MR* 81a: 20001.
- [2] FEJES TÓTH, L., Remarks on a theorem of R. M. Robinson, *Studia Sci. Math. Hungar.* 4 (1969), 441—445. *MR* 40 # 7951.
- [3] FEJES TÓTH, L., *Regular figures*, Pergamon Press, New York, 1964. *MR* 29 # 2705.
- [4] FINSTERWALDER, S., Regelmässige Anordnungen gleicher sich berührender Kreise in der Ebene, auf der Kugel und auf der Pseudosphäre, *Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Math.-naturwiss. Abt., Neue Folge* 38 (1936), 1—42. *Zbl* 15. 035.

- [5] GRÜNBAUM, B. and SHEPHARD, G. C., Isohedral tilings of the plane by polygons, *Comment. Math. Helv.* **53** (1978), 542—571. *MR* **80d**: 52016.
- [6] GRÜNBAUM, B. and SHEPHARD, G. C., Incidence symbols and their applications, *Relations between combinatorics and other parts of mathematics*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 34, American Math. Society, Providence, R. I., 1979, 199—244. *MR* **80c**: 05059.
- [7] GRÜNBAUM, B. and SHEPHARD, G. C., A hierarchy of classification methods for patterns, *Z. Krist.* **154** (1981), 163—187. *MR* **82j**: 05048.
- [8] GRÜNBAUM, B. and SHEPHARD, G. C., Patterns on the 2-sphere, *Mathematika* **28** (1984), 1—35.
- [9] GRÜNBAUM, B. and SHEPHARD, G. C., Spherical tilings with transitivity properties, *The geometric vein: The Coxeter Festschrift*, C. Davis et al., eds., Springer-Verlag, New York—Berlin, 1981, 65—98. *MR* **84k**: 52012.
- [10] NIGGLI, P., Die topologische Strukturanalyse I, II, *Z. Kristallogr.* **65** (1927), 391—415; **68** (1928), 404—466.
- [11] SINOGOWITZ, U., Die Kreislagen und Packungen kongruenter Kreise in der Ebene, *Z. Kristallogr.* **100** (1939), 461—508. *Zbl* **20**: 387.
- [12] TARNAI, T., Spherical circle-packing in nature, practice and theory, *Structural Topology* **9** (1984), 39—58.

(Received October 23, 1984)

UNIVERSITY OF WASHINGTON, GN—50  
SEATTLE, WA 98195  
U.S.A.

UNIVERSITY OF EAST ANGLIA  
NORWICH NR4 7TJ  
ENGLAND



**PRINTED IN HUNGARY**

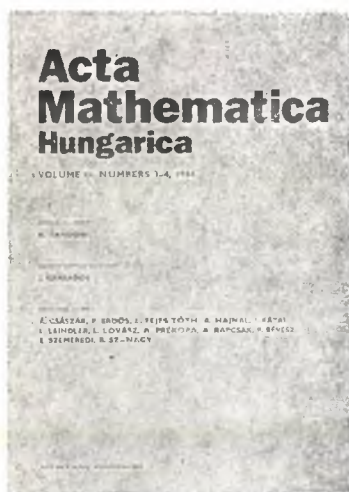
**Szegedi Nyomda, Szeged**

# Acta Mathematica Hungarica

(Formerly: Acta Mathematica  
Academiae Scientiarum Hungaricae)

**Editor in Chief:**  
K. Tandori

**Deputy Editor in Chief:**  
J. Szabados



The journal covers a wide scope in the field of mathematics. It comprises theory of sets, mathematical logic, classical and modern analysis, algebra, number theory, geometry, topology, combinatorics, mathematical statistics, probability theory, as well as information theory.

Founded 1950  
Papers in English, German, French and Russian  
Publication: two volumes annually —  
one volume contains two issues  
Price per volume: \$ 44.00; DM 99,—  
Size: 17 × 25 cm  
ISSN 0236-5294

## Order form

to be returned to

**KULTURA**

Hungarian Foreign Trading Company

P.O. Box 149, H-1389 Budapest, Hungary

- ☐ Please enter my/our subscription for  
**ACTA MATHEMATICA HUNGARICA** for one year
- ☐ Please enter my/our standing order for  
**ACTA MATHEMATICA HUNGARICA** starting with

Name: \_\_\_\_\_

Address: \_\_\_\_\_

Date and signature: \_\_\_\_\_



Contents of Volume 42. Numbers 1-2

- Ferenczi, M.*: Measures on cylindric algebras  
*Petz, D.*: On spectral and central states of Banach algebras  
*Györfi, J.*: Lakunäre Interpolation mit Spline-Funktionen  
*Tanović-Miller, N.*: On strong convergence of trigonometric and Fourier series  
*Györy, K.*: Bounds for the solutions of norm form, discriminant form and index form equations in finitely generated integral domains  
*Бейбар, К. И. и Салахова, К.*: О решетках  $N$ -радикалов, строгих слева радикалов, наследственных слева радикалов  
*Gresu, E.*: Détermination des géodésiques de certains espaces riemanniens singuliers  
*Parhi, N.*: On non-oscillatory solutions of second order differential inequalities  
*Matolcsy, K.*: Refined extensions of syntopogenous structures and quasi-uniformities  
*Alimov, Š. A. and Joó, I.*: On the eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operator having spherically symmetrical potential  
*Maknys, M.*: On the distance between consecutive prime ideal numbers in sectors  
*Karamzadeh, O. A. S.*: On the Krull intersection theorem  
*Kubacki, K. S. and Szynal, D.*: Weak convergence of martingales with random indices to infinitely divisible laws  
*Берман, Д. Л.*: Решение одной экстремальной задачи теории операторов  
*Jain, R. K.*: Semigroups with primary ideals of prime power  
*Komornik, V.*: On the distribution of the eigenvalues of an orthonormal system, consisting of eigenfunctions of higher order of a linear differential operator



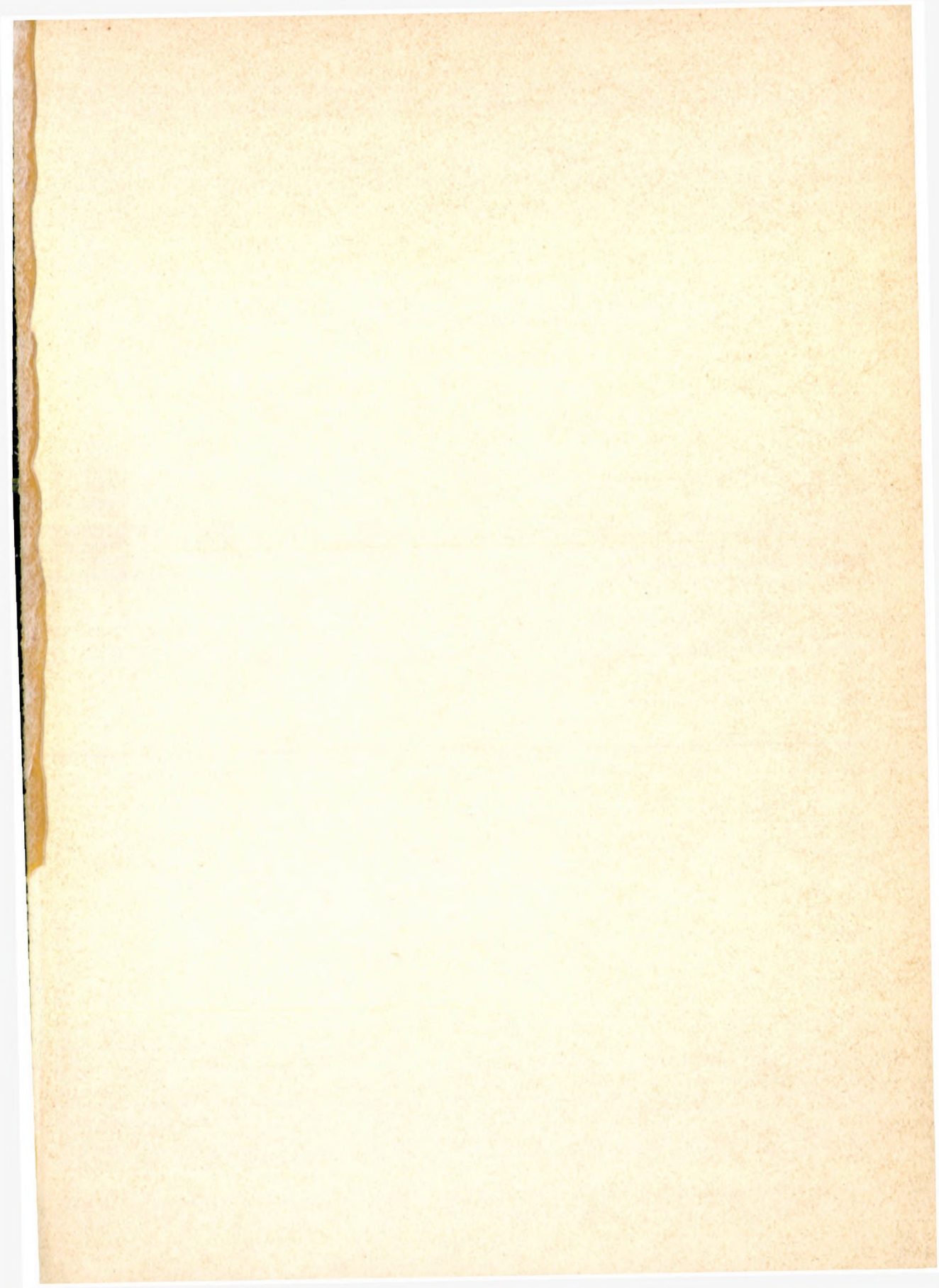
Akadémiai  
Kiadó

Publishing House  
of the Hungarian Academy of Sciences  
Budapest

Invitation for papers

Manuscripts should be sent to  
Acta Mathematica Hungarica  
P.O. Box 127  
H-1364 Budapest  
Hungary







## CONTENTS

WEGNER, G., Über endliche Kreispackungen in der Ebene .....	1
VERMES, I., Über eine geometrische Ungleichung bezüglich der Dichte der regulären Ausfüllungen der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche .....	29
BLIND, G. und BLIND, R., Ein Kreisüberdeckungsproblem .....	35
ALPÁR, L., On the change of variable of absolutely convergent power and Laurent series on the unit circle .....	59
PALÁSTI, I., A construction for arrangements of lines with vertices of large multiplicity .....	67
BÖRÖCZKY, K., Closest packing and loosest covering of the space with balls .....	77
WILKER, J. B., Inversive geometry and the Hopf fibration .....	87
CHAKERIAN, G. D. and FILLIMAN, P., The measures of the projections of a cube .....	97
DANZER, L., Zur Lösung des Gallaischen Problems über Kreisscheiben in der euklidischen Ebene .....	107
BAMBAH, R. P., DUMIR, V. C. and HANS-GILL, R. J., On an analogue of a problem of Mordell .....	117
KLEE, V., Facet-centroids and volume minimization .....	127
GRITZMANN, P. and WILLS, J. M., Finite packing and covering .....	149
GRUBER, P. M., Typical convex bodies have surprisingly few neighbours in densest lattice packings .....	163
SZENTHE, J., Some isometric actions with orthogonally transversal submanifolds on Riemannian symmetric spaces .....	175
LINHART, J., Extremaleigenschaften der regulären 3-Zonotope .....	181
GROEMER, H., Multiple packings and coverings .....	189
DEBRUNNER, H. E., Tiling three-space with handlebodies .....	201
SACHS, H., No more than nine unit balls can touch a closed unit hemisphere .....	203
POTTMANN, H. and RÖSCHEL, O., Globale Eigenschaften ebener isotroper Zwangsläufe .....	207
HORVÁTH, J., Über die Enge von Zylinderpackungen und die Lockerheit von Zylinderüberdeckungen im $n$ -dimensionalen euklidischen Raum .....	219
KAISER, H., Zum Problem der Zerlegbarkeit von Simplexen in Orthoscheme .....	227
SEIDEL, J. J., On the volume of a hyperbolic simplex .....	243
FLORIAN, A., Packing and covering with convex discs .....	251
BÖHM, J., Zum isoperimetrischen Problem bei Simplexen in $r$ -dimensionalen Räumen konstanter Krümmung .....	267
CsóKA, G., Three theorems on the minimal vectors of perfect lattices .....	283
TEMESVÁRI, Á. H., Über die lockere doppelgitterförmige 2-fache Überdeckung der Ebene mit Einheitskreisen .....	293
GRÜNBAUM, B. and SHEPHARD, G. C., Circular disk patterns on a sphere .....	303

35.550  
**Studia**

# Scientiarum Mathematicarum Hungarica

EDITOR-IN-CHIEF

A. HAJNAL

DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF

E. T. SCHMIDT

EDITORIAL BOARD

P. BOD, E. CSÁKI, Á. CSÁSZÁR, I. CSISZÁR, Á. ELBERT

L. FEJES TÓTH, G. HALÁSZ, I. JUHÁSZ, G. KATONA

O. STEINFELD, J. SZABADOS, D. SZÁSZ

E. SZEMERÉDI, G. TUSNÁDY, I. VINCZE, R. WIEGANDT

VOLUME 21  
NUMBERS 3—4  
1986



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST



# STUDIA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM HUNGARICA

A QUARTERLY OF THE HUNGARIAN  
ACADEMY OF SCIENCES

---

*Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* publishes original papers on mathematics mainly in English, but also in German, French and Russian.

*Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* is published in yearly volumes of four issues (mostly double numbers published semiannually) by

AKADÉMIAI KIADÓ

Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences  
H-1054 Budapest, Alkotmány u. 21.

Manuscripts and editorial correspondence should be addressed to

J. Merza  
Managing Editor  
P.O. Box 127  
H-1364 Budapest

## *Subscription information*

Orders should be addressed to

KULTURA Foreign Trading Company  
P.O. Box 149  
H-1389 Budapest

or to its representatives abroad.



## EINE KENNZEICHNUNG DER SCHRAUBENBEWEGUNGEN DES EUKLIDISCHEN RAUMES

HANS ROBERT MÜLLER

Herrn Prof. Dr. László Fejes Tóth zum 70. Geburtstag gewidmet

Raumkurven, deren Tangenten mit einer festen Richtung  $\mathbf{a}$  einen festen Winkel  $\vartheta$  einschließen, heißen *Böschungslinien* oder *verallgemeinerte Schraublinien*. Ein Sonderfall sind die *gemeinen Schraublinien*, die als Punktbahnen von Schraubungen (Schraubenbewegungen) entstehen.

Kürzlich untersuchte ich räumliche Bewegungen mit Böschungslinien als Bahnkurven [1]:

(i) Wird eine Gerade  $g$  bei einem Zwangslauf so geführt, daß ihre sämtlichen Punkte Böschungslinien beschreiben, so durchwandert sie die Erzeugendenschar einer Torse  $T$ , deren Gratlinie Hauptnormalen konstanter Neigung besitzt. Die Bahnkurven der Punkte von  $g$  sind hierbei Evoluten der Gratlinie von  $T$ .

(ii) Wird eine Ebene so bewegt, daß ihre sämtlichen Punkte Böschungslinien durchlaufen, so umhüllt sie eine Torse  $\Phi$ , wobei sie auf  $\Phi$  gleitungslos abrollt. Die erzeugten Böschungslinien sind Parallelkurven und erscheinen als Planevolventen der Gratlinie von  $\Phi$ . Diese ist wiederum eine Kurve konstant geneigter Binormalen.

(iii) Die naheliegende Frage nach einparametrischen Bewegungsvorgängen, bei denen sämtliche Punkte des starr bewegten Körpers, d. h. des damit verbundenen Gangraumes Böschungslinien beschreiben, ist negativ zu beantworten: Solche Bewegungen sind nicht möglich.

Hierbei ist in allen drei Fällen zu beachten, daß für alle Bahnkurven die *gleiche feste Richtung*  $\mathbf{a}$  und der *gleiche feste Winkel*  $\vartheta$  verlangt wird.

Nun wollen wir die Fragestellung dahin erweitern, daß wir *Zwangslaufbewegungen* suchen bei denen jeder Punkt des Gangraumes  $R$  eine Böschungslinie erzeugt, die zu einer im Rastraum  $R'$  festen Richtung  $\mathbf{a}$ , aber zu einem von der Lage des Punktes in  $R$  abhängigen Neigungswinkel  $\vartheta$  gehört. Wir wollen zeigen, daß hiedurch die *Schraubenbewegungen* im Rastraum gekennzeichnet sind. Es versteht sich von selbst, daß gemeine Schraublinien als Bahnkurven einer Schraubung die verlangte Eigenschaft besitzen. Die Umkehrung wollen wir in mehreren Schritten nachweisen.

---

1980 Mathematics Subject Classification. Primary 53—XX; Secondary 53A17.  
Key words and phrases. Curves of slope, screw motions.

## I

Um die Bewegung eines starren Körpers im dreidimensionalen euklidischen Raum zu untersuchen, denken wir uns den Raum aus zwei sich überdeckenden Exemplaren bestehend. Als Vertreter des festen Raumes  $R'$  wählen wir in ihm ein rechtshändiges, orthonormiertes Dreibein  $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ . Ebenso sei der Gangraum  $R$  mit dem bewegten Körper starr verbunden und durch ein gleichartiges Dreibein  $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  repräsentiert. Die auf diesen Dreibeinen fußenden Achsenkreuze bezeichnen wir als *Rast-* bzw. *Gangkreuz*. Die reine Drehung der Achsenkreuze in einander wird durch eine eigentlich orthogonale Matrix bestimmt:

$$(1) \quad \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \mathbf{e}'_j, \quad \mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji} \mathbf{e}_j.$$

Die Koeffizienten  $a_{ij}$  seien nun  $C^3$ -Funktionen eines reellen Parameters  $t$  (Zeit) über einem gemeinsamen Definitionsbereich. Ein räumlicher Zwangslauf liegt vor, wenn auch noch der Vektor  $\overrightarrow{O'O} = \mathbf{u}$  als Funktion von  $t$  vorgegeben ist.

Der Bewegungsvorgang besteht im Augenblick d. h. zum Zeitpunkt  $t$  aus einer *Schraubbewegung* (*Momentanschraubung*), die sich aus einer Drehung mit dem Darbouxschen Drehvektor

$$(2) \quad \mathbf{q} = \sum q_i \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad q_k = \sum \dot{a}_{ih} a_{jh} \\ (i, j, k \text{ zyklisch } 1, 2, 3)$$

und einer Schiebung mit dem Schiebvektor

$$(2') \quad \dot{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{q}} = \sum \bar{q}_i \mathbf{e}_i$$

zusammensetzt.

Die vektorielle Geschwindigkeit eines in  $R$  befestigten Punktes  $X$  gegenüber  $R'$  (Bahntangentenrichtung) ist dann in der Form

$$(3) \quad \dot{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \times \mathbf{x}$$

darstellbar, wobei

$$\overrightarrow{OX} = \mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad x_i = \text{konst.}$$

zu setzen ist. Für die augenblickliche skalare Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  bzw. Schiebgeschwindigkeit  $\sigma$  gilt

$$\omega^2 = \mathbf{q}^2, \quad \omega \sigma = \mathbf{q} \bar{\mathbf{q}}.$$

Der Schraubparameter  $k$  ist durch

$$k = \frac{\sigma}{\omega} = \frac{\mathbf{q} \bar{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}^2}$$

erklärt. Vgl. hierzu [2], [3].

## II

Als in  $R'$  feste Richtung, gegen die die Bahnkurve des Punktes  $X$  stets unter dem Winkel  $\vartheta$  geneigt sein soll, wählen wir den Vektor

$$\mathbf{a}' = \mathbf{e}'_3 = \sum a_{j3} \mathbf{e}_j.$$

Wir schreiben dafür kurz  $a_j = a_{j3}$ .

Für eine Böschungslinie ist

$$\mathbf{a}' \cdot \dot{\mathbf{x}}' = \sqrt{\dot{\mathbf{x}}'^2} \cos \vartheta$$

oder ausführlicher

$$(4) \quad [\mathbf{a}' \cdot \bar{\mathbf{q}} + (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{q} \times \mathbf{x})]^2 = (\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \times \mathbf{x})^2 \cos^2 \vartheta$$

kennzeichnend.<sup>1</sup>

Dies ist nicht nur eine identische Beziehung in  $t$ , sondern auch in den Koordinaten  $x_i$  des Punktes  $X$ , wobei wir — der Problemstellung gemäß —  $\vartheta$  ebenfalls als Funktion der  $x_i$  anzusehen haben. Wir können daher (4) nach  $x_1$  bzw.  $x_2$  und  $x_3$  partiell ableiten und finden nach einfachen Umformungen

$$(i) \quad (\mathbf{a}' \cdot \dot{\mathbf{x}}') (a_2 q_3 - a_3 q_2) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} \sin 2\vartheta (\dot{\mathbf{x}}')^2 +$$

$$\cos^2 \vartheta [\bar{q}_2 q_3 - q_2 \bar{q}_3 + \mathbf{q}^2 x_1 - q_1 (\mathbf{q} \times \mathbf{x})],$$

$$(ii) \quad (\mathbf{a}' \cdot \dot{\mathbf{x}}') (a_3 q_1 - a_1 q_3) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} \sin 2\vartheta (\dot{\mathbf{x}}')^2 +$$

$$\cos^2 \vartheta [\bar{q}_3 q_1 - q_3 \bar{q}_1 + \mathbf{q}^2 x_2 - q_2 (\mathbf{q} \times \mathbf{x})],$$

$$(iii) \quad (\mathbf{a}' \cdot \dot{\mathbf{x}}') (a_1 q_2 - a_2 q_1) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_3} \sin 2\vartheta (\dot{\mathbf{x}}')^2 +$$

$$\cos^2 \vartheta [\bar{q}_1 q_2 - q_1 \bar{q}_2 + \mathbf{q}^2 x_3 - q_3 (\mathbf{q} \times \mathbf{x})].$$

Bilden wir nun  $q_1(i) + q_2(ii) + q_3(iii)$ , so verschwindet die linke Seite; rechts entsteht aus den eckigen Klammern ebenfalls Null. Somit gilt, wenn wir das Nichtverschwinden der Geschwindigkeit des Punktes  $X$  und  $0 \neq \vartheta \neq \pi/2$  voraussetzen,

$$(5) \quad q_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} + q_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_3} = 0.$$

<sup>1</sup> Es bedeutet  $(\mathbf{abc}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  das Spatprodukt der drei Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ .

## III

(5) kann als *lineare homogene partielle Differentialgleichung* für den Winkel  $\vartheta$  aufgefaßt werden. Nach der Charakteristikenmethode bilden wir

$$dx_1:dx_2:dx_3 = q_1:q_2:q_3$$

und daraus, weil die  $q_i$  ja nur von  $t$  abhängen,

$$(6) \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{q_2}{q_1} = c_2 = \text{konst.}, \quad \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{q_3}{q_1} = c_3 = \text{konst.}$$

Somit ist einerseits

$$(7) \quad q_2 = c_2 q_1, \quad q_3 = c_3 q_1,$$

andererseits aber auch durch Integration von (6)

$$x_2 - c_2 x_1 = \text{konst.}, \quad x_3 - c_3 x_1 = \text{konst.}$$

Der Neigungswinkel  $\vartheta$  ist also eine Funktion von  $(x_2 - c_2 x_1)$  und  $(x_3 - c_3 x_1)$ .

Wegen (7) besitzt somit der Drehvektor

$$(8) \quad \mathbf{q} = q_1 \mathbf{c} \quad \text{mit} \quad \mathbf{c} = \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3$$

in  $R$  konstante Richtung.<sup>2</sup>

Wir setzen nun diese Darstellung des Drehvektors in die Bedingung (4) ein und finden

$$(9) \quad [\mathbf{a}'\bar{\mathbf{q}} + q_1(\mathbf{a}'\mathbf{c}\mathbf{x})]^2 = \cos^2 \vartheta [\bar{\mathbf{q}} + q_1(\mathbf{c}\times\mathbf{x})]^2.$$

## IV

Nun bilden wir beiderseits des Gleichheitszeichens von (9) die Ableitung nach dem Parameter  $t$ .

$$(10) \quad [\mathbf{a}'\bar{\mathbf{q}} + q_1(\mathbf{a}'\mathbf{c}\mathbf{x})] \cdot [\dot{\mathbf{a}}'\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{a}'\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \dot{q}_1(\mathbf{a}'\mathbf{c}\mathbf{x}) + q_1(\dot{\mathbf{a}}'\mathbf{c}\mathbf{x})] = \\ \cos^2 \vartheta [\bar{\mathbf{q}} + q_1(\mathbf{c}\times\mathbf{x})] \cdot [\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \dot{q}_1(\mathbf{c}\times\mathbf{x})].$$

Die Elimination von  $\cos^2 \vartheta$  aus (9) und (10) liefert, wenn noch  $\mathbf{a}'\bar{\mathbf{q}} + q_1(\mathbf{a}'\mathbf{c}\mathbf{x}) \neq 0$  vorausgesetzt wird,

$$(11) \quad [\bar{\mathbf{q}} + q_1(\mathbf{c}\times\mathbf{x})]^2 \cdot [\dot{\mathbf{a}}'\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{a}'\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \dot{q}_1(\mathbf{a}'\mathbf{c}\mathbf{x}) + q_1(\dot{\mathbf{a}}'\mathbf{c}\mathbf{x})] = \\ [\mathbf{a}'\bar{\mathbf{q}} + q_1(\mathbf{a}'\mathbf{c}\mathbf{x})] \cdot \{[\bar{\mathbf{q}} + q_1(\mathbf{c}\times\mathbf{x})] \cdot [\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \dot{q}_1(\mathbf{c}\times\mathbf{x})]\}.$$

<sup>2</sup> Da  $\mathbf{q} \neq 0$  vorausgesetzt werden kann, muß einer der Werte  $q_i \neq 0$  angenommen werden. Es bedeutet keine Einschränkung, wenn wir  $q_1 \neq 0$  ansetzen, andernfalls lassen wir dieses  $q_i$  an die Stelle von  $q_1$  treten.

## V

Gleichung (11) stellt eine polynomiale Identität in den  $x_i$  dar, gestattet somit den Koeffizientenvergleich. Wir nehmen ihn nach der Ordnung der auftretenden Potenzen von  $x_i$  vor und erhalten.

1) Kubische Glieder treten nicht auf, da

$$(12) \quad \mathbf{a}' = \mathbf{e}_3' = \text{konst.}$$

2) Nun sammeln wir in (11) die quadratischen Glieder, berücksichtigen  $\dot{\mathbf{a}}' = 0$  und fassen zusammen

$$(13) \quad (\mathbf{c} \times \mathbf{x})^2 [\dot{q}_1(\mathbf{a}'\bar{\mathbf{q}}) - q_1(\mathbf{a}'\dot{\bar{\mathbf{q}}})] - (\mathbf{a}'\mathbf{c}\mathbf{x}) [\dot{q}_1(\bar{\mathbf{q}}\mathbf{c}\mathbf{x}) - q_1(\dot{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{c}\mathbf{x})] = 0.$$

Die weitere Ausführung ergibt mit

$$(14) \quad Q_i = \dot{q}_1\bar{q}_i - q_1\dot{\bar{q}}_i, \quad \mathbf{Q} = \sum Q_i \mathbf{e}_i = \dot{q}_1\bar{\mathbf{q}} - q_1\dot{\bar{\mathbf{q}}}$$

die folgende kurze Schreibweise

$$\dot{q}_1(\mathbf{a}'\bar{\mathbf{q}}) - q_1(\mathbf{a}'\dot{\bar{\mathbf{q}}}) = \mathbf{a}'\mathbf{Q},$$

$$\dot{q}_1(\bar{\mathbf{q}}\mathbf{c}\mathbf{x}) - q_1(\dot{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{c}\mathbf{x}) = (\mathbf{Q}\mathbf{c}\mathbf{x}).$$

(13) geht damit über in

$$(15) \quad (\mathbf{c} \times \mathbf{x})^2 (\mathbf{a}'\mathbf{Q}) - (\mathbf{a}'\mathbf{c}\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{Q}\mathbf{c}\mathbf{x}) = 0.$$

Hierin trennen wir nun die quadratischen Glieder und fassen die Koeffizienten von  $x_1^2$ ,  $x_2^2$  bzw.  $x_3^2$  zusammen. Das Gleiche erreichen wir, wenn wir der Reihe nach  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$  für  $i=1, 2, 3$  wählen und zur Abkürzung

$$\mathbf{b}_i = (\mathbf{c} \times \mathbf{e}_i)^2 \mathbf{a}' - (\mathbf{a}'\mathbf{c}\mathbf{e}_i) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{e}_i)$$

eingeführen. Wir erhalten so für  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  ein System von drei linearen homogenen Gleichungen in der Gestalt von

$$\mathbf{b}_i \mathbf{Q} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Da die Koeffizientendeterminante in der Form des Spatproduktes  $(\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3)$  im allgemeinen nicht identisch verschwindet, wie man sich durch direkte Berechnung oder auch durch die Wahl spezieller Beispiele für die Vektoren  $\mathbf{a}'$  und  $\mathbf{c}$  klar machen kann, folgt  $Q_i = 0$ . Die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$Q_i = \dot{q}_1\bar{q}_i - q_1\dot{\bar{q}}_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

liefert

$$\bar{q}_i = C_i q_1$$

mit der Integrationskonstanten  $C_i$ . Durch Zusammenfassung gelangen wir zu

$$(16) \quad \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{C} q_1 \quad \text{mit} \quad \mathbf{C} = \sum C_i \mathbf{e}_i \quad (C_i = \text{konst.})$$

3) Man überzeugt sich leicht, daß die Darstellungen (8), (12) und (16) die restlichen quadratischen, aber auch die linearen Glieder, sowie das absolute Glied in (11) erfüllen.



## VI

Die durch  $\mathbf{q}$  und  $\bar{\mathbf{q}}$  bestimmte Momentanschraubung besitzt an jeder Stelle des Bewegungsvorgangs konstanten Schraubparameter

$$k = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{C}}{c^2}.$$

Mit den bekannten Formeln der Kurventheorie können wir nun *Krümmung*  $\kappa$  und *Torsion*  $\tau$  der Bahnkurve des Punktes  $X$  ermitteln. Hierbei ist zu beachten, daß sich die Ableitungen von im Gangsystem dargestellten Vektoren, die dem Bewegungsvorgang unterworfen werden, im Rastsystem  $R'$  mittels des *Darboux'schen* Drehvektors  $\mathbf{q}$  bilden lassen: Sei  $\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{e}_i$  ein auch im Gangraum  $R$  mit  $t$  veränderlicher Vektor, seine Darstellung in  $R'$  ist dann gemäß (1) durch

$$\mathbf{v}' = \sum v_i a_{ij} \mathbf{e}'_j = \sum v'_j \mathbf{e}'_j$$

mit  $v'_j = \sum a_{ij} v_i$  gegeben. Nun bilden wir — bezogen auf das Koordinatensystem von  $R'$  — die Ableitung nach  $t$

$$\dot{\mathbf{v}}' = \sum \dot{v}_i a_{ij} \mathbf{e}'_j + \sum v_i \dot{a}_{ij} \mathbf{e}'_j.$$

Dieser Vektor besitzt nun im Gangsystem nach (2) die Darstellung

$$\dot{\mathbf{v}}' = \sum \dot{v}_i \mathbf{e}_i + \sum v_i \dot{a}_{ij} a_{kj} \mathbf{e}_k = \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{q} \times \mathbf{v}.$$

Hierbei entspricht  $\dot{\mathbf{v}} = \sum \dot{v}_i \mathbf{e}_i$  der Relativgeschwindigkeit (Änderung von  $\mathbf{v}$  in  $R$ ), hingegen  $\mathbf{q} \times \mathbf{v}$  der Führungsgeschwindigkeit dargestellt in  $R$ . Um Krümmung  $\kappa$  und Torsion  $\tau$  zu berechnen, müssen wir aus  $\dot{\mathbf{x}}' = q_1 (\mathbf{C} + \mathbf{c} \times \mathbf{x})$  durch Differenzieren nach  $t$  die zweiten und dritten Ableitungen  $\ddot{\mathbf{x}}'$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}'$  berechnen und (8) berücksichtigen.<sup>3</sup> Hierbei kürzen sich die Potenzen von  $q_1$ . Krümmung  $\kappa$  und Torsion  $\tau$  der Bahnkurven sind somit *konstant*, die *Bahnkurven also gemeine Schraublinien*, der sie erzeugende Bewegungsvorgang also eine *Schraubenbewegung*. Die Momentanschraubung fällt stets mit der dargestellten Schraubung zusammen. Wenn wir von Sonderfällen (spezielle Wahl der Integrationskonstanten) absehen, gilt der

**SATZ.** *Im euklidischen Raum sind die Schraubenbewegungen dadurch charakterisiert, daß die Bahnkurve jedes bewegten Punktes  $X$  Böschungslinie gegenüber einer festen Richtung ist. Der zugehörige Neigungswinkel hängt von der Lage von  $X$  im Gangraum ab.*

<sup>3</sup> Es empfiehlt sich,  $\mathbf{C} + \mathbf{c} \times \mathbf{x} = \mathbf{X}$ , also  $\dot{\mathbf{x}}' = q_1 \mathbf{X}$  zu setzen, dann findet man leicht

$$\kappa^2 = \frac{(\mathbf{c} \times \mathbf{X})^2}{(\mathbf{X}^2)^2}, \quad \tau = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{X}}{\mathbf{X}^2}.$$



## VII

Da

$$\mathbf{c} \times \mathbf{x} = \mathbf{e}_1(c_2 x_3 - c_3 x_2) + \mathbf{e}_2(c_3 x_1 - x_3) + \mathbf{e}_3(x_2 - c_2 x_1),$$

$$c_2 x_3 - c_3 x_2 = c_2(x_3 - c_3 x_1) - c_3(x_2 - c_2 x_1)$$

bestätigt man wegen (4) oder

$$(4') \quad [\mathbf{a}'(\mathbf{C} + \mathbf{c} \times \mathbf{x})]^2 = (\mathbf{C} + \mathbf{c} \times \mathbf{x})^2 \cos^2 \vartheta$$

die Abhängigkeit des Winkels  $\vartheta$  nur von  $(x_2 - c_2 x_1)$  und von  $(x_3 - c_3 x_1)$ . Damit ist aber noch eine weitere Erkenntnis gewonnen: Die Gleichung (4) bzw. (4') ist quadratisch in den  $x_i$  und kann daher als die Gleichung jener *Quadrik* aufgefaßt werden, auf der alle Punkte  $X$  des Gangraums  $R$  liegen, deren zugehörige Bahnlinien gemeine Schraublinien zum gleichen Neigungswinkel  $\vartheta$  sind. Da in dieser Gleichung nur zwei wesentliche Veränderliche, nämlich  $(x_2 - c_2 x_1)$  und  $(x_3 - c_3 x_1)$  auftreten, muß es sich um *Zylinderflächen zweiter Ordnung* handeln. Als Diskriminante  $\Delta$  der quadratischen Terme in (4') berechnet man

$$\Delta = \cos^2 \vartheta [\mathbf{c}^2 \sin^2 \vartheta - (\mathbf{a}' \mathbf{c})^2].$$

Je nachdem ob  $\Delta \geq 0$ , erhält man hyperbolische, parabolische bzw. elliptische Zylinder.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] MÜLLER, H. R., Zwanglaufbewegungen mit Böschungslinien als Punktbahnen, *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.* 35 (1983), 65—73. *MR 85m*: 53006.
- [2] BLASCHKE, W., *Analytische Geometrie*, 2. Aufl., Birkhäuser-Verlag, Basel—Stuttgart, 1954. *MR 16*—63.
- [3] MÜLLER, H. R., *Kinematik*, Sammlung Götschen, Bd. 584/584a, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1963. *MR 28* # 757.

(Eingegangen am 13. März, 1984)

INSTITUT FÜR GEOMETRIE  
TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
POCKELSSTRASSE 14  
D—3300 BRAUNSCHWEIG  
FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY



## WHEN IS IT POSSIBLE TO TRANSLATE A CONVEX POLYHEDRON IN AN OTHER ONE?

A. BEZDEK and K. BEZDEK

*To Professor L. Fejes Tóth on his 70th birthday*

### 1. Introduction

Let us recall a theorem of A. D. Alexandrow [1].

*Let  $p_1, p_2$  be convex polygons such that for any side of  $p_1$  with the exception at most one there exist a side of  $p_2$  having the same exterior normal vector. If any side of  $p_1$  is shorter than the associated side of  $p_2$  then  $p_1$  is translatable in  $p_2$ .*

We underline the fact that the translation which transfers a side of  $p_1$  into the associated side of  $p_2$  transfers  $p_1$  into  $p_2$ .

Can be this result extended to the 3-dimensional space? At finding the corresponding conditions we were motivated by the following theorem of W. Süss [2].

*Two compact convex sets in the  $n$ -dimensional space are translated versions iff the projections of them onto any plane are translated versions.*

We shall restrict ourselves to the 3-dimensional space and use the following terminology. A *convex polyhedron* is defined by the convex hull of a finite number of points being not planar. A plane is said to be a *supporting plane* if it has at least one point in common with the polyhedron and it does not separate any two points of the polyhedron. It will be convenient to call the intersection of any supporting plane and the polyhedron a *face*. In this sense a face can be a "*vertex*", an "*edge*" or a "*real face*" in accordance with the fact that it is 0, 1, or 2 dimensional set.

We say that a supporting plane belongs to a face if it contains the face in question but no other one. Let us associate with a face the number set of the exterior normal vectors of the supporting planes belonging to the face.

Any element of this set determines the face, thus it will be called the *exterior normal vector of the face*.

Two faces belonging to different polyhedrons are said to be *parallel* if they have exterior normal vector in common.

---

Research (partially) supported by Hungarian National Foundation for Scientific Research Grant No. 1238.

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A45; Secondary 51M05.

*Key words and phrases*. Convex polyhedron, projection, translation.

## 2. Results

Let us return to the theorem of A. D. Alexandrow. Roughly speaking it states if each edge of the polygon  $p_1$  is translatable in a parallel edge of the polygon  $p_2$  then  $p_1$  is translatable in  $p_2$ . One could expect if

- (1) *each real face of the polyhedron  $P_1$  is translatable in a parallel real face of the polyhedron  $P_2$*

then

- (2)  *$P_1$  is translatable in  $P_2$ .*

K. Böröczky has given two polyhedrons (unpublished) showing that the above statement is false. Construction I will show that the restriction

- (3) *projecting the polyhedrons  $P_1, P_2$  onto any plane the projection of  $P_1$  is translatable in the projection of  $P_2$*

is not sufficient for the property (2) (compare with the theorem of W. Süß).

A bit complicated Construction II will show that neither the restrictions (1) and (3) together imply the property (2).

Finally we will prove the

**THEOREM.** *If any face of the polyhedron  $P_1$  is translatable in any parallel face of the polyhedron  $P_2$  then (2) is true.*

## 3. Construction I

Let  $P_2$  be a polyhedron such that no three real sides of it should be perpendicular to the same plane. For example  $P_2$  can be a tetrahedron. Let  $P_1$  be a polyhedron contained by the spherical ring which is determined by the concentric spheres of radii  $R + \frac{\varepsilon}{2}, R + \varepsilon$  where  $R$  denotes the inradius of  $P_2$  and  $\varepsilon$  denotes a sufficient small positive number.

Certainly  $P_1$  is not translatable in  $P_2$ .

Let the convex polygon  $p$  the projection of  $P_2$  onto an arbitrary plane. In view of the definition of  $P_2$  the projection of the insphere of  $P_2$  can be touched neither by three sides of  $p$  nor by two parallel sides of  $p$ . Thus  $p$  has an incircle of radius greater than  $R$ . According to Weierstrass' continuity-theorem there exist an  $\varepsilon$  such that any projection of  $P_2$  should have an incircle of radius greater than  $R + \varepsilon$ . It means the polyhedrons satisfy the property (2).

# 4. Construction II

Denote  $ABCD$  the vertices of a regular tetrahedron of side length 1. Diminishing the faces  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$ ,  $BCD$  around the centroids  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$  by the factor  $\frac{1}{4}$  we get the regular triangles  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2D_2$ ,  $A_3C_3D_3$ ,  $B_4C_4D_4$  (Fig. 1).

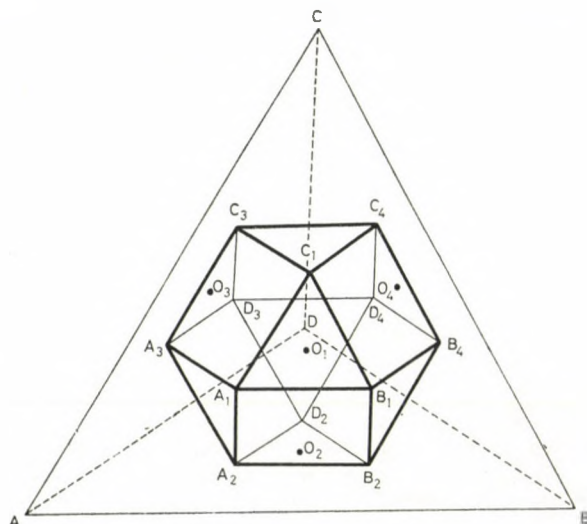


Fig. 1

Denote  $\hat{P}_2$  the convex hull of the last 4 triangles. Besides these and the regular triangles  $A_1A_2A_3$ ,  $B_1B_2B_4$ ,  $C_1C_3C_4$ ,  $D_2D_3D_4$  the faces of  $\hat{P}_2$  are squares of side length  $\frac{1}{4}$ .

In order to define an other polyhedron  $\hat{P}_1$  let us consider the regular tetrahedron  $ABCD$  again. The centroids  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$  are the vertices of a regular tetrahedron of side length  $\frac{1}{3}$ . Consider the only cube which contains  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$  as vertices (Fig. 2). Denote the other vertices of this cube by  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  such that  $A'$  (and  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ , resp.) should be the nearest to the vertex  $A$  (and  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , resp.).  $\hat{P}_1$  is derived from this cube by the following way. At the vertices  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  congruent to  $A'O_1O_2O_3$  similar tetrahedrons  $AA'_1A'_2A'_3$ ,  $BB'_1B'_2B'_4$ ,  $CC'_1C'_3C'_4$ ,  $DD'_2D'_3D'_4$  will be cut off such that  $x'_i \in xO_i$  where  $x = A, B, C, D$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  and  $A'_1A'_2 = \frac{1}{4} - \Delta$  (where  $0 < \Delta < \frac{1}{24}$ ) obviously any triangle-face of  $\hat{P}_1$  is translatable in a parallel triangle-face of  $\hat{P}_2$ . On the hexagonal-faces of  $\hat{P}_1$  we can state only that for each of them there exist a parallel square-face of  $\hat{P}_2$ . To arrange that any face of the first polyhedron should be translatable in a parallel-face of the second we will modify the hexagonal-faces of  $\hat{P}_1$  and the square-faces



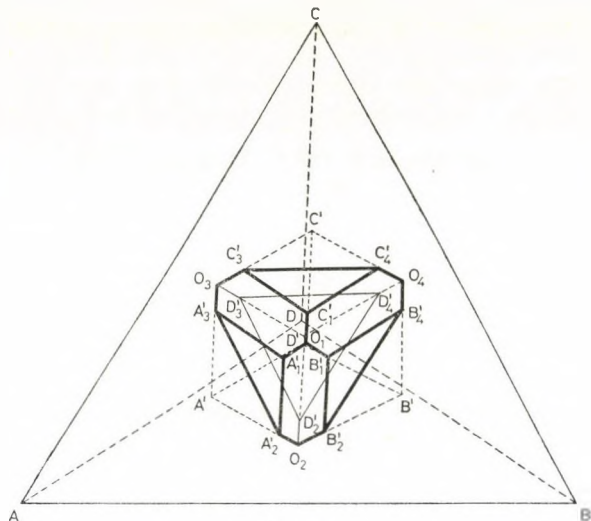


Fig. 2

of  $\bar{P}_2$ . For symmetrical reasons it is enough to describe the modification in case of the face pair  $O_1B_1B'_4O_4C'_4C'_1$ ,  $C_1B_1B_4C_4$ .

Denote  $O$  (and  $F_C$ ,  $F_B$ , resp.) the midpoint of the section  $O_1O_4$  (and  $C'_1C'_4$ ,  $B'_1B'_4$ , resp.). Let the trapeziums  $C_1F'_CO'_C O_{1C}$ ,  $C_4F''_CO''_C O_{4C}$ ,  $B_1F'_BO'_B O_{1B}$ ,  $B_4F''_BO''_B O_{4B}$  be the translated versions of the trapeziums  $C'_1F_COO_1$ ,  $C'_4F_COO_4$ ,  $B'_1F_BOO_1$ ,  $B'_4F_BOO_4$  (Fig. 3).

In view of  $0 < \Delta < \frac{1}{24}$  and of the following simple computation the four new trapeziums are disjunct in accordance with Fig. 3.

$$O_{1C}O'_C = O''_CO_{4C} = \frac{1}{6} = O_{1B}O'_B = O''_BO_{4B}$$

$$C_1F'_C = F''_CC_4 = \frac{1}{8} - \frac{\Delta}{2} = B_1F'_B = F''_BB_4$$

$$O'_CF'_C = O''_CF''_C = \frac{1}{24} + \frac{\Delta}{2} = F'_BO'_B = F''_BO''_B.$$

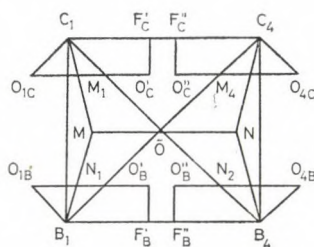


Fig. 3

Denote  $\tilde{O}$  the centroid of the square  $C_1B_1B_4C_4$ . The sections  $\tilde{OC}_1$ ,  $O_{1C}O'_C$  intersect each other in an inner point  $M_1$ , since  $\frac{1}{24} + \frac{\Delta}{2} < \frac{1}{8} - \frac{\Delta}{2}$ . Similarly, let  $M_4 := \{\tilde{OC}_4 \cap O'_C O_{4C}\}$ ,  $N_1 := \{\tilde{OB}_1 \cap O'_B O_{1B}\}$ ,  $N_2 := \{\tilde{OB}_4 \cap O'_B O_{4B}\}$ . Finally, choose the points  $M$ ,  $N$  in the interior of the square  $C_1B_1B_4C_4$  such that 1)  $MN \parallel C_1C_4$ , 2)  $O$  should be the midpoint of  $MN$ , 3)  $MN > \frac{1}{6} + 2\Delta$ . Consider the following tri-

angulation of the square  $C_1B_1B_4C_4$ :  $C_1B_1M$ ,  $C_1M\tilde{O}$ ,  $B_1M\tilde{O}$ ,  $C_1OC_4$ ,  $B_1\tilde{O}B_4$ ,  $C_4ON$ ,  $B_4NO$ ,  $C_4NB_4$ . Let us observe that the triangles  $C_1O_{1C}M$ ,  $C_4M_4O_{4C}$ ,  $B_1N_1O_{1B}$ ,  $B_4N_2O_{4B}$  are translatable one by one in the interiors of the triangles  $C_1M\tilde{O}$ ,  $C_4\tilde{O}N$ ,  $B_1\tilde{O}M$ ,  $B_4\tilde{O}N$ , on the other hand both trapeziums  $C_1F'_C O'_C M_1$ ,  $C_4F'_C O'_C M_4$  (and  $B_1F'_B O'_B N_1$ ,  $B_4F'_B O'_B N_2$ , resp.) are translatable disjointly in the interior of the triangle  $C_1\tilde{O}C_4$  (and  $B_1\tilde{O}B_4$ , resp.). And now the modifications.

From now on  $\tilde{O}$  denotes a point sufficiently close to the plane  $C_1B_1B_4$  with foot the original  $\tilde{O}$ . Project the points i)  $M_1$ ,  $O'_C$ ,  $O'_C$ ,  $M_4$  ii)  $N_1$ ,  $O'_B$ ,  $O'_B$ ,  $N_2$  iii)  $M$ , iv)  $N$  in the direction perpendicular to the plane  $C_1B_1B_4$  into the plane determined by the points i)  $\tilde{O}$ ,  $C_1$ ,  $C_4$  ii)  $\tilde{O}$ ,  $B_1$ ,  $B_4$  iii)  $\tilde{O}$ ,  $C_1$ ,  $O_{1C}$  iv)  $\tilde{O}$ ,  $C_4$ ,  $O_{4C}$  and denote the image points with the same symbols.

Replace on the one hand the face  $C_1C_4B_4B_1$  by the convex hull of the above points and the square  $C_1C_4B_4B_1$  on the other hand the hexagon-face  $O_1B'_1B'_4O_4C'_4C'_1$  of  $\hat{P}_2$  by the convex-polyhedron surface basing on this face and containing the translated versions of the faces  $C_1O_{1C}M$ ,  $C_4M_4O_{4C}$ ,  $N_1O_{1B}B_1$ ,  $N_2B_4O_{4B}$ ,  $C_1M_1O'_C F'_C$ ,  $F'_C O'_C M_4C_4$ ,  $N_1B_1F'_B O'_B$ ,  $O'_B F'_B B_4N_2$ . Carrying out this modification on all the parallel face-pairs of  $\hat{P}_1$ ,  $\hat{P}_2$  we obtain the convex polyhedrons  $P_1^*$ ,  $P_2$ . According to the foregoing every real face of  $P_1^*$  is translatable in the interior of a parallel real face of  $P_2$  and projecting the polyhedron  $P_1^*$ ,  $P_2$  onto any plane the projection of  $P_1^*$  is translatable in the interior of the projection of  $P_2$ . According to Weierstrass' continuity theorem there exist a constant  $\lambda > 1$  such that enlarging the polyhedron  $P_1^*$  by the factor  $\lambda$  the obtained polyhedron  $P_1$  and  $P_2$  preserves the above two properties.  $P_1$ ,  $P_2$  are polyhedrons we wanted to find since  $P_1$  is not translatable in  $P_2$ .

## 5. Proof of the theorem

Translate the polyhedron  $P_1$  such that an arbitrarily chosen real face  $F_1$  of  $P_1$  should be contained by a parallel face  $F_2$  of the polyhedron  $P_2$ . Suppose that the set  $P_1 \setminus P_2$  is not empty.

Denote  $\pi$  the plane of the faces  $F_1 \subset F_2$ . Let the point  $Q$  an element of the closure of  $P_1 \setminus P_2$  that lies nearest to the plane  $\pi$ . Obviously,  $Q$  is an element of the boundaries of  $P_1$  and  $P_2$  and it is not on the plane  $\pi$ .

Consider all the open half-spaces disjoint from  $P_2$  and bounded by the planes containing  $Q$  and a real face of  $P_2$ . At least one of them has common point with  $P_1$  since otherwise by  $P_2$  contained part of a sufficient small neighbourhood of  $Q$  should belong to  $P_1$  which contradicts the definition of  $Q$ . Denote it by  $\mathcal{H}_2$ . Let  $H_2$  be the face of  $P_2$  which bounds  $\mathcal{H}_2$ .

Let  $\pi'$  be the plane parallel with  $\pi$  and containing  $Q$  and let  $\mathcal{H}'$  be the open half-space determined by  $\pi'$  not containing  $\pi$ .

Denote  $H_1$  the (not necessary real) face of  $P_1$  parallel with  $H_2$ .

We obtained that  $H_1 \subset \mathcal{H}' \cap \mathcal{H}_2$ . But this contradicts the remark mentioned after the Alexandrow theorem. To see this we have only to project  $P_1$ ,  $P_2$  perpendicularly onto a plane perpendicular to the line  $(\pi' \cap \{\text{plane of } H_2\})$  (in case of  $\pi' \equiv \{\text{plane of } H_2\}$  any line of  $\pi'$  would do). Thus  $P_1 \setminus P_2 = \emptyset$  and this is what we wanted to prove.

#### REFERENCES

- [1] ALEXANDROW, A. D., *Konvexe Polyeder*, Mathematische Lehrbücher und Monographien. Abt.: Math. Monographien, Bd. VIII, Akademie-Verlag, Berlin, 1958, 239—241. *MR* 19—1192.
- [2] LEICHTWEISS, K., *Konvexe Mengen*, Hochschulbücher für Mathematik, 81, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980, 241—243. *MR* 81b: 52001.

(Received March 30, 1984)

MTA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETE  
POSTAFIÓK 127  
H—1364 BUDAPEST

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR  
GEOMETRIA TANSZÉK  
RÁKÓCZI ÚT 5  
H—1088 BUDAPEST  
HUNGARY

## ON COMPACT PACKINGS

A. BEZDEK, K. BEZDEK and K. BÖRÖCKY

*To Professor L. Fejes Tóth on his 70th birthday*

In the Euclidean plane we consider a packing of closed convex discs, i.e. a set of discs not two having interior points in common. We say that a disc  $a$  is enclosed by the discs  $b_1, b_2, \dots$  if any curve connecting a point of  $a$  with a point sufficiently far from  $a$  intersects at least one of the  $b_i$ 's. If in the packing each disc is enclosed by the discs having a point common with it then the packing is said to be compact. This notion was introduced by László Fejes Tóth, who proved that the lower density of a compact packing of homothetic centro-symmetric convex discs of positive homogeneity is at least  $3/4$ , and conjectured that dropping the condition of central symmetry the bound  $3/4$  is to be replaced by  $1/2$ . The homogeneity of the discs is defined by the infimum of the areas of the discs divided by the supremum of the areas of the discs. For discs with homogeneity equal to zero the density can assume any value from 0 to 1.

The following theorem confirms the above conjecture.

**THEOREM.** *If  $d$  denotes the density of a compact packing of the Euclidean plane by homothetic convex discs such that the quotient of the areas of any two discs is greater than a positive number, then*

$$d \geq \frac{1}{2}.$$

*Equality may hold for any packings of homothetic triangles.*

**REMARK 1.** Equality holds for the lattice packing of triangles where the triangles touch each other at the vertices (Fig. 1). But this is not the only extremal configuration. For example, we get other extremal configuration if we replace the union of number of  $\frac{n(n+1)}{2}$  triangles lying in  $n$ -times greater triangle by their convex hull (Fig. 2). Obviously, we may carry out this modification simultaneously on other parts of the packing if the concerned triangles form a packing of density 0.

---

Research (partially) supported by Hungarian National Foundation for Scientific Research Grant No. 1238.

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A45; Secondary 51M05.

*Key words and phrases*. Packing of convex discs, compactness, density.

REMARK 2. The condition of the above theorem that the quotient of the areas of any two discs is greater than a positive number is not negligible. Consider the incircles of the faces of the mosaic  $\{p, 3\}$   $p > 6$  which is represented in the Poincaré model (Fig. 3). Since this circle system is bounded the density is equal to 0.



Fig. 1

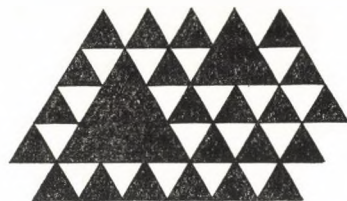


Fig. 2



Fig. 3

REMARK 3. L. Fejes Tóth proposed the following sketch to prove the Theorem. Consider a compact packing of homothetic convex domains  $\{S_1, S_2, \dots\}$  with centroids  $\{C_1, C_2, \dots\}$ . Connect the points  $C_i, C_j$  of the neighbouring domains  $S_i, S_j$  by the broken line  $C_i V_{ij} C_j$  where  $V_{ij}$  is one of the common points of  $S_i$  and  $S_j$ . The broken lines divide the plane into hexagons. L. Fejes Tóth conjectured

LEMMA 1. *The density of the domains  $\{S_i\}$  in each hexagon is at least  $1/2$ .*

K. Böröczky proved Lemma 2 (unpublished) which is a bit stronger form of Lemma 1. Let  $H$  be one of the hexagons and suppose that it is overlapped by the domains  $S_1, S_2, S_3$ .

LEMMA 2. *The area of the hexagon  $H$  is greater than the double area of the triangle  $V_{12}V_{23}V_{31}$ .*

In this paper we give a short proof of Theorem. From this proof it does not follow Lemma 2 but it has an advantage that it states that Lemma 1 remains true if in the above sketch we replace the term "centroids" by the term "arbitrarily chosen homothetic inner points".

PROOF OF THE THEOREM. Consider a compact packing of homothetic convex domains  $\{S_1, S_2, \dots\}$  with arbitrarily chosen homothetic inner points  $\{O_1, O_2, \dots\}$ . Connect the points  $O_i, O_j$  of the neighbouring domains  $S_i, S_j$  by the broken line



$O_i V_{ij} O_j$  where  $V_{ij}$  is one of the common points of  $S_i$  and  $S_j$ . Since the quotient of the areas of any two discs is greater than a positive number the broken lines divide the plane into not necessarily convex hexagons. We shall prove the Theorem by showing that the density of the domains  $\{S_i\}$  in each hexagon is at least  $1/2$ .

Let one of the hexagons  $H$  and suppose that it is overlapped by the domains  $S_1, S_2, S_3$ . Transform the configuration consisting of  $S_1, S_2, S_3, H$  by an equal area affinity such that the triangle  $V_{12}V_{23}V_{31}$  should be regular and denote the images by the same symbols (Fig. 4).

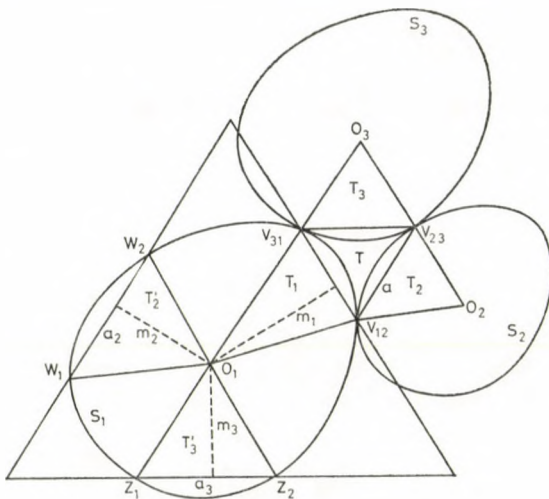


Fig. 4

Let the points  $W_1, W_2 \in S_1$  (and  $Z_1, Z_2 \in S_1$ , resp.) be homothetic with the points  $V_{12}, V_{23} \in S_2$  (and  $V_{31}, V_{23} \in S_3$ , resp.). We leave to the reader the proof of the obvious fact that the hexagon  $W_1 W_2 V_{31} V_{12} Z_2 Z_1$  is convex. The lines  $W_1 W_2, Z_1 Z_2, V_{31} V_{12}$  determine a regular triangle of side length  $b$ . Since the point  $O_1$  is not necessarily contained by this triangle we can only state that

$$(1) \quad m_1 + m_2 + m_3 \cong \frac{\sqrt{3}}{2} b$$

where  $m_1, m_2, m_3$  denote the distances of  $O_1$  from the lines  $V_{12}V_{31}, W_1W_2$  and  $Z_1Z_2$ . Denote  $T, T_1, T_2, T'_2, T_3, T'_3$  the areas of the triangles  $V_{12}V_{23}V_{31}, V_{12}V_{31}O_1, V_{12}O_2V_{23}, W_1O_1W_2, V_{23}O_3V_{31}, Z_1Z_2O_1$ . Finally  $a, a_2, a_3$  denote the lengths of the sections  $V_{12}V_{23}, W_1W_2, Z_1Z_2$ .

In view of (1) we have

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 + T_3 &= a^2 \left( \frac{T_1}{a^2} + \frac{T'_2}{a_2^2} + \frac{T'_3}{a_3^2} \right) = \frac{a^2}{2} \left( \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a_2} + \frac{m_3}{a_3} \right) \cong \\ &\cong \frac{a^2}{2} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{b} \cong \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = T. \end{aligned}$$

Obviously, none or one (for example triangle  $T_1$ ) of the triangles  $T_1, T_2, T_3$  is contained by the triangle  $T$ . In the first case the proved inequality  $T_1 + T_2 + T_3 \cong T$  (in the second case the transformed form  $T_2 + T_3 \cong T - T_1$ ) implies that the density of the domains  $S_1, S_2, S_3$  in  $H$  is at least  $1/2$ . It is easy to see that equality holds only for packings consisting of triangles.

*(Received April 5, 1984)*

A. Bezdek

MTA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETE  
POSTAFIÓK 127  
H-1364 BUDAPEST

K. Bezdek and K. Böröczky

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR  
GEOMETRIA TANSZÉK  
RÁKÓCZI ÚT 5  
H-1088 BUDAPEST  
HUNGARY

## ON GENERALIZED NEIGHBOUR PACKINGS OF DOMAINS IN THE EUCLIDEAN PLANE

E. JUCOVIČ and S. ŠEVEC

*To L. Fejes Tóth on his 70th birthday*

By a domain we mean a homeomorphic image of the closed circle. Convex domains are called discs. A packing of domains is a set of domains in the euclidean plane no two of which have common inner points. Two domains in a packing are called neighbour domains if they have a boundary point in common.

L. Fejes Tóth [1] suggested the study of  $k$ -neighbour packings of discs, i.e. that of packings in which every disc has  $k$  neighbours; moreover, all discs are supposed to be congruent. We generalize the object of the investigations retaining the phenomenon "to be neighbour" of domains in attention.

All domains in the packing considered are divided into  $p$  disjoint non-empty sets  $S_1, S_2, \dots, S_p$ , where  $S_i$  contains  $s_i$  elements so that each domain from  $S_i$  has exactly  $q_{ij}$  neighbour elements belonging to the set  $S_j$ . Such a packing can be called  $((q_{ij}), (s_i))$ -packing. The obvious problem is: To which sequences of  $p^2 + p$  numbers there exist  $((q_{ij}), (s_i))$ -packings? Of course, various restrictions on the shapes of the domains can be imposed. In this note we solve the general problem mentioned for  $p=2$  supposing furthermore that  $q_{ii}=0$ , and its special cases assuming that all the domains are equal circular discs.

To simplify the formulations we repeat the notions introduced and change the notations. All domains are divided into two sets, white and black. By an  $((V, v)(B, b))$ -packing of domains we mean a packing of  $V$  white and  $B$  black domains such that every white domain has  $v$  black neighbours and every black domain has  $b$  white neighbour domains; no two domains of the same colour are neighbours. The question is: For which quadruples  $((V, v)(B, b))$  of positive integers there exist  $((V, v)(B, b))$ -packings? If such a packing exists, we call the quadruple  $((V, v)(B, b))$  realizable and the packing itself a realization of the quadruple. (To shorten the exposition we assume  $0 < b \leq v$ ; obviously if  $((V, v)(B, b))$  is realizable then so is  $((B, b)(V, v))$ .)

Given two disjoint realizations  $P_1, P_2$  of the quadruples  $((V_1, v)(B_1, b))$  and  $((V_2, v)(B_2, b))$  the union of  $P_1, P_2$  is a realization of  $((V_1 + V_2, v)(B_1 + B_2, b))$ . To avoid misunderstanding we will deal in the sequel with connected packings only. This concept is introduced by means of the graph  $G$  associated with a packing  $P$  as follows (Österreicher—Linhart [4]): With every domain of  $P$  associate its inner point as a vertex of  $G$ : two vertices are joined by an edge if the corresponding domains are neighbours. We call the packing  $P$  connected if its graph  $G$  is connected.

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A45; Secondary 05C30.

*Key words and phrases*. Packing of discs,  $k$ -neighbour packing,  $(u, v, w, b)$ -packing of domains, the graph of a packing.

THEOREM 1. *The quadruple of positive integers  $((V, v)(B, b))$  is realizable if and only if it is one of the following quadruples:*

$((1, v)(v, 1)), v$  arbitrary;

$(V, v)\left(\frac{Vv}{2}, 2\right), V, v \geq 2, Vv$  even;

$((V, 3)(V, 3)), V \geq 4, V \neq 5$ ;

$((3k, 4)(4k, 3)), k \geq 2$ ;

$((3k, 5)(5k, 3)), k \geq 4, k \neq 5$ .

*In all these cases  $((V, v)(B, b))$  is realizable by a packing consisting of congruent discs.*

PROOF. The necessity of the conditions will be proved using the graph  $G$  associated with a packing  $P$  as it was defined before. Clearly,  $G$  can always be constructed so that it is a planar bipartite graph; one vertex-part consists of  $V$   $v$ -valent vertices and the second vertex-part consists of  $B$   $b$ -valent vertices. The quadruple  $((V, v)(B, b))$  is not realizable if there does not exist a connected planar bipartite graph having precisely  $V$  vertices of valency  $v$  and  $B$  vertices of valency  $b$ .

The following relations are obvious:

$$(1) \quad B \geq v, \quad V \geq b, \quad Vv = Bb;$$

these products express the number of edges of the graph.

The sufficiency of the conditions in Theorem 1 will be proved by direct constructions of the packings. They are demonstrated schematically in the figures where every segment can be replaced by a disc consisting of a rectangle with two half circles added. (The domains of one colour are marked by dotted lines.)

Let  $b=1$ . From the connectedness of the packing follows  $V=1$  and from (1)  $B=v$ . An  $((1, v)(v, 1))$ -packing, for  $v=9$ , is indicated in Fig. 1 (of course, for large  $v$  the domains must be thin enough).

For  $b=2$ , from the assumption  $v \geq b$  and (1) there follows  $v, B, V \geq 2$  and the evenness of the number  $V$  in case  $v$  is odd. Fig. 2 shows a  $((2, v)(v, 2))$ -packing for  $v=5$ ; it makes the general procedure for  $V=2$  straightforward. For  $V \geq 3$ , in the vertices of a regular  $V$ -gon midpoints of mutually parallel white domains are

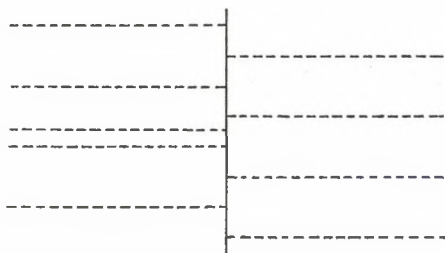


Fig. 1

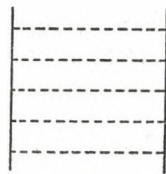


Fig. 2

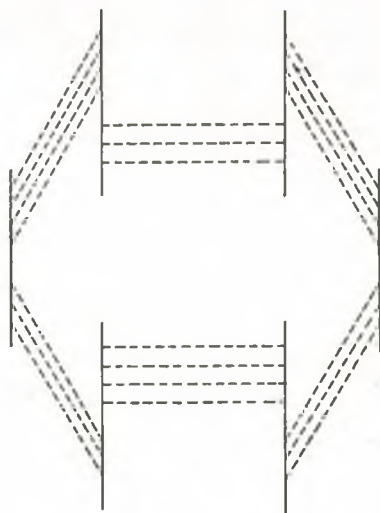


Fig. 3

put, and pairs of them are joined by  $\left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor$  parallel black domains; for odd  $v$  in every second pair a black domain is added. As an example, Fig. 3 shows a  $((6, 7)(21, 2))$ -packing.

Suppose that  $b \geq 3$ . Then from Euler's formula for a planar connected graph  $G$  it follows  $\sum_{i \geq 3} (4-i)s_i + \sum_{i \geq 3} (4-i)v_i = 8$  where  $v_i$  denotes the number of  $i$ -valent vertices of the graph  $G$  and  $s_i$  denotes the number of connected regions of the complement of  $G$  in the plane each bounded by  $i$  edges of  $G$  (see Harary [2]). As the graph considered is bipartite, all its circuits have even length; therefore  $s_i = 0$  for every odd  $i$ . From this it follows  $v_3 \neq 0$ , and we have  $b = 3$ .

Let us now deal with  $(b, v) = (3, 3)$ .  $B = V$  follows from (1). The non-existence of a planar regular trivalent bipartite graph with less than 8 and with 10 vertices can be demonstrated as follows: For 3-connected graphs we use inspection on the known catalogues of 3-polytopal graphs. For graphs with connectedness 1 or 2 removing of the 1 or 2 vertices from a planar graph with 10 or at most 7 vertices results in two graphs with at most 6 vertices. Inspection in the catalogue of graphs with at most 6 vertices in Harary [2] and considering all possibilities show that the original graph cannot be bipartite. For  $V = 4$  we have as unique graph requested the graph of the cube, and in Fig. 4 is depicted the associated packing of domains.

Further, in case  $b = v = 3$ , we do not consider the graphs but the packings only. In Fig. 5 or 6 or 7 the packings for  $V = 6$  or 7 or 9 are depicted, respectively. Increasing the numbers of domains by 8 (4 white and 4 black) is indicated in Fig. 8. A black domain (indicated in the figure by an extended dotted segment) is replaced by 5 black and 4 white domains. Doing this with packings in Fig. 4, 5, 6, 7 we get the requested packings for  $V = 8, 10, 11, 13$ . And the same procedure can be used repeatedly to get the required packings for all  $V$  as asserted in Theorem 1.



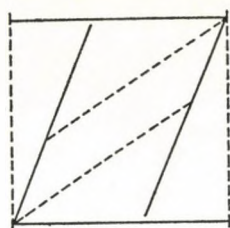


Fig. 4

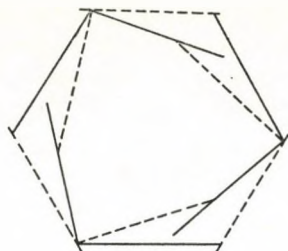


Fig. 5

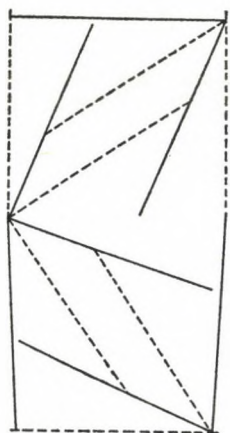


Fig. 6

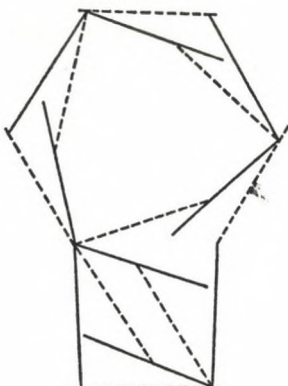


Fig. 7

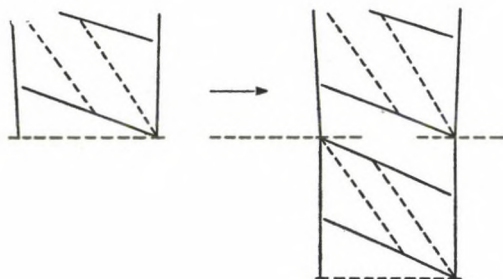


Fig. 8

For  $v \geq 4$ , from investigations in Rosenfeld [5] it follows that the only possible couples  $(b, v)$  are  $(3, 4)$  and  $(3, 5)$ .

$b=3, v=4$ . From (1) and Rosenfeld [5] follows  $B+V=7k$ ,  $k>1$ ,  $V=3k$ ,  $B=4k$  (here and in the sequel in analogous situations  $k$  denotes a positive integer). The packings: For  $k=2$  or  $k=3$  the packings are depicted in Fig. 9 or 10, respectively. Increasing the numbers of domains by 14 (6 white and 8 black) is performed

analogically as in case  $(b, v) = (3, 3)$ : A black domain (drawn "below" in Fig. 9 and 10) is replaced by the set of domains in Fig. 9. This is repeated to get packings for all  $k \geq 2$ . (Some care must be maintained to retain the numbers of mutually touching domains.)

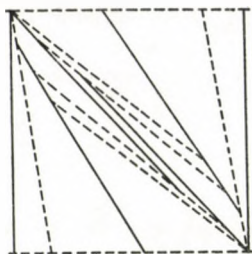


Fig. 9

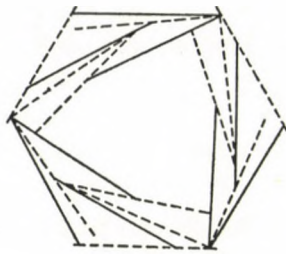


Fig. 10

$b=3, v=5$ . Again from (1) and Rosenfeld [5] follows  $B+V=8k, k \geq 3, V=3k, B=5k$ . The non-existence of a planar bipartite graph with 40 vertices having valencies 3 and 5 can be demonstrated even more easily than in Rosenfeld [5].

Unfortunately, we must omit describing the packings in this case because the figures are too large and the lines are hard to distinguish. The procedure is analogous to that for  $(b, v) = (3, 4)$ . We start with packings for  $k=4, 6, 7, 9$  and increase the numbers of domains by 32 (12 white and 20 black).

REMARK. Following [3], J. Linhart and F. Österreicher have found independently of the authors of the present paper realizations of some singular cases of the quadruples mentioned in Theorem 1. Several of their packings differ from those just described.

Theorem 1 makes few assumptions concerning the shape of the domains considered. The discs in the packings proving Theorem 1 for some quadruples  $((V, v)(B, b))$  are very thin and clearly some quadruples are realizable only with thin discs. Introducing some further parameter would lessen the range of validity of our statement; this parameter could be e.g.  $\frac{m}{n} = \varrho$ , where  $m$  or  $n$  denotes the minimal or maximal distance of parallel supporting lines of the disc considered, respectively. So some quadruples  $((V, v)(B, b))$  are realizable with congruent discs only if for them  $\varrho$  is very small. In the next Theorem we mention the final result about one class of discs with largest  $\varrho$ , the circular discs.

THEOREM 2. *There exists an  $((V, v)(B, b))$ -packing,  $b \leq v$ , of congruent circular discs if and only if the quadruple of positive integers  $((V, v)(B, b))$  is one of the following quadruples:*

1.  $((1, v)(v, 1)), v \leq 5$ .
2.  $((V, 2)(V, 2)), V \geq 2$ .
3.  $((2k, 3)(3k, 2)), k \geq 3$ .
4.  $((V, 4)(2V, 2)), V \geq 7$ .

PROOF. (a) *Case 1.* The maximum number of circles touching a given circle in a packing of congruent circles is 6; in such a packing couples of the 6 circles must touch each other. Therefore  $v \leq 5$ . And, obviously, there exists to each such  $v$  a desired packing. This proves Case 1.

(b) *Case 2.* The necessity of the conditions has been proved in the proof of Theorem 1. The sufficiency: Centers of the discs are vertices of a regular  $2V$ -gon.

(c) In the rest of the proof, the planar diagram of the graph of the circle packing whose construction was described in the proof of Theorem 1 will be used as a substantial tool. Its edges are segments joining centers of neighbour circles. The following Lemma appears useful.

LEMMA. *In the planar graph  $G$  (which we identify with its diagram) of every  $((V, v)(B, b))$ -packing of congruent circular discs,  $b, v \geq 2$ , there is a (graph) circuit  $c$  of length  $g \leq 2V$  such that the closed region  $R$  bounded by it contains all edges (and vertices) of  $G$  or precisely one vertex of  $c$  is incident to edges not lying in  $R$ : in this second case,  $g \leq 2 \left\lfloor \frac{V+1}{2} \right\rfloor$  holds.*

PROOF of Lemma. The graph  $G$  is connected and all its vertices are of valency at least 2. Consider the graph  $bc(G)$  of blocks and cut-vertices of  $G$  (see Harary [2]). It is a tree whose vertices of valency 1 are associated to blocks. If the tree  $bc(G)$  consists of a single vertex,  $G$  itself is a block. On the other hand, in every tree with at least 2 vertices there are at least 2 vertices of valency 1. In both cases we have a block  $K$  of the graph  $G$  containing at most one cut-vertex of  $G$ . All vertices of  $K$  — with the possible exception of the cut-vertex — have valencies in  $K$  equal as in  $G$ , i.e. at least 2, from which it follows that  $K$  contains more than 2 vertices and therefore it is a 2-connected graph (not an edge). From the 2-connectedness and planarity of  $K$  follows that every connected region determined in the plane by the block  $K$  is bounded by a circuit of  $K$ . Therefore  $K$  contains a circuit  $c$  determining in the plane a (closed) region  $R$  which is the union of all regions determined by circuits of the block  $K$ . If  $K \neq G$ , the only vertex of  $K$  incident with edges not belonging to  $K$  is the cut-vertex  $x \in K$  of the graph  $G$ . Moreover, in this case there is another block  $K' \neq K$  and a circuit  $c'$  belonging to  $K'$ . The circuits  $c$  and  $c'$  have at most the vertex  $x$  in common.

Since  $G$  is bipartite, the number of black vertices (=centers of black discs) of  $c$  equals to the number of its white vertices; this number is  $\frac{g}{2}$  where  $g$  denotes the length of  $c$ . From this follows  $g \leq 2V$ . If  $K \neq G$  assume  $g \leq g'$  where  $g'$  denotes the length of  $c'$ . The number of white vertices contained in either of the circuits  $c$  and  $c'$  is at least  $\frac{g}{2} + \frac{g'}{2} - 1$ , from what follows  $g \leq 2 \left\lfloor \frac{V+1}{2} \right\rfloor$ . All assertions of Lemma are proved.

(d) *Case 3.* From (1) follows that  $B=3k$ ,  $V=2k$  holds. The non-realizability of the quadruple  $((2k, 3)(3k, 2))$  for  $k < 3$  will now be proved.

For  $k=1$ , the packing should contain 3 black circles and 2 white ones. The only diagram of the graph of such a packing could be a rhomb containing as its

inner point the center of a black circle. However, for every inner point of the rhomb there is at least one vertex of the rhomb such that the distance of these two points is less than the side of the rhomb. Congruent unit circles centered in the vertices of the graph would not form a packing.

For  $k=2$  consider the circuit  $c$  from Lemma and the region  $R$  bounded by  $c$ . As  $b=2$  and  $v=3$ , every black vertex of  $c$  is incident only with edges belonging to  $c$  and every white vertex with precisely one edge not belonging to  $c$ ; so the second end vertex of such an edge does not belong to the circuit  $c$ . From this and the fact that  $c$  admits at least two white vertices (one of them not being the cut-vertex  $x$ ) follows that at least one vertex of  $G$  is an inner point of  $R$ . From this and the preceding considerations for  $k=1$  it follows that the length  $g$  of the circuit  $c$  exceeds 4. Therefore that situation from Lemma occurs in which all vertices of  $G$  belong to the region  $R$ . Therefore  $g \geq 8$  circles of the given  $((4, 3)(6, 2))$ -packing associated with vertices of the circuit  $c$  enclose at least  $6 - \frac{g}{2} \geq 2$  black circles. (We say that

in a packing  $P$  of circles the circles  $C_1, \dots, C_m$  enclose a circle  $C$  if in the diagram  $G$  of the graph of  $P$  the vertices associated to the  $C_i$  belong to a circuit bounding a region whose inner point is the vertex associated to  $C$ .) In the following part of the proof we show that such a packing does not exist.

Assuming the contrary, let the set  $T$  of at most 8 (unit) circles enclose the (unit) circles  $D_1, D_2$  with centers  $O_1, O_2$ . Then the circles from  $T$  hide the eight rays  $L_1, \dots, L_8$  drawn in Fig. 11 (the rays  $L_1, L_4, L_5, L_8$  are perpendicular to  $O_1O_2$ , the other angles drawn have magnitude  $\pi/3$ ; a circle  $C$  is said to hide a ray  $L$  if the intersection of  $L$  with  $C$  is not empty). Clearly, no circle from  $T$  hides two parallel rays with distance  $>2$  or rays with common starting point and determining an angle  $>\pi/3$ . From this and the position of the rays  $L_1, \dots, L_8$  follows that the set  $T$  can be divided into disjoint subsets  $T_i$  in such a way that:

(i)  $T_i$  consists of those circles from  $T$  which are cut by the ray  $L_i$  or touch it; in that second situation the circle belongs to the same half-plane determined by the line of  $L_i$  in which lies the ray  $L_{(i+1) \bmod 8}$  (denote this half-plane by  $K^+(L_i)$  while the opposite half-plane is denoted  $K^-(L_i)$ ).

Obviously, these subsets  $T_i$  have the following basic properties:

(ii) Any ray  $L$  between the rays  $L_i, L_{i+1}$  (for  $1 \leq i \leq 8, i \neq 4, 8$ ) is hidden by circles from  $T_i$  or  $T_{i+1}$  only.

(iii) A circle from  $T_i$  touches at most circles from  $T_{(i-1) \bmod 8}$  and  $T_{(i+1) \bmod 8}$ .

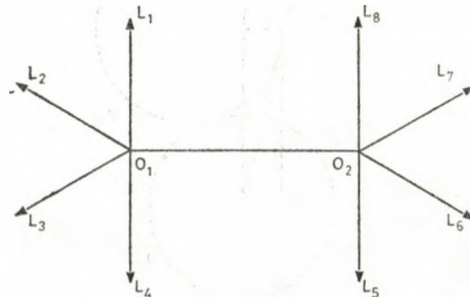


Fig. 11



As the set  $T$  encloses the circles  $D_1, D_2$ , every ray  $L_i$  is hidden by a circle from  $T$  and the sets  $T_i$  are non-empty. Therefore  $\text{card } \bigcup_{i=1}^8 T_i = 8$  and every  $T_i$  consists of a single circle  $B_i$ . Denote by  $\alpha_i$  the magnitude of the angle formed by rays having a common starting point with the ray  $L_i$  and hidden by the circle  $B_i$ ; the symbol  $\alpha_i^+$  or  $\alpha_i^-$  denotes the magnitude of that part of the mentioned angle which belongs to the half-plane  $K^+(L_i)$  or  $K^-(L_i)$ , respectively. Obviously,  $\alpha_i \leq \pi/3$  and  $\alpha_i^+ + \alpha_i^- = \alpha_i$  holds. The set  $T$  enclosing the circles  $D_1, D_2$  hides all rays between  $L_i$  and  $L_{i+1}$  (for  $i \neq 4, 8$ ), which by property (ii) of the sets  $T_i = \{B_i\}$  means the validity of the relations:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1^+ + \alpha_2^- \cong \pi/3 & \alpha_5^+ + \alpha_6^- \cong \pi/3 \\
 (*) & \alpha_2^+ + \alpha_3^- \cong \pi/3 & \alpha_6^+ + \alpha_7^- \cong \pi/3 \\
 & \alpha_3^+ + \alpha_4^- \cong \pi/3 & \alpha_7^+ + \alpha_8^- \cong \pi/3.
 \end{aligned}$$

Denote for  $i=1, 4, 5, 8$  by  $d_i^+$  or  $d_i^-$  the maximum distance of a point belonging to  $K^+(L_i)$  or  $K^-(L_i)$  and to the circle  $B_i$  from the half-plane  $K^-(L_i)$  or  $K^+(L_i)$ , respectively. Clearly,  $d_i^+ + d_i^- = 2$  holds. As  $T$  is an enclosing set of circles and using the property (iii) of the sets  $T_i$  we get: The circle  $B_i$  touches the circle  $B_{(i+1) \bmod 8}$ . From this follows

$$(**) \quad d_4^+ + d_5^- \cong |O_1 O_2|, \quad d_8^+ + d_1^- \cong |O_1 O_2|.$$

(For points  $X, Y$ ,  $|XY|$  denotes their distance.)

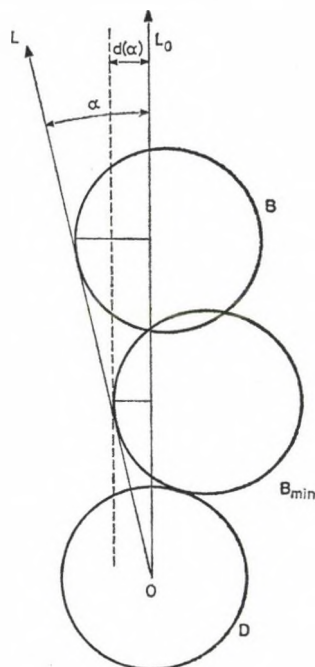


Fig. 12



A certain function mapping angles not greater than  $\pi/3$  to non-negative numbers not greater than 2 will now be defined. Consider such an angle  $\alpha$  with rays  $L_0$ ,  $L$  starting from the point  $O$ , a unit circle  $D$  with center  $O$ , a variable unit circle  $B$  and the circle  $B_{\min}$  touching  $D$ ; moreover, both circles  $B$  and  $B_{\min}$  touch the ray  $L$  and hide the ray  $L_0$ ; none of the circles  $B$  and  $B_{\min}$  have common inner points with  $D$  (Fig. 12). With the angle  $\alpha$  associate the maximum distance  $d(\alpha)$  from  $L_0$  of a point of  $B_{\min}$  lying in that half-plane determined by  $L_0$  to which  $L$  belongs. Clearly,  $d(\alpha)$  is the minimum of all distances of points on circles  $B$  achieved in that way.

The following properties of the function  $d$  are easy to see:

- I.  $d$  is increasing,
- II.  $d(\alpha) + d(\pi/3 - \alpha) = 2$ .

The function  $d$  allows us to express relations between magnitudes of the angles  $\alpha_i^+$ ,  $\alpha_i^-$  and the distance  $d_i^+$ ,  $d_i^-$  ( $i = 1, 4, 5, 8$ ):

$$(***) \quad d_i^+ \cong d(\alpha_i^+), \quad d_i^- \cong d(\alpha_i^-).$$

Adding the three inequalities on the left in  $(*)$  we get

$$\alpha_1^+ + (\alpha_2^- + \alpha_2^+) + (\alpha_3^- + \alpha_3^+) + \alpha_4^- \cong \pi$$

and further

$$\alpha_1^+ + \alpha_4^- \cong \pi - \alpha_2 - \alpha_3 \cong \pi - \frac{2}{3}\pi$$

$$\alpha_1^+ \cong \pi/3 - \alpha_4^-$$

and using property (I) of function  $d$

$$d(\alpha_1^+) \cong d(\pi/3 - \alpha_4^-)$$

and using (II)

$$d(\alpha_1^+) \cong d(\pi/3 - \alpha_4^-) = 2 - d(\alpha_4^-);$$

now using  $(***)$

$$d(\alpha_1^+) \cong 2 - d(\alpha_4^-) \cong 2 - d_4^- = d_4^+$$

$$d_1^+ \cong d(\alpha_1^+) \cong d_4^+.$$

Analogously,  $d_4^- \cong d_1^-$  holds.

For the sum  $d_4^+ + d_1^-$  we get

$$d_4^+ + d_1^- \cong d_1^+ + d_4^- = (2 - d_1^-) + (2 - d_4^+) = 4 - (d_4^+ + d_1^-)$$

from which it follows

$$d_4^+ + d_1^- \cong 2$$

and analogously,

$$d_8^+ + d_5^- \cong 2$$

and after adding

$$d_4^+ + d_1^- + d_8^+ + d_5^- \cong 4.$$

On the other hand adding inequalities in  $(**)$  we get

$$d_4^+ + d_5^- + d_8^- + d_1^- \cong 2|O_1 O_2|$$

from what  $|O_1 O_2| \cong 2$  follows. This contradicts to the assumption that  $D_1$  and  $D_2$  are disjoint not touching unit circles. Therefore the quadruple  $((4, 3)(6, 2))$  is not realizable.

Now we describe the graph of the packing for  $k \geq 3$ . Every edge of a regular  $k$ -gon with the side-lengths  $= 4\sqrt{2}$  replace by the aggregate of edges of length 2 each depicted in Fig. 13 so that every angle occurring there is a right one. The vertices of the graph obtained are centers of unit circles in a desired packing.

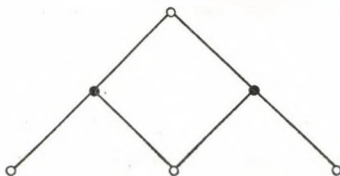


Fig. 13

(e) *Case 4.* From (1) it follows that  $B = 2V$ ,  $V \geq 2$  holds. The non-realizability of the quadruples  $((V, 4)(2V, 2))$  for  $V < 7$  will now be demonstrated.

Consider again the circuit  $c$  of length  $g \leq 2V$  from Lemma. If some vertex  $x \in c$  is incident with an edge not covered by the region  $R$  bounded by  $c$  then it has valency at least 3, so it is a white vertex. To every white vertex different from  $x$  we associate the group of four angles  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  as marked in Fig. 14 for the vertex  $n$  (preserving one of the orientations of  $c$ ). To  $x$  we associate angles  $\alpha', \beta'$  and possibly some angle  $\gamma'$  — if  $x$  is vertex of three edges covered by  $R$ . Since  $|mn| \geq 2$ ,  $\alpha + \beta \cong \pi$  holds. The sum  $\alpha + \beta = \pi$  appears only in the case when the circles with centers  $m, n$  are neighbours, i.e.  $|mn| = 2$  and  $\alpha, \beta$  are angles of a rhomb. Further, clearly  $\gamma, \delta > \pi/3$  holds. For the sum  $\sigma$  of the inner angles of the polygon  $R$  holds

(i)  $\sigma > \frac{g}{2}(\pi + 2\pi/3)$  if  $c$  does not admit a vertex  $x$  with properties described before, or

(j)  $\sigma > \left(\frac{g}{2} - 1\right)(\pi + 2\pi/3) + \pi$  if  $c$  does admit such a vertex  $x$ . On the other hand, the sum  $\sigma$  of inner angles of a  $g$ -gon equals  $(g-2)\pi$ . So in case (i) we get  $(g-2)\pi > \frac{g}{2} \frac{5}{3} \pi$ ,  $g > 12$  and  $V > 6$ . In case (j) we get  $g > 8$ ,  $2 \left\lfloor \frac{V+1}{2} \right\rfloor > 8$  and  $V > 7$ .

The circle packings for  $V \geq 7$  can be described as follows: The sides of a regular  $V$ -gon are replaced by rhombs (Fig. 15) with acute angles  $\omega$  such that  $7\pi/21 < \omega < 8\pi/21$  holds; all edges of the obtained graph have length 2. Its vertices are centers of unit circles in a desired packing.

(f) The non-realizability of a quadruple  $((V, v)(B, 2))$  with  $v > 4$  can be demonstrated analogously as in (e). Suppose there exists a realization of such a quadruple. In the diagram of its graph  $G$ , by Lemma we have a circuit  $c$  of length  $g$  and the polygon  $R$  such that all  $v$  edges incident with  $g/2$  or  $\frac{1}{2}g - 1$  (if  $K \neq G$ )

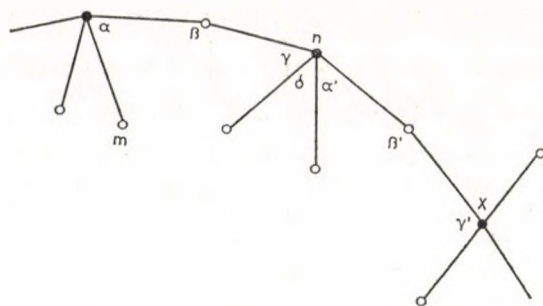


Fig. 14

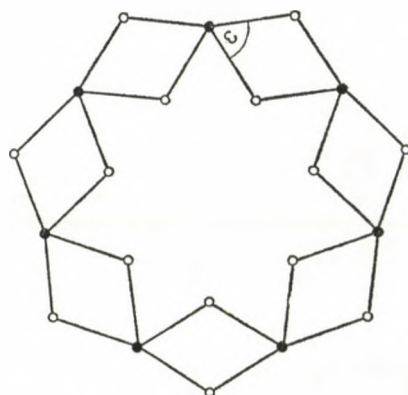


Fig. 15

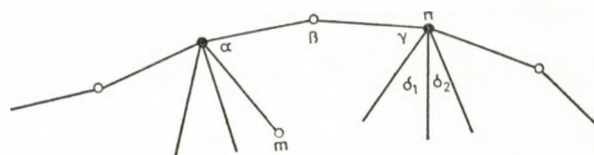


Fig. 16

white vertices either belong to  $c$  or lie in the region  $R$  bounded by  $c$ . We count the sum  $\sigma$  of the inner angles of the polygon  $R$  in two manners. We count the sum in groups as indicated in Fig. 16. To the group at a white vertex  $n$  belong the angle  $\alpha$  at the preceding white vertex, the angle  $\beta$  at a black one and the first  $v-2$  angles  $\gamma, \delta_1, \delta_2, \dots$  at the white vertex  $n$ . As the vertices  $m, n$  are different,  $\alpha + \beta \cong \pi$ . All the angles  $\gamma, \delta_1, \delta_2, \dots$  are greater than  $\pi/3$ . If denoting  $\sigma_i$  the sum of the angles in the  $i$ -th group, we have:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{g/2-1} \sigma_i + \sigma_{g/2}; \quad \sigma_i > \pi + 3 \frac{\pi}{3} = 2\pi; \quad \sigma_{g/2} > 2\pi$$

if  $R$  covers all edges of  $G$ ,  $\sigma_{g/2} \cong \pi$  if some edges of  $G$  are not covered by the region  $R$ . Altogether we get  $\sigma > \left(\frac{g}{2} - 1\right) 2\pi + \pi = (g-1)\pi$  which contradicts the obviously obtained sum  $(g-2)\pi$  of angles of a  $g$ -gon.

(g) Let  $2 < b \leq v$ . From Euler's formula then follows  $b=3$  (by considerations used already in the proof of Theorem 1). Let us investigate the realizability of the quadruple  $((V, v)(B, 3))$ ,  $v, V \geq 3$ . Lemma is employed. We have to investigate separately the cases when the vertex of  $c$  incident with edges not belonging to  $R$  is a black or a white one. However, in both cases the proofs are analogue to those used in (e). We omit describing the details and conclude the proof of Theorem 2.

#### REFERENCES

- [1] FEJES TÓTH, L., Scheibenpackungen konstanter Nachbarnzahl, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **20** (1969), 375—381. *MR* **41** #2536.
- [2] HARARY, F., *Graph theory*, Addison—Wesley Publishing Co., Reading, Mass.—Menlo Park, Calif.—London, 1969. *MR* **41** #1566.
- [3] LINHART, J., Private communication.
- [4] ÖSTERREICHER, F. und LINHART, J., Packungen kongruenter Stäbchen mit konstanter Nachbarnzahl, *Elem. Math.* **37** (1982), 5—16. *MR* **83b**: 52010.
- [5] ROSENFELD, M., Polytopes of constant weight, *Israel J. Math.* **21** (1975), 24—30. *MR* **52** #4132.

(Received June 10, 1984)

KATEDRA GEOMETRIE A ALGEBRY  
 PŘÍRODOVEDECKÁ FAKULTA  
 UNIVERZITY P. J. ŠAFÁRIKA  
 KOMENSKÉHO UL. 14  
 ČS—041 54 KOŠICE  
 CZECHOSLOVAKIA

# DIE MINIMALE ANZAHL DER $j$ -SEITEN ( $d-3 \leq j \leq d-1$ ) VON $d$ -POLYTOPEN OHNE DREIECKIGE 2-SEITEN

R. BLIND

Herrn Prof. L. Fejes Tóth zum 70. Geburtstag gewidmet

Im  $\mathbb{R}^d$  sei  $\mathfrak{P}$  eine Klasse von  $d$ -Polytopen. Zu  $P \in \mathfrak{P}$  sei  $f_j(P)$  ( $0 \leq j \leq d-1$ ) die Anzahl der  $j$ -Seiten von  $P$ . Dann stellt sich die Frage: Wie groß ist für jedes  $j$  das Infimum von  $\{f_j(P) | P \in \mathfrak{P}\}$ , und für welche  $P \in \mathfrak{P}$  wird das Infimum angenommen?

Für die Klasse  $\mathfrak{P}$  der  $d$ -Polytope mit vorgegebener Facettenzahl wird diese Frage seit längerem untersucht (vgl. [6], S. 183), es scheint aber wenig darüber bekannt zu sein (vgl. [5], S. 129). Im Fall, daß die Polytope von  $\mathfrak{P}$  zusätzlich einfach sind, handelt es sich um das *lower bound theorem*, das durch [1], [2] und [3] bewiesen wurde.

Eine interessante Klasse von Polytopen scheint die Klasse  $\mathfrak{P}$  der Polytope ohne dreieckige 2-Seiten zu sein, d. h. der Polytope, bei denen keine Seite eine Pyramide ist. Y. Kupitz vermutete 1982<sup>1</sup>, daß hierfür das Infimum von  $\{f_j(P) | P \in \mathfrak{P}\}$  gleich der Anzahl der  $j$ -Seiten des  $d$ -Kubus ist. Weiter läßt sich vermuten, daß die zum  $d$ -Kubus kombinatorisch äquivalenten Polytope die einzigen aus  $\mathfrak{P}$  sind, die für ein gewisses  $j$  minimale  $j$ -Seitenzahl haben. Beides ist richtig für  $d \leq 4$ , und bei beliebigem  $d$  für einfache Polytope nach [4].

Ohne die Voraussetzung der Einfachheit ist auch dieses Problem erheblich unzugänglicher. Im folgenden werden beide Vermutungen für  $d-3 \leq j \leq d-1$  bewiesen.

**SATZ.**  $P$  sei ein  $d$ -Polytop ohne dreieckige 2-Seiten, und  $f_j$  ( $0 \leq j \leq d-1$ ) sei die Anzahl der  $j$ -Seiten von  $P$ . Für  $j \in \{d-3, d-2, d-1\}$  gilt dann

$$f_j \geq 2^{d-j} \binom{d}{j},$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn  $P$  kombinatorisch äquivalent zum  $d$ -Kubus ist.

**BEWEIS.** Im folgenden heiße eine Ecke eines Polytops *einfach*, wenn die Eckenfigur dort ein Simplex ist, und ein Polytop, das zum Kubus kombinatorisch äquivalent ist, heiße ebenfalls *Kubus*.

Die Behauptung wird zunächst für  $j=d-1$  gezeigt, mit Induktion nach der Dimension  $d$ . Sie ist für  $d=2$  richtig. Es wird also für  $d-1 \geq 2$  angenommen, daß

<sup>1</sup> Mündliche Mitteilung.

1980 Mathematics Subject Classification. Primary 52A25.

Key words and phrases.  $d$ -Polytop, minimale Seitenzahl.



ein  $(d-1)$ -Polytop ohne dreieckige 2-Seiten mindestens  $2(d-1)$  Facetten hat, und wenn es genau  $2(d-1)$  Facetten hat, daß es dann ein  $d$ -Kubus ist.

Für  $d \geq 3$  sei nun  $P$  ein  $d$ -Polytop ohne dreieckige 2-Seiten. Hat  $P$  eine Facette  $F$  mit  $v$   $(d-2)$ -Seiten, so bilden  $F$  und die Facetten, die  $F$  in einer  $(d-2)$ -Seite schneiden, eine Menge aus  $v+1$  Facetten. Ist eine in  $F$  liegende Ecke von  $P$  nicht einfach, so hat  $P$  mindestens eine weitere Facette.

Wenn nun  $P$  eine Facette mit  $>2(d-1)$   $(d-2)$ -Seiten hat, so hat es also  $\geq 2d$  Facetten. Sonst aber ist nach Induktionsannahme jede Facette von  $P$  ein  $(d-1)$ -Kubus. Ist dann  $P$  einfach, so ist es ein  $d$ -Kubus; ist  $P$  nicht einfach, so hat es nach oberem ebenfalls  $\geq 2d$  Facetten.

$P$  habe nun genau  $2d$  Facetten. Hat  $P$  eine einfache Ecke, so ist es nach [4], Satz 1 ein  $d$ -Kubus. Es bleibt der Fall zu diskutieren, daß keine Ecke von  $P$  einfach ist. Dann hat jede Facette von  $P$  genau  $2(d-1)$   $(d-2)$ -Seiten, ist also ein  $(d-1)$ -Kubus;  $F$  sei eine solche Facette.  $p_1$  und  $p_2$  seien ein Paar „einander gegenüberliegender“ Ecken von  $F$ , d. h.  $p_2$  ist fremd zu jeder Seite von  $F$  durch  $p_1$ , und  $p_1$  ist fremd zu jeder Seite von  $F$  durch  $p_2$ . Weil  $p_1$  und  $p_2$  nach Voraussetzung nicht einfach sind, gibt es Facetten  $F_1$  durch  $p_1$  und  $F_2$  durch  $p_2$ , die  $F$  nicht in einer  $(d-2)$ -Seite schneiden. Außerdem ist  $F_1 \neq F_2$  nach Definition von  $p_1$  und  $p_2$ . Damit hätte  $P > 2d$  Facetten im Widerspruch zur Voraussetzung.

Um die Behauptung für  $j=d-2$  zu zeigen, beachte man, daß jede  $(d-2)$ -Seite mit genau 2 Facetten inzidiert, und daß nach dem bereits Bewiesenen  $P$  mindestens  $2d$  Facetten hat und jede Facette mindestens  $2(d-1)$   $(d-2)$ -Seiten. Deshalb ist  $f_{d-2} \geq \frac{1}{2} 2d 2(d-1)$ , und das Gleichheitszeichen gilt höchstens dann, wenn  $P$  genau  $2d$  Facetten hat, also ein  $d$ -Kubus ist.

Um die Behauptung für  $j=d-3$  zu beweisen, benützt man wieder Induktion nach der Dimension  $d$ . Die Behauptung ist für  $d=2$  richtig; man nehme also an, daß sie für  $(d-1)$ -Polytope richtig ist ( $d-1 \geq 2$ ).  $P$  sei ein  $d$ -Polytop ohne dreieckige 2-Seiten.

Wenn speziell jede  $(d-3)$ -Seite von  $P$  mit genau 3 Facetten inzidiert, so folgt aus dem bereits Bewiesenen die Behauptung analog zum Beweis für  $j=d-2$ .

Es sei also  $k$  eine  $(d-3)$ -Seite von  $P$ , die mit  $\geq 4$  Facetten inzidiert, etwa mit  $F_1, \dots, F_4, \dots$ , wobei die Bezeichnung so gewählt sei, daß jede Facette mit der folgenden eine  $(d-2)$ -Seite gemeinsam hat. Man beachte im folgenden, daß gilt: Ist  $\delta_3$  die Anzahl der  $(d-3)$ -Seiten des  $(d-1)$ -Kubus, und  $\delta_4$  die Anzahl der  $(d-4)$ -Seiten des  $(d-1)$ -Kubus, so ist  $2\delta_3 + \delta_4$  die Anzahl der  $(d-3)$ -Seiten des  $d$ -Kubus.

Zunächst wird der Fall betrachtet, daß  $k$  mit  $\geq 5$  Facetten inzidiert, von denen keine ein  $(d-1)$ -Kubus ist. Weil der Satz für  $j=d-2$  bewiesen ist, enthält die Menge  $\mathfrak{M}$  aus  $k$  und den restlichen  $(d-3)$ -Seiten von  $F_1$  und  $F_3$  mehr als  $2\delta_3$  Elemente. Nach Induktionsvoraussetzung hat  $F_3 \geq \delta_4$   $(d-4)$ -Seiten. Jede  $(d-4)$ -Seite von  $F_3$  ist in einer  $(d-3)$ -Seite enthalten, die nicht in  $F_3$  liegt. Ist  $u$  eine solche  $(d-4)$ -Seite von  $F_3$ , daß sie in einer  $(d-3)$ -Seite von  $F_1$  enthalten ist, so ist  $u \subset k$ . Dann gibt es in der  $(d-2)$ -Seite  $F_4 \cap F_5$  eine  $u$  enthaltende  $(d-3)$ -Seite, die verschieden ist von  $k$ , die also nicht in  $F_3$  oder  $F_1$  liegt. Somit enthält  $P$  mindestens  $\delta_4$   $(d-3)$ -Seiten nicht aus  $\mathfrak{M}$ .  $P$  enthält also  $>2\delta_3 + \delta_4$   $(d-3)$ -Seiten.

Nun wird der Fall betrachtet, daß  $k$  mit  $\geq 4$  Facetten inzidiert, von denen mindestens eine ein  $(d-1)$ -Kubus ist. Ist  $F_i$  ein  $(d-1)$ -Kubus durch  $k$ , so sei  $k_i$

die  $(d-3)$ -Seite von  $F_i$ , die fremd ist zu den beiden  $(d-2)$ -Seiten von  $F_i$  durch  $k$ . Sind  $F_1, \dots, F_4$  nicht alle ein  $(d-1)$ -Kubus, so kann o. B. d. A. angenommen werden, daß  $F_2$  ein  $(d-1)$ -Kubus ist, und  $F_3$  nicht; die Menge  $\mathfrak{M}$  aus  $k_2, k$  und den restlichen  $(d-3)$ -Seiten von  $F_1$  und  $F_3$  enthält dann mehr als  $2\delta_3$  Elemente. Ist aber  $F_1, \dots, F_4$  jeweils ein  $d$ -Kubus, so enthält die Menge  $\mathfrak{M}$  aus  $k_2, k_4, k$  und den restlichen  $(d-3)$ -Seiten von  $F_1$  und  $F_3$  ebenfalls mehr als  $2\delta_3$  Elemente.

$k_2$  enthält gleichviele  $(d-4)$ -Seiten wie  $k$ . Man betrachte die  $k_2$  enthaltende  $(d-2)$ -Seite von  $F_2$ , die fremd ist zu  $F_3$ ; sie werde mit  $S$  bezeichnet. Dann ist jede  $(d-4)$ -Seite von  $k_2$  in einer  $(d-3)$ -Seite von  $S$  enthalten, die verschieden ist von  $k_2$ . Jede solche  $(d-3)$ -Seite liegt nicht in  $F_1$  und ist fremd zu  $F_3$ . Somit enthält  $P$  mindestens  $\delta_4$   $(d-3)$ -Seiten nicht aus  $\mathfrak{M}$ .  $P$  enthält also  $>2\delta_3 + \delta_4$   $(d-3)$ -Seiten.

Im folgenden kann also angenommen werden: Jede  $(d-3)$ -Seite von  $P$  liegt in  $\leq 4$  Facetten, und wenn eine  $(d-3)$ -Seite in 4 Facetten liegt, so ist keine davon ein  $(d-1)$ -Kubus. Außerdem gibt es mindestens eine  $(d-3)$ -Seite von  $P$ , die in 4 Facetten liegt. Eine  $(d-3)$ -Seite von  $P$  heiße 3-wertig bzw. 4-wertig, wenn sie in genau 3 bzw. 4 Facetten von  $P$  liegt.

$F$  sei eine Facette mit  $n$  4-wertigen  $(d-3)$ -Seiten, und jede andere Facette von  $P$  habe höchstens  $n$  4-wertige  $(d-3)$ -Seiten. Deshalb ist nach Voraussetzung  $n \geq 1$  und  $F$  kein  $(d-1)$ -Kubus.  $F$  hat also mindestens  $2d-1$   $(d-2)$ -Seiten. Deshalb gibt es mindestens  $2d-1$  Facetten, die  $F$  in einer  $(d-2)$ -Seite schneiden, und mindestens  $n$  weitere Facetten, die  $F$  in einer  $(d-3)$ -Seite schneiden. Also hat  $P$  mindestens  $2d+n$  Facetten.

Zu jeder Facette  $F_i$  von  $P$  sei  $n_3(F_i)$  die Anzahl ihrer 3-wertigen und  $n_4(F_i)$  die Anzahl ihrer 4-wertigen  $(d-3)$ -Seiten. Dann ist die Anzahl der  $(d-3)$ -Seiten von  $P$  gleich

$$\sum_i \left[ \frac{1}{3} n_3(F_i) + \frac{1}{4} n_4(F_i) \right].$$

Sind  $n'_3(F_i)$  und  $n'_4(F_i)$  beliebige Zahlen mit  $n'_3(F_i) \leq n_3(F_i)$  und  $n'_3(F_i) + n'_4(F_i) \leq n_3(F_i) + n_4(F_i)$ , so ist

$$\sum_i \left[ \frac{1}{3} n'_3(F_i) + \frac{1}{4} n'_4(F_i) \right] \leq \sum_i \left[ \frac{1}{3} n_3(F_i) + \frac{1}{4} n_4(F_i) \right].$$

Weil jede Facette von  $P$  mindestens  $2(d-1)(d-2)$   $(d-3)$ -Seiten hat, ist

$$2(d-1)(d-2) \leq n_3(F_i) + n_4(F_i)$$

für alle  $i$ , und weil höchstens  $n$   $(d-3)$ -Seiten von  $F_i$  4-wertig sind, ist

$$\max(2(d-1)(d-2) - n, 0) \leq n_3(F_i)$$

für alle  $i$ . Weil  $P$  mindestens  $2d+n$  Facetten hat, ist also die Anzahl der  $(d-3)$ -Seiten von  $P$  mindestens

$$(2d+n) \left[ \frac{1}{3} [2(d-1)(d-2) - n] + \frac{1}{4} n \right],$$

wobei  $n \leq 2(d-1)(d-2)$  angenommen werden kann. Zu zeigen bleibt, daß

$$(2d+n) \left[ \frac{1}{3} [2(d-1)(d-2)-n] + \frac{1}{4}n \right] > \frac{4}{3} d(d-1)(d-2)$$

für  $n \leq 2(d-1)(d-2)$  und für  $d \geq 3$ . Dies rechnet man nach.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BARNETTE, D., The minimum number of vertices of a simple polytope, *Israel J. Math.* **10** (1971), 121—125. *MR* **45** # 7605.
- [2] BARNETTE, D., A proof of the lower bound conjecture for convex polytopes, *Pacific J. Math.* **46** (1973), 349—354. *MR* **48** # 7115.
- [3] BILLERA, L. J. and LEE, C. W., A proof of the sufficiency of McMullen's conditions for  $f$ -vectors of simplicial convex polytopes, *J. Combin. Theory Ser. A* **31** (1981), 237—255. *MR* **82m**: 52006.
- [4] BLIND, G. und BLIND, R., Über die minimalen Seitenzahlen von Polytopen ohne dreieckige 2-Seiten, *Monatsh. Math.* **98** (1984), 179—184.
- [5] BRØNDSTED, A., *An introduction to convex polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, 90, Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 1983. *MR* **84d**: 52009.
- [6] GRÜNBAUM, B., *Convex polytopes*, Pure and applied mathematics, Vol. 16, Interscience Publishers (John Wiley & Sons, Inc.), New York, 1967. *MR* **37** # 2085.

(Eingegangen am 18. Juni 1984)

WALDBURGSTRASSE 88  
D—7000 STUTTGART 80  
FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY

## MÖBIUSEBENEN IN SPIEGELUNGSGEOMETRISCHER DARSTELLUNG<sup>1</sup>

BERND WERNICKE

Herrn Professor László Fejes Tóth zum 70. Geburtstag gewidmet

Eine *Möbiusebene* (im engeren Sinn, vgl. [2]) ist eine Inzidenzstruktur über einer Punktmenge  $\mathfrak{P}$ , in der ein System  $\mathfrak{K}$  von Teilmengen, Kreise genannt, so ausgezeichnet ist, daß gilt

M1. Durch drei verschiedene Punkte geht genau ein Kreis.

M2. Ist  $k$  ein Kreis, sind  $P, Q$  Punkte mit  $P \in k, Q \notin k$ , so gibt es genau einen Kreis  $l$  durch  $P, Q$  mit  $k \cap l = \{P\}$  (Berührsatz).

M3. Jeder Kreis enthält mindestens einen Punkt; es gibt vier verschiedene Punkte, die nicht gemeinsam auf einem Kreis liegen.

Jede in einem Punkt abgeleitete Inzidenzstruktur ist dann eine affine Ebene. Deshalb sagen wir auch, daß sich zwei Kreise  $k, l$  durch einen Punkt  $P$  *berühren*, wenn  $k \cap l = \{P\}$  oder  $k = l$  gilt. Die Berührrelation ist in der Menge der durch  $P$  gehenden Kreise somit eine Äquivalenzrelation; die Äquivalenzklassen heißen *Berührbüschel*.

In der vorliegenden Arbeit geben wir eine *gruppentheoretische Begründung* für Möbiusebenen, in denen der Satz von Miquel und der Berührbüschelsatz gelten (vgl. die Anmerkungen am Ende der Arbeit). Gegenüber dem Aufbau bei Molnár [8] und dem bei Lang [6] (Möbiusebenen über pythagoreischen Körpern bzw. Körpern einer Char  $\neq 2$ ) ist damit eine umfangreichere Klasse von Möbiusebenen spiegelungsgeometrisch dargestellt.

Neben den methodischen und inhaltlichen Gesichtspunkten aus [1], [8], [6] und [9] bilden die Ergebnisse von Dembowski [3], Mäurer [7] und Karzel/Mäurer [5] die Basis unserer Untersuchungen.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für wertvolle Hinweise danke ich Herrn E. Molnár.

<sup>1</sup> Diese Arbeit entstand während des von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften organisierten Studienaufenthaltes des Verfassers an der Eötvös-Loránd-Universität Budapest im Studienjahr 1983/84.

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 51B10; Secondary 51N15, 51F15.

*Key words and phrases*. Inversive planes, circle reflections in inversive planes, characterization of the automorphism group of inversive planes with circle reflections.

# 1. Möbiusebenen mit Kreisspiegelungen

Wir betrachten die Automorphismengruppe der Möbiusebene  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{A}, \epsilon)$ . Ein nichtidentischer Automorphismus, der einen Kreis  $k$  punktweise festläßt, wird *Kreisspiegelung an  $k$*  genannt.

Nach Resultaten von Dembowski [3], S. 200 gilt in Möbiusebenen allgemein:

- (1) *Ist  $\sigma_k$  eine Kreisspiegelung an  $k$ , so hat  $\sigma_k$  außer den Punkten von  $k$  keine weiteren Fixpunkte. Für jeden Punkt  $P \in k$  existiert dann genau ein Berührbüschel  $\mathfrak{B}^*$  in  $P$  derart, daß  $\mathfrak{B}^* \cup \{k\}$  die Menge der Fixkreise von  $\sigma_k$  durch  $P$  ist. Jede Kreisspiegelung ist involutorisch, und es gibt zu einem Kreis  $k$  höchstens eine Kreisspiegelung an  $k$ .  $\square$*

Im weiteren sei  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{A}, \epsilon)$  stets eine Möbiusebene mit

- (i) *An jedem Kreis  $k$  existiert eine Kreisspiegelung.*

Möbiusebenen mit der Eigenschaft (i) nennen wir *S-Möbiusebenen*. In S-Möbiusebenen gilt nach (1) für beliebige Kreise  $k, l$  die Relation

$$(2) \quad \sigma_k \sigma_l \sigma_k = \sigma_{\sigma_k(l)}.$$

Denn aus  $P \in \sigma_k(l)$  folgt  $\sigma_k(P) \in l$  bzw.  $\sigma_k \sigma_l \sigma_k(P) = \sigma_k \sigma_k(P) = P$ . Da nach (1) stets  $\sigma_k \sigma_l \sigma_k \neq 1$  ist, erhält man nun (2) wiederum nach (1). Für Kreise  $k, l$  schreiben wir  $k \perp l$  und sagen  $k$  ist *orthogonal* zu  $l$  genau dann, wenn  $\sigma_k(l) = l$  und  $k \neq l$  ist.

Aus (2) ergibt sich für Kreise  $k, l$  sofort

$$(3) \quad \sigma_k(l) = l \Leftrightarrow \sigma_k \sigma_l = \sigma_l \sigma_k.$$

Folglich ist die Relation  $\perp$  symmetrisch; sie ist aber keine Orthogonalitätsrelation im Sinne von Benz [2], vgl. [10], [5].

- (4) *Die folgenden Aussagen sind in S-Möbiusebenen äquivalent.*

- (ii) *Ist  $\sigma$  eine Kreisspiegelung und sind  $P, Q$  verschiedene Punkte, so liegen  $P, Q, \sigma(P), \sigma(Q)$  auf einem Kreis.*
- (iii) *Ist  $k$  ein Kreis und  $P$  ein Punkt mit  $P \notin k$ , so gilt für jeden Kreis  $l$  mit  $P, \sigma_k(P) \in l$  stets  $l \perp k$ .*
- (iv) *Zu einem Kreis  $k$  und zu Punkten  $P, Q$  gibt es einen Kreis  $l$  mit  $P, Q \in l$  und  $\sigma_k(l) = l$ .*

BEWEIS. (Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ist in [7] enthalten.) Wir zeigen  $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii)$ .

a) Es gelte (ii), und zu einem Kreis  $k$  und einem Punkt  $P$  mit  $P \notin k$  sei  $l$  ein Kreis mit  $P, \sigma_k(P) \in l$ . Da in Möbiusebenen jeder Kreis mindestens drei Punkte enthält, können wir einen von  $P, \sigma_k(P)$  verschiedenen Punkt  $Q$  auf  $l$  betrachten. Die Punkte  $P, \sigma_k(P), Q, \sigma_k(Q)$  liegen nach (ii) auf einem Kreis, der durch  $P, \sigma_k(P), Q$  eindeutig bestimmt ist. Folglich ist  $\sigma_k(l) = l$  bzw.  $l \perp k$ .

b) Aus (iii) folgt (iv): Gegeben seien ein Kreis  $k$  und Punkte  $P, Q$ .



Fall 1. Gilt  $P \notin k$  (oder  $Q \notin k$ ), so gibt es durch  $P$ ,  $\sigma_k(P)$  und  $Q$  mindestens einen Kreis  $l$  mit  $l \perp k$  nach (iii).

Fall 2. Es sei  $P \in k$  und  $Q \in k$ . Für  $P=Q$  wähle man einen Kreis  $l$  aus dem wohlbestimmten bei  $\sigma_k$  elementweise festen Berührbüschel durch  $P$ ; vgl. (1). Nun sei  $P \neq Q$ . Es gibt einen Punkt  $R$  mit  $R \notin k$ . Nach Fall 1 existiert ein Kreis  $l'$  durch  $P$  und  $R$  mit  $l' \perp k$ . Der Kreis  $l$  sei der Berührkreis von  $Q$  an  $l'$  im Punkt  $P$ . Da  $\sigma_k(l')=l'$  und  $\sigma_k(P)=P$ ,  $\sigma_k(Q)=Q$  gilt, folgt aus der Eindeutigkeit des Berührkreises von  $Q$  an  $l'$  in  $P$  stets  $\sigma_k(l)=l$ .

c) Offensichtlich folgt (ii) aus (iv).  $\square$

In [7] und [5] werden die zu Kreisspiegelungen  $\sigma_k$  an  $k$  und zu Punkten  $P \in k$  gehörenden Berührbüschel  $\mathfrak{B}^*$ , die bei  $\sigma_k$  elementweise festbleiben — vgl. (1) —, betrachtet.

Ist  $\mathfrak{B}$  das Berührbüschel in  $P$ , dem  $k$  angehört, so gilt nach (1), (2)  $\sigma_k \sigma_{l'} = \sigma_{l'} \sigma_k$  für alle  $k' \in \mathfrak{B}$  und für alle  $l' \in \mathfrak{B}^*$ . Es wird für jeden Punkt  $P$  die Abbildung

$$\omega_P: \mathfrak{L}_P \rightarrow \mathfrak{L}_P \quad \text{mit} \quad \omega_P(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}^*$$

untersucht, wobei  $\omega_P \circ \omega_P$  die identische Abbildung ist. Ein Ergebnis aus [7] ist

(5) *Alle Abbildungen  $\omega_P(P \in \mathfrak{B})$  sind entweder frei von Fixelementen oder gleich der identischen Abbildung auf  $\mathfrak{L}_P$ .  $\square$*

Im ersten Fall liegen S-Möbiusebenen einer Charakteristik  $\neq 2$  vor, d. h. jede an einem Punkt abgeleitete affine Ebene ist fanosch, und die zweite Abbildungseigenschaft — in diesem Fall in Verbindung mit (ii) — bedingt für jede abgeleitete Ebene die Charakteristik 2 [7], [5].

### 1.1. S-Möbiusebenen einer Charakteristik $\neq 2$

Wir setzen voraus, daß

(i<sub>1</sub>)  $\omega_P \neq 1$ , der identischen Abbildung (für alle  $P \in \mathfrak{B}$ )

ist, und folglich ist  $\omega_P$  involutorisch.

Nach [7] gilt dann

(6) *Ist  $k$  ein Kreis durch  $P$  und  $l$  ein durch  $P$  orthogonaler Kreis zu  $k$ , dann ist die Restriktion  $\sigma_k \sigma_l / \mathfrak{B} \setminus \{P\}$  von  $\sigma_k \sigma_l$  auf die Punkte  $\mathfrak{B} \setminus \{P\}$  der affinen Ebene in  $P$  eine Punktspiegelung. Die abgeleitete affine Ebene in  $P$  ist eine Translations-ebene einer Charakteristik  $\neq 2$ .  $\square$*

Insbesondere gilt also

(7) *Ist  $P \in k, l$  und  $k \perp l$  für Kreise  $k, l$  und einen Punkt  $P$ , so gibt es einen von  $P$  verschiedenen Punkt  $Q$  mit  $Q \in k, l$ .  $\square$*

(8) *Zu verschiedenen Punkten  $P, Q$  und einem Kreis  $k$  mit  $P, Q \in k$  gibt es einen Kreis  $l$  mit  $P, Q \in l$  und  $l \perp k$ .*

BEWEIS. Es seien  $P, Q$  Punkte und  $k$  ein Kreis mit  $P \neq Q$  und  $P, Q \in k$ . Zu  $P, k$  bezeichne  $\mathfrak{B}^*$  das Berührbüschel in  $P$ , das bei  $\sigma_k$  elementweise festbleibt (1). Wegen

(i<sub>1</sub>) und (5) gilt  $k \notin \mathfrak{B}^*$ , so daß der eindeutig bestimmte Kreis  $l$  aus  $\mathfrak{B}^*$  durch  $Q$  verschieden ist von  $k$ . Es gilt  $\sigma_k(l) = l$  mit  $P, Q \in l$  und  $l \neq k$ , also  $l \perp k$ .  $\square$

Betrachten wir nun die untereinander äquivalenten Aussagen (ii), (iii) und (iv) in S-Möbiusebenen aus (4), so ergibt sich unter der Bedingung (i<sub>1</sub>) ergänzend

(9) *Zu den Aussagen (ii) bis (iv) in (4) sind in S-Möbiusebenen mit Charakteristik  $\neq 2$  äquivalent*

(iv') *Zu einem Kreis  $k$  und zu Punkten  $P, Q$  gibt es einen Kreis  $l$  mit  $P, Q \in l$  und  $l \perp k$ .*

(iv'') *Zu einem Kreis  $k$  und zu Punkten  $P, Q$  mit  $Q \neq P, \sigma_k(P)$  gibt es genau einen Kreis  $l$  mit  $P, Q \in l$  und  $l \perp k$ .*

(v) *Inzidieren zwei orthogonale Kreise  $g, h$  mit Punkten  $P, Q (Q \neq P)$  und gilt  $\sigma_k \sigma_g \sigma_h = \sigma_g \sigma_h \sigma_k$ ,  $k \perp g$  für einen Kreis  $k$ , so ist  $P, Q \in k$ .*

BEWEIS. Die Stellung der durch Verschärfung bzw. Spezialisierung gewonnenen Aussagen in (iv') bzw. (iv'') sind nach (4) in S-Möbiusebenen mit Charakteristik  $\neq 2$  offenkundig.

(a) Aus (iii) folgt (v): Es seien die Voraussetzungen von (v) erfüllt. Dann gilt einerseits  $\sigma_k \sigma_g \sigma_h(P) = \sigma_k(P)$  und damit andererseits  $\sigma_g \sigma_h(\sigma_k(P)) = \sigma_k(P)$ . Folglich ergibt sich nach (6) entweder  $\sigma_k(P) = P$  oder  $\sigma_k(P) = Q$ .

Wäre  $\sigma_k(P) = Q$ , so würde wegen (iii)  $g \perp k$  entgegen der Annahme sein. Aus  $\sigma_k(P) = P$  folgt  $P \in k$ . Analog gewinnt man  $Q \in k$ .

(b) Aus (v) folgt (iii): Es sei  $k$  ein Kreis und  $P$  ein Punkt mit  $P \notin k$  sowie  $l$  ein Kreis mit  $P, \sigma_k(P) \in l$ . Nach (8) gibt es einen Kreis  $m$  durch  $P$  und  $\sigma_k(P)$  mit  $m \perp l$ . Aus  $P, \sigma_k(P) \in l$ ,  $m$  folgt  $\sigma_k(P), P \in \sigma_k(l)$ ,  $\sigma_k(m)$ . Mit (3) gilt  $\sigma_{\sigma_k(l)} \cdot \sigma_{\sigma_k(m)} = \sigma_k \sigma_l \sigma_k \cdot \sigma_k \sigma_m \sigma_k = \sigma_{\sigma_k(m)} \cdot \sigma_{\sigma_k(l)}$ , und wegen (6) ist  $\sigma_{\sigma_k(l)} \cdot \sigma_{\sigma_k(m)} = \sigma_l \sigma_m$ . Wäre  $k \perp l$ , so folgte aus  $\sigma_k \sigma_l \sigma_m = \sigma_l \sigma_m \sigma_k$  nach (v) schließlich  $P, \sigma_k(P) \in k$ , im Widerspruch zu  $P \notin k$ .  $\square$

## 1.2. S-Möbiusebenen der Charakteristik 2

Wir setzen voraus, daß

(i<sub>2</sub>)  $\omega_P = 1$ , der identischen Abbildung (für alle  $P \in \mathfrak{P}$ )

ist. In [5] wird hier noch (ii) vorausgesetzt, um folgendes Ergebnis zu gewinnen.

(10) *Sind  $k, l$  Kreise eines Berührbüschels mit dem Trägerpunkt  $P$ , so induziert  $\sigma_k \sigma_l$  in der von  $P$  abgeleiteten affinen Ebene eine Translation der Ordnung  $\leq 2$ . Diese Ebene ist eine Translationsebene der Charakteristik 2.*  $\square$

<sup>1</sup> Diese Aussage ist implizit im gruppentheoretischen Axiomensystem von Lang [6] enthalten.

## 2. Miquelsche Möbiusebenen in gruppentheoretischer Darstellung

Grundlage für die Kennzeichnung einer wichtigen Klasse von Möbiusebenen über die Charakterisierung der von den Kreisspiegelungen dieser Ebenen erzeugten Automorphismengruppe ist der

**SATZ VON KARZEL UND MÄURER [5].** *Jede Möbiusebene, die den Eigenschaften (i) und (ii) genügt, ist isomorph zu einer miquelschen Möbiusebene, in der der Berührbüschelsatz<sup>2</sup> (vgl. [2]) gilt.*

Bemerkenswert ist auch, daß man sich im Beweis wesentlich auf die Ableitung des Dreispiegelungssatzes für Kreise durch zwei verschiedene Punkte stützt.

Wir kommen zu einem gruppentheoretischen Axiomensystem, das Ideen verwendet von Molnár [8] hinsichtlich der Grundannahme und von Lang [6], der einen gruppentheoretischen Aufbau von miquelschen Möbiusebenen einer Charakteristik  $\neq 2$  mit dem Begriff des Doppelpunktes und mit einem Dreispiegelungssatz für Kreise durch einen Doppelpunkt angibt. Molnár [8] beschreibt in seinem Aufbau aus dem Spiegelungsbegriff Möbiusebenen, die über einem pythagoreischen Körper algebraisierbar sind.

**GRUNDANNAHME.** *Gegeben sei eine Gruppe  $G$ , die von einer gegenüber inneren Automorphismen von  $G$  invarianten Menge  $\mathcal{S} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$  involutorischer Elemente erzeugt wird.*

**A0.**  $\mathcal{S}$  besitzt eine Überdeckung  $\mathcal{P} = \{A, B, C, \dots\}$  mit den Eigenschaften

$$\alpha \in A \Leftrightarrow \alpha^{-1}A\alpha = A.$$

und

$$A^{\alpha} := \alpha^{-1}A\alpha \in \mathcal{P}$$

für alle  $\alpha \in \mathcal{S}$  und  $A \in \mathcal{P}$ .

Die Mengen  $A$  der gegebenen Überdeckung von  $\mathcal{S}$  sind also gegenüber ihren Erzeugenden invariante Teilmengen in  $\mathcal{S}$  (bzw. in  $G$ ), und  $\mathcal{P}$  ist invariant gegen innere Automorphismen von  $G$ .

Die Relation  $I$  sei bestimmt durch:  $A I \alpha \Leftrightarrow \alpha \in A$ . Für  $a, b \in G$  kürzen wir  $b^{-1}ab$  durch  $a^b$  ab. In der Menge der involutorischen Elemente aus  $G$  wird die bekannte Strichrelation betrachtet:  $a|b \Leftrightarrow a, b, ab$  involutorisch.

Der erzeugten Gruppe  $(G, \mathcal{S})$  wird eine geometrische Struktur  $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ , bestehend aus der Menge  $\mathcal{P}$  der Punkte und der Menge  $\mathcal{S}$  der Erzeugenden, Kreise genannt, zugeordnet.  $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$  heißt die Gruppenebene von  $(G, \mathcal{S})$ .

Die erzeugte Gruppe  $(G, \mathcal{S})$  genüge neben der Grundannahme den folgenden AXIOMEN:

**A1.** *Es gibt vier<sup>3</sup> Punkte  $A, B, C, D$  derart, daß  $A, B, C, D$  I  $\alpha$  für keine Erzeugende  $\alpha$  gilt.*

<sup>2</sup> Berührt ein Kreis drei verschiedene Kreise eines Berührbüschels, dann gehört er selbst zum Büschel.

<sup>3</sup> Die Kardinalzahl schließt im weiteren die Formulierung „paarweise verschieden“ mit ein.

- A2. Zu drei Punkten  $A, B, C$  gibt es genau eine Erzeugende  $\alpha$  mit  $A, B, C \text{ I } \alpha$ .  
 A3. Zu drei Erzeugenden  $\alpha, \beta, \gamma$  und zwei Punkten  $A, B$  mit  $A, B \text{ I } \alpha, \beta$  und  $A \text{ I } \gamma$  gibt es einen Punkt  $C$  mit  $C \text{ I } \gamma$ ,  $C \neq A$ , so daß  $C \text{ I } \alpha$  oder  $C \text{ I } \beta$ .  
 A4. Zu einer Erzeugenden  $\alpha$  und zu Punkten  $A, B$  gibt es eine Erzeugende  $\beta$  mit  $A, B \text{ I } \beta$  und  $\alpha\beta = \beta\alpha$ .  
 A5. Sind  $A, B$  zwei Punkte und  $\alpha, \beta, \gamma$  Erzeugende mit  $A, B \text{ I } \alpha, \beta, \gamma$  und  $\alpha|\beta, \gamma$ , dann folgt  $\beta = \gamma$ .

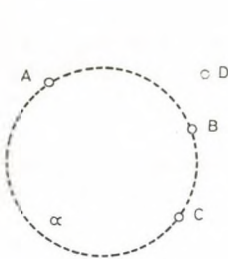


Abb. 1

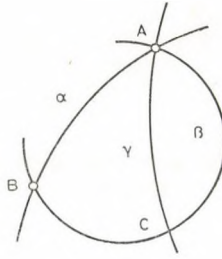


Abb. 2

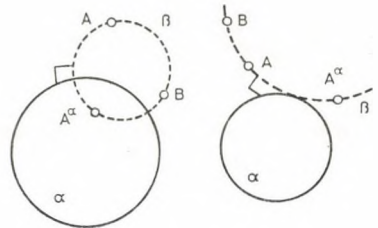


Abb. 3

Für die der erzeugten Gruppe  $(G, \mathcal{S})$ , die der Grundannahme und den Axiomen A1 bis A5 genügt, zugeordnete Gruppenebene  $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$  ergeben sich einfache, doch wesentliche Konsequenzen. Wir benutzen die Sprache der Gruppenebene und führen die Relation  $I$  zwischen Punkten und Kreisen (Erzeugenden) als Inzidenzrelation in  $\mathcal{P} \times \mathcal{S}$  ein. Wir sagen weiter, daß sich zwei Kreise  $\alpha, \beta$  aus  $\mathcal{S}$  berühren, wenn es genau einen Punkt  $A$  mit  $A \text{ I } \alpha, \beta$  gibt.

Aus der Grundannahme, A1 und A2 folgt unmittelbar

- (1) Jeder Kreis  $\alpha$  inzidiert mit mindestens einem Punkt.  $\square$   
 (2) Sind  $A, B$  Punkte und ist  $\alpha$  ein Kreis mit  $A \text{ I } \alpha$  und  $B \text{ I } \alpha^4$ , so gibt es genau einen Kreis  $\beta$  mit  $A, B \text{ I } \beta$  und  $\alpha, \beta$  berühren sich.

BEWEIS. Es seien  $A, B, \alpha$  mit  $A \text{ I } \alpha$  und  $B \text{ I } \alpha$  gegeben.

EXISTENZ. Aus  $B \text{ I } \alpha$  folgt  $B^2 \neq B$ , und es gilt  $B^2 \neq A \neq B$  wegen  $A \text{ I } \alpha$  und  $B \text{ I } \alpha$ . Folglich gibt es nach A2 einen Kreis  $\gamma$  mit  $A, B, B^2 \text{ I } \gamma$ . Aus der Eindeutigkeitsaussage in A2 folgt  $\gamma^2 = \gamma$  und mit  $\gamma \neq \alpha$  sofort  $\alpha|\gamma$ .

Fall 1. Gibt es außer  $A, B, B^2$  keinen weiteren Punkt  $P$  mit  $P \text{ I } \gamma$ , so ist mit  $\beta := \gamma$  die Existenzaussage von (2) bestätigt.

Fall 2. Wir können voraussetzen, daß es einen Punkt  $C \neq A, B, B^2$  mit  $C \text{ I } \gamma$  gibt.

Zunächst zeigen wir, daß es dann einen Punkt  $E$  mit  $E \text{ I } \alpha, \gamma$  gibt: Aus A1 folgt die Existenz eines Punktes  $D$  mit  $D \text{ I } \gamma$ . Ist  $D \text{ I } \alpha$ , so sei  $E := D$ . Im weiteren sei  $D \text{ I } \alpha$ . Wir betrachten nach A2 den Kreis  $\delta$  mit  $A, B, D \text{ I } \delta$ . Es gilt  $B^2 \delta \text{ I } \gamma$  und  $C \delta \text{ I } \gamma$ .

Wäre  $B^2 \delta \text{ I } \gamma$ , so folgte aus  $B^2 \text{ I } \delta$  stets  $\gamma^2 = \gamma$  bzw.  $\gamma|\delta$ . Da  $\gamma^2 = \gamma$  gilt, hätten wir sowohl  $\alpha^2 = \alpha$  als auch  $\delta^2 = \delta$ . Aus  $D \text{ I } \alpha, \delta$  folgte damit  $D^2 \text{ I } \alpha, \delta$ . Neben  $A, D$

<sup>4</sup>  $\text{I}$  bedeutet die Negation von  $I$ .



wäre  $D'$  ein dritter Punkt von  $\alpha$  und  $\delta$ , was  $\alpha = \delta$  zu Folge hätte. Analog schließt man  $C^\delta I \gamma$  aus.

Es kann weiter nicht gleichzeitig  $B^{\alpha\delta} I \alpha$  und  $C^\delta I \alpha$  zutreffen: Aus  $B^{\alpha\delta}$ ,  $C^\delta I \alpha$  folgte die Gleichheit der nach A2 eindeutig bestimmten Kreise durch  $A, B^\alpha, D$  bzw.  $A, C, D$ , was nicht sein kann.

Also gilt  $B^{\alpha\delta} \nmid \alpha$  oder  $C^\delta \nmid \alpha$ , womit ein Punkt gefunden wäre, der weder mit  $\alpha$  noch mit  $\gamma$  inzidiert.

Wir haben jetzt neben  $\alpha, A, B$  einen Kreis  $\gamma$  mit  $A, B I \gamma$  und  $\gamma | \alpha$  und einen Punkt  $E$  mit  $E \nmid \alpha, \gamma$ . Nach A2 bestimmen  $A, E, E^\alpha$  einen Kreis  $\varepsilon$ , und es gilt  $\varepsilon | \alpha$  und  $B \nmid \varepsilon$ . Der Kreis  $\beta$  durch  $A, B, B^\alpha$  berührt  $\alpha$  im Punkt  $A$ . Gäbe es nämlich einen Punkt  $F$  mit  $F \neq A$  und  $F I \alpha, \beta$ , so folgte im Fall  $F \nmid \varepsilon$ , daß  $\alpha$  wie auch  $\beta$  wegen  $\alpha, \beta | \varepsilon$  der Verbindungskreis von  $F, A, F^\varepsilon$  wäre (A2).  $\alpha = \beta$  steht aber im Widerspruch zu  $B \nmid \alpha$  und  $B I \beta$ . Im Fall  $F I \varepsilon$  wäre  $A, F I \varepsilon, \alpha, \beta$  und  $\varepsilon | \alpha, \beta$  und mit A5 ergäbe sich auch hier  $\alpha = \beta$ .

EINDEUTIGKEIT. Es sei zu  $A, B, \alpha$  mit  $A I \alpha$  und  $B \nmid \alpha$  ein Kreis  $\beta$  gegeben, der  $\alpha$  berührt und für den  $A, B I \beta$  gilt. Für einen beliebigen Kreis  $\beta'$  mit  $A, B I \beta'$  und  $\beta' \neq \beta$  gilt nun zusammen mit den übrigen Punkten und Kreisen  $A, B I \beta, \beta'$  und  $A I \alpha$ , wobei  $\alpha, \beta, \beta'$  paarweise verschieden sind und  $A \neq B$  ist. Da sich weiterhin  $\alpha$  und  $\beta$  berühren, gibt es nach A3 einen Punkt  $C$  mit  $C I \alpha, \beta'$  und  $C \neq A$ . Folglich ist  $\beta$  der einzige Kreis durch  $B$ , der  $\alpha$  in  $A$  berührt.  $\square$

Es gilt nach A1, A2, (1) und (2) bereits

(3) Die Gruppenebene  $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$  ist eine Möbiusebene.  $\square$

(4) BEMERKUNG. Man bestätigt in einer Möbiusebene leicht:

*Jeder Kreis inzidiert mit mindestens drei Punkten.*  $\square$

Mit den Resultaten von Dembowski, vgl. (1) in Abschnitt 1, gilt

(5) Die von einer Erzeugenden  $\alpha$  der Gruppe  $G$  induzierte Abbildung

$$\bar{\alpha}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \quad \text{mit} \quad \bar{\alpha}(A) = A^\alpha$$

ist die Kreisspiegelung am Kreis  $\alpha$  der Gruppenebene. D. h., an jedem Kreis der Gruppenebene existiert eine Kreisspiegelung.  $\square$

Für den Beweis des folgenden Satzes wird erstmals das Axiom A4 verwendet.

(6) Ist  $\alpha$  ein Kreis und  $A$  ein Punkt mit  $A \nmid \alpha$ , so gilt für jeden Kreis  $\beta$  mit  $A, A^\alpha I \beta$  stets  $\beta | \alpha$ .

BEWEIS. Es seien  $\alpha, A$  mit  $A \nmid \alpha$  gegeben. Dann ist  $A \neq A^\alpha$ . Weiterhin sei  $\beta$  ein Kreis mit  $A, A^\alpha I \beta$ . Nach (4) existiert ein Punkt  $B$  mit  $B I \beta$  und  $B \neq A, A^\alpha$ . Zu  $A, B$  und  $\alpha$  gibt es nach A4 einen Kreis  $\beta'$  mit  $A, B I \beta'$  und  $\alpha \beta' = \beta' \alpha$ . Da  $\alpha \neq \beta'$  ist, gilt  $\alpha | \beta'$ . Wegen  $A I \beta'$  ist  $(A^\alpha)^{\beta'} = A^{\alpha\beta'} = A^{\beta'\alpha} = A^\alpha$ , folglich gilt  $A^\alpha I \beta'$ . Nach A2 ist damit aber  $\beta' = \beta$  und schließlich  $\alpha | \beta$ .  $\square$

Einerseits wissen wir jetzt nach (3), (5), (6) und dem Satz von Karzel und Mäurer, daß die Gruppenebene  $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$  eine miquelsche Möbiusebene ist, in der der Berührbüschelsatz gilt. Andererseits ergeben die Darlegungen in Abschnitt 1,



daß mit der Grundannahme und den Axiomen A1 bis A5 Annahmen für den gruppentheoretischen Aufbau gemacht wurden, die für die von den Kreisspiegelungen einer miquelschen Möbiusebene (mit Berührbüschelsatz) erzeugte Automorphismengruppe zutreffen.

**SATZ 1.** (a) *Ist  $M$  eine miquelsche Möbiusebene mit Berührbüschelsatz, so genügt die von den Spiegelungen an Kreisen erzeugte Gruppe  $\mathcal{G}(M)$  der Grundannahme und den Axiomen A1 bis A5.*

(b) *Ist  $G$  eine Gruppe, für die Grundannahme zutrifft und die Axiome A1 bis A5 gelten, so ist die Gruppenebene  $\mathcal{M}(G)$  eine miquelsche Möbiusebene mit Berührbüschelsatz.*  $\square$

Ergänzend zu Satz 1 gilt

**SATZ 1'.** *Mit den Bezeichnungen aus Satz 1 bestehen zwischen folgenden Strukturen Isomorphismen:*

- (a)  $\mathcal{M}(\mathcal{G}(M))$  ist isomorph zu  $M$ ,
- (b)  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  ist isomorph zu  $G$ .

Für (a) sind die Zuordnungen

$$P \mapsto \{\sigma_k : \sigma_k(P) = P\} \quad \text{und} \quad k \mapsto \sigma_k$$

für alle Punkte  $P$  und Kreise  $k$  aus der Möbiusebene  $M$  offenbar bijektiv und inzidenztreu.

Zur Bestätigung von (b) betrachten wir zu  $a \in G$  die nach (5) bijektive Abbildung

$$\bar{a} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \quad \text{mit} \quad A \mapsto A^a.$$

Die durch die Zuordnung

$$a \mapsto \bar{a}$$

gestiftete Abbildung von  $G$  auf  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  ist zunächst ein Homomorphismus. Da aber  $A^a = A$  für alle Punkte  $A$  aus  $\mathcal{M}(G)$  bedingt, daß  $a$  das Einselement der Gruppe  $G$  ist (vgl. (1) in Abschnitt 1 und (5)), liegt mit  $a \mapsto \bar{a}$  sogar ein Isomorphismus vor.  $\square$

Als eine Teilaussage der Sätze 1/1' heben wir hervor

**SATZ 2.** *Eine Gruppe  $G$  ist genau dann die von den Kreisspiegelungen einer miquelschen Möbiusebene mit Berührbüschelsatz erzeugte Automorphismengruppe, wenn sie der Grundannahme und den Axiomen A1 bis A5 genügt.*  $\square$

**ANMERKUNG 1.** Die hier behandelten miquelschen Möbiusebenen, in denen der Berührbüschelsatz gilt, sind genau die Möbiusebenen, die als Kettengeometrie über einer quadratischen, separablen Erweiterung eines Körpers  $K$  darstellbar sind: Ist  $K$  ein quadratisch nicht abgeschlossener kommutativer Körper und  $L$  eine quadratische Körpererweiterung von  $K$ , so bildet die Punktmenge der projektiven Geraden  $L \cup \{\infty\}$  und die Menge der Bilder der projektiven Geraden  $K \cup \{\infty\}$  unter der Gruppe  $\text{PGL}_2(L)$  der gebrochenen linearen Abbildungen über  $L$  als Kreismenge eine

miquelsche Möbiusebene. Und jede miquelsche Möbiusebene ist bis auf Isomorphie über einem solchen Körper  $K$  darstellbar. Die Separabilität der Körpererweiterung — d. h., es gibt genau zwei Automorphismen von  $L$ , die  $K$  elementweise festlassen — ist äquivalent mit der Gültigkeit des Berührbüschelsatzes in der Ebene [2].

ANMERKUNG 2. In der Dissertation [10] werden eingehend genau diese miquelschen Möbiusebenen mit Berührbüschelsatz als  $(K, L)$ -Ebenen mit einer geschickten „Normdarstellung“ der Kreise studiert.

ANMERKUNG 3. Das vorgestellte gruppentheoretische Axiomensystem gestattet nun weiter in natürlicher Weise eine Gabelung an

*F.* Es gibt zwei Punkte  $A, B$  und Erzeugende  $\alpha, \beta$  mit  $A, B \mid \alpha, \beta$  und  $\alpha \mid \beta$ .

bzw.

$\sim F$ . Aus  $A, B \mid \alpha, \beta$  und  $\alpha \mid \beta$  folgt  $A=B$ .

Mit der Grundannahme für eine Gruppe  $G$  und dem Axiomensystem  $\{A1, \dots, A5, F\}$  werden die *miquelschen Möbiusebenen einer Charakteristik  $\neq 2$*  spiegelungsgeometrisch dargestellt (Char  $\neq 2$  bedingt den Berührbüschelsatz [2], Seite 238). Ersetzen wir  $F$  durch  $\sim F$ , so wird gerade der Fall der *Charakteristik 2* behandelt. Im Axiomensystem  $\{A1, \dots, A5, \sim F\}$  ist offensichtlich  $A5$  entbehrlich.

Für die Darstellung der miquelschen Möbiusebenen einer Charakteristik  $\neq 2$  kann  $F$  verschärft werden zu

$A5'$ . Zu jeder Erzeugenden  $\alpha$  und zu Punkten  $A, B$  mit  $A, B \mid \alpha$  gibt es eine Erzeugende mit  $A, B \mid \beta$  und  $\beta \mid \alpha$ .

Mit der Grundannahme und den Axiomen  $A1, \dots, A4, A5'$  erhalten wir — so sei nur mitgeteilt — eine spiegelungsgeometrische Kennzeichnung der miquelschen Möbiusebenen einer Charakteristik  $\neq 2$ .

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BACHMANN, F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, 2. Aufl., Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 96, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1973. *MR* 49 # 11368.
- [2] BENZ, W., *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Geometrien von Möbius, Laguerre—Lie, Minkowski in einheitlicher und grundlagengeometrischer Behandlung, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 197, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1973. *MR* 50 # 5623.
- [3] DEMBOWSKI, P., Möbiusebenen gerader Ordnung, *Math. Ann.* 157 (1964), 179—205. *MR* 31 # 1607.
- [4] EWALD, G., Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie, *Math. Ann.* 131 (1956), 354—371. *MR* 18—502.
- [5] KARZEL, H. und MÄURER, H., Eine Kennzeichnung miquelscher Möbiusebenen durch eine Eigenschaft der Kreisspiegelungen, *Resultate Math.* 5 (1982), 52—56. *MR* 83h: 51016.
- [6] LANG, K., Kennzeichnung von Möbius-Ebenen durch Spiegelungsrelationen, *J. Geom.* 16 (1981), 5—18. *MR* 82j: 51009.
- [7] MÄURER, H., Kreisspiegelungen in Möbiusebenen, *Geometriae Dedicata* 2 (1973), 261—268. *MR* 53 # 6418.

- [8] MOLNÁR, E., Begründung der Möbiusschen Kreisebene aus dem Spiegelungsbegriff, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **18** (1975), 143—170. *MR* **55** # 6303.
- [9] QUAISER, E., Zum Aufbau affiner Ebenen aus dem Spiegelungsbegriff, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* **27** (1981), 131—140. *MR* **82k**: 51021.
- [10] ZEITLER, H., Über  $(K, L)$ -Ebenen, Dissertation, Kassel, 1977.

(Eingegangen am 25. Juni 1984)

SEKTION MATHEMATIK/PHYSIK  
PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE ERFURT  
NORDHÄUSER STR. 63  
DDR—5064 ERFURT  
GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

## RANDOM STEINER SYMMETRIZATIONS

PETER MANI-LEVITSKA

*Dedicated to Professor L. Fejes Tóth in honour of his seventieth birthday*

### Abstract

If, starting with a convex body  $K \subset \mathbb{R}^d$ , we iterate at random the Steiner symmetrization, then we obtain almost always some Euclidean ball as limit figure.

### 1. Introduction

We work in the Euclidean space  $\mathbb{R}^d$ , whose dimension  $d$  shall remain fixed throughout this note. Our basic terminology and notation follow B. Grünbaum's book [4], with some small modifications, described below. The unit ball and the unit sphere shall be denoted by  $B^d = \{x \in \mathbb{R}^d: \|x\| \leq 1\}$  and  $S^{d-1} = \text{bd}(B^d)$ . By a convex body in  $\mathbb{R}^d$  we understand a convex and compact subset of  $\mathbb{R}^d$ , with non-empty interior. Let  $\mathfrak{K}$  be the set of all convex bodies in  $\mathbb{R}^d$ , provided with the Hausdorff metric  $\delta$ . The collection  $\Gamma$  of all  $(d-1)$ -dimensional linear subspaces of  $\mathbb{R}^d$  carries a metric  $\delta$ , given by  $\delta(E, F) = \delta(E \cap B^d, F \cap B^d)$ . The integralgeometric measure  $\lambda$  on  $\Gamma$  can be described as  $\lambda = \alpha \mathcal{H}^{d-1}$ , where  $\mathcal{H}^{d-1}$  is the  $(d-1)$ -dimensional Hausdorff outer measure on the metric space  $(\Gamma, \delta)$ , and  $\alpha$  is a positive real number, chosen in such a way that  $\lambda[\Gamma] = 1$  [1]. The set  $\Omega$  of all  $\lambda$ -measurable subsets of  $\Gamma$  contains all Borel subsets. Let  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be the sequence of probability spaces, given by  $\xi_n = (\Gamma, \Omega, \lambda|_{\Omega})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . We define the product spaces  $\eta_i = (\Delta_i, \Sigma_i, \mu_i)$ ,

$i \in \mathbb{N}$  and  $\eta = (\Delta, \Omega, \mu)$  by  $\eta_i = \prod_{n=1}^i \xi_n$  and  $\eta = \prod_{n \in \mathbb{N}} \xi_n$ . Thus, an element of  $\Delta$  is a sequence  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of  $(d-1)$ -dimensional subspaces  $x_n$  of  $\mathbb{R}^d$ . The projections  $p_i: \Delta \rightarrow \Delta_i$  are given by  $p_i[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = (x_1, \dots, x_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . To every convex body  $K \subset \mathbb{R}^d$  and every hyperplane  $E$  in  $\Gamma$  we associate the convex body  $\sigma(K, E)$  which arises from  $K$  by Steiner symmetrization at  $E$ . Similarly, we define, for  $K \in \mathfrak{K}$  and  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\Delta$ , a sequence  $\sigma(K, x) = (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  by setting  $C_1 = K$ ,  $C_{n+1} = \sigma(C_n, x_n)$ ,  $n \geq 1$ . Let us say that the convex bodies  $C_n$  arise from  $K$  by multisymmetrization. W. Gross has established, early in this century, the following interesting property of convex bodies, which is useful in connection with various isoperimetric problems [2, 3, 5, 6]. Set, for a convex body  $K \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\varrho(K) = (\text{Vol}(K)/\text{Vol}(B^d))^{(1/d)}$ , where  $\text{Vol}(X)$  denotes the volume, the  $d$ -dimensional outer Lebesgue measure, of  $X \subset \mathbb{R}^d$ .

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A20; Secondary 60D05.

*Key words and phrases*. Convex body, random hyperplane, Steiner symmetrization, average efficiency.

THEOREM 1 (GROSS). *Starting from an arbitrary convex body  $K \subset \mathbf{R}^d$ , we can find a sequence of convex bodies which arise from  $K$  by multisymmetrization, converging to the Euclidean ball  $\varrho(K)B^d$ .*

We would like to present here the following probabilistic version of Gross's Theorem.

THEOREM 2. *If we set, for any convex body  $K$  in  $\mathbf{R}^d$ ,*

$$\Delta_0(K) = \{\mathbf{x} \in \Delta: \text{the sequence } \sigma(K, \mathbf{x}) \text{ converges to } \varrho(K)B^d\},$$

*then  $\mu[\Delta_0(K)] = 1$ .*

## 2. Preliminaries

Let us first show that the sequence  $\sigma(K, \mathbf{x})$  eventually covers the origin of  $\mathbf{R}^d$ , for every convex body  $K$  and almost all  $\mathbf{x} \in \Delta$ .

LEMMA 1. *Set, for  $K \in \mathfrak{K}$ ,*

$$\Delta_1(K) = \{\mathbf{x} \in \Delta: \text{if we write } \sigma(K, \mathbf{x}) =$$

$$= (C_n)_{n \in \mathbf{N}}, \text{ then we have } o \in \text{int}(C_n) \text{ for all but finitely many } n \in \mathbf{N}\}.$$

*Then  $\mu[\Delta_1(K)] = 1$ .*

PROOF. Clearly  $\Delta_1(K)$  is  $\mu$ -measurable. We want to show that the assumption

$$(1) \quad \mu[\Delta \setminus \Delta_1(K)] > 0$$

leads to a contradiction. Let us choose an interior point  $q$  of  $K$  and a real number  $\varrho > 0$  such that the ball  $B = \varrho B^d + q$  is contained in  $K$ . Given  $\mathbf{x} \in \Delta$ , we write  $\sigma(B, \mathbf{x}) = (B_n(\mathbf{x}))_{n \in \mathbf{N}}$ . Each  $B_n(\mathbf{x})$  is a Euclidean ball with radius  $\varrho$ , whose center we denote by  $q_n(\mathbf{x})$ . Let us define the angle  $\alpha[H_1, H_2] \in [0, \pi/2]$  between the hyperplanes  $H_1, H_2$  in  $\Gamma$  by choosing unit vectors  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  such that  $\mathbf{u}_i$  is orthogonal to  $H_i$ , and requiring  $\cos(\alpha[H_1, H_2]) = |\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle|$ . For  $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  as above, we set  $\alpha_n(\mathbf{x}) = \alpha(x_n, x_{n+1})$ , and derive from the definition of the Steiner symmetrization

$$(2) \quad \|q_{n+2}(\mathbf{x})\| = (\cos \alpha_n(\mathbf{x})) \|q_{n+1}(\mathbf{x})\|, \quad n \in \mathbf{N},$$

as well as  $\|q_2\| \leq \|q_1\| = \|q\|$ . If  $\mathbf{x}$  belongs to  $\Delta \setminus \Delta_1(K)$  we have  $\|q_{n+2}\| \leq \varrho$ , and hence by (2),  $\|q\| \left( \prod_{i=1}^n \cos \alpha_i(\mathbf{x}) \right) \leq \varrho$ , for every integer  $n \in \mathbf{N}$ , which implies

$$(3) \quad \alpha_n(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{for every } \mathbf{x} \text{ in } \Delta \setminus \Delta_1(K).$$

Define, for an arbitrary positive number  $\delta$ , an ascending sequence of measurable sets  $E(\delta, n)$  in  $\Delta \setminus \Delta_1(K)$ , by requiring

$$E(\delta, n) = \{\mathbf{x} \in \Delta \setminus \Delta_1(K): \alpha_i(\mathbf{x}) < \delta, \text{ whenever } i \geq n\}.$$

In view of (3) we have  $\Delta \setminus \Delta_1(K) = \bigcup \{E(\delta, n): n \in \mathbf{N}\}$ , which, in conjunction with (1), implies that

$$(4) \quad \text{for every } \delta > 0 \text{ there is an integer } n \text{ such that } \mu[E(\delta, n)] > 0.$$



This, however, is in contradiction with elementary properties of our measure spaces: we choose  $\varepsilon_0 \in (0, 1)$  and then determine a positive number  $\delta_0$  such that, for every hyperplane  $E \in \Gamma$ ,

$$(5) \quad \mu\{F \in \Gamma: \alpha(E, F) \leq \delta_0\} \leq \varepsilon_0.$$

Next we choose, according to (4), an index  $n_0 \in \mathbb{N}$  such that

$$(6) \quad \mu[E(\delta_0, n_0)] > 0.$$

For  $n \geq n_0$  we set  $B_n = p_n[E(\delta_0, n_0)]$ , where  $p_n: \Delta \rightarrow \Delta_n$  is the map, mentioned in the introduction, which associates to every sequence  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  the  $n$ -tuple  $(x_1, \dots, x_n)$ . Set, for  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  in  $B_n$ ,  $F(\mathbf{x}) = \{y \in \Gamma: (\mathbf{x}, y) \in B_{n+1}\}$ . Since  $n \geq n_0$  we have, by the definition of  $E(\delta_0, n_0)$ ,  $\alpha(x_n, y) \leq \delta_0$ , and hence, using (5),

$$(7) \quad [F(\mathbf{x})] \leq \varepsilon_0, \text{ for every } \mathbf{x} \in B_n.$$

Applying Fubini's theorem to  $B_{n+1}$ , we derive from (7) the inequality

$$\mu_{n+1}[B_{n+1}] = \int_{B_n} \lambda[F(\mathbf{x})] d\mu_n(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_0 \mu_n[B_n].$$

Therefore  $\mu_{n+k}[B_{n+k}] \leq (\varepsilon_0)^k \mu_n[B_n]$ , for all  $n \geq n_0$  and all  $k \in \mathbb{N}$ . With  $k \rightarrow \infty$  we obtain, by a basic property of product measures [7],  $\mu[E(\delta_0, n_0)] \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_0+k}[B_{n_0+k}] = 0$ .

With this contradiction to (6) we have arrived at a proof of Lemma 1.

**DEFINITION 1.** For a convex body  $C$  in  $\mathbb{R}^d$  with  $o \in \text{int}(C)$ , define the lower and the upper radii of  $C$  by  $\varrho_1(C) = \inf \{\|p\|: p \in \text{bd}(C)\}$ ,  $\varrho_u(C) = \sup \{\|p\|: p \in \text{bd}(C)\}$ .

$\varrho_1(C)$  is the radius of the largest ball centered at the origin and contained in  $C$ , whereas  $\varrho_u(C)$  is the radius of the smallest ball centered at  $o$  and containing  $C$ . The difference  $\varrho_u(C) - \varrho_1(C)$  is, in a certain sense, a measure for the asphericity of  $C$ . Notice that  $\varrho_u$  does not increase, and  $\varrho_1$  does not decrease, if we subject the convex body  $C$  with  $o \in \text{int}(C)$  to a Steiner symmetrization at a plane  $E \in \Gamma$ . This leads to our next lemma, whose straightforward proof we shall omit.

**LEMMA 2.** With the notation of Lemma 1 we set, for  $\mathbf{x} \in \Delta_1(K)$ ,  $\sigma(K, \mathbf{x}) = (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . The radii  $\varrho_1(C_n)$  and  $\varrho_u(C_n)$  are defined for almost all  $n$ , and there exists a unique pair of real numbers  $\alpha_K(\mathbf{x})$ ,  $\beta_K(\mathbf{x})$  with  $0 < \alpha_K(\mathbf{x}) \leq \beta_K(\mathbf{x})$ , such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_1(C_n) = \alpha_K(\mathbf{x})$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_u(C_n) = \beta_K(\mathbf{x})$ . The equality  $\alpha_K(\mathbf{x}) = \beta_K(\mathbf{x})$  is necessary and sufficient for  $\mathbf{x} \in \Delta_0(K)$ .

Notice that  $\Delta_0(K) \subset \Delta_1(K)$ , for every convex body  $K \subset \mathbb{R}^d$ . In view of Lemma 1 it remains to show that  $\mu[\Delta_1(K) \setminus \Delta_0(K)] = 0$ . Our next result states that the assumption  $\mu[\Delta_1(K) \setminus \Delta_0(K)] > 0$  implies the existence of many sequences  $\sigma(K, \mathbf{x})$  whose limit bodies have large asphericity.

**LEMMA 3.** Let  $K$  be a convex body in  $\mathbb{R}^d$  with  $\mu[\Delta_1(K) \setminus \Delta_0(K)] > 0$ . With the notation of Lemma 2, there are real numbers  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  such that  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_1 < \beta_2$  and

$$\mu\{\mathbf{x} \in \Delta_1(K): \alpha_1 \leq \alpha_K(\mathbf{x}) \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \beta_K(\mathbf{x}) \leq \beta_2\} > 0.$$

PROOF. Set  $I = \{(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Q}^4: 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_1 < \beta_2\}$  and, for

$$i = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in I,$$

$$X(i) = \{x \in \Delta_1(K): \alpha_1 \leq \alpha_K(x) \leq \alpha_2 \text{ and } \beta_1 \leq \beta_K(x) \leq \beta_2\},$$

where  $\mathbb{Q}$  denotes the rational numbers. By Lemma 2 we have  $\Delta_1(K) \setminus \Delta_0(K) = \bigcup \{X(i): i \in I\}$ . This, together with the assumption of our lemma and the subadditivity of  $\mu$ , implies  $0 < \mu[\Delta_1(K) \setminus \Delta_0(K)] \leq \sum_{i \in I} \mu[X(i)]$ , and Lemma 3 follows.

Below we describe a method to decrease the asphericity of certain convex bodies. Most of geometric information is used here. Remember the metric  $\delta$  on  $\Gamma$ , defined in the introduction. As before, let  $\text{Vol}(X)$  be the volume of  $X \subset \mathbb{R}^d$ .

LEMMA 4. *With the notation of the preceding lemmas, consider a point  $i = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^5$ , such that  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma < \beta_1 < \beta_2$ . Set*

$$\mathfrak{R}(i) = \{K \in \mathfrak{R}: o \in \text{int}(K), \alpha_1 \leq \varrho_1(K) \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \varrho_u(K) \leq \beta_2\}.$$

*There are a real number  $\varepsilon = \varepsilon(i) > 0$  and, for every  $K \in \mathfrak{R}(i)$ , a hyperplane  $E(K) \in \Gamma$ , such that*

$$(8) \quad \text{Vol}(\sigma(K, F) \setminus \gamma B^d) \leq \text{Vol}(K \setminus \gamma B^d) - \varepsilon,$$

*for every  $F \in \Gamma$  satisfying  $\delta(F, E(K)) \leq \varepsilon$ . Let us say that  $E(K)$  is a push-in hyperplane for  $K$ .*

PROOF. Otherwise we find, for every integer  $n \in \mathbb{N}$ , a convex body  $K_n \in \mathfrak{R}(i)$  and, associated to each  $E \in \Gamma$ , a hyperplane  $F(n, E) \in \Gamma$  satisfying

$$(9) \quad \delta(F(n, E), E) \leq 1/n$$

and

$$(10) \quad \text{Vol}(\sigma(K_n, F(n, E)) \cap \gamma B^d) \leq \text{Vol}(K_n \cap \gamma B^d) + (1/n).$$

Since  $(\mathfrak{R}(i), \delta)$  is a compact metric space, we obtain a subsequence of  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , converging to some convex body  $K \in \mathfrak{R}(i)$ . Because the interior of  $K$  is not empty we find a neighbourhood  $U$  of  $K$  in  $\mathfrak{R}$  such that the Steiner symmetrization  $(C, E) \mapsto \sigma(C, E)$  is continuous on  $U \times \Gamma$ . The volume and the intersection with  $\gamma B^d$  are also continuous maps on  $U$ , and so we conclude from (9) and (10) that

$$(11) \quad \text{Vol}(\sigma(K, E) \cap \gamma B^d) = \text{Vol}(K \cap \gamma B^d),$$

for every hyperplane  $E$  in  $\Gamma$ . This is impossible: we choose points  $p$  and  $q$  on the sphere  $\text{bd}(\gamma B^d)$ , such that  $p$  is an inner point of  $K$  and  $q$  is not contained in  $K$ . Let  $E \in \Gamma$  be the hyperplane orthogonal to  $p - q$ , and denote by  $\pi_E: \mathbb{R}^d \rightarrow E$  the normal projection onto  $E$ . For  $x \in E$  we set  $\varphi(x) = l[\pi_E^{-1}(x) \cap K \cap \gamma B^d]$  and  $\psi(x) = l[\pi_E^{-1}(x) \cap \sigma(K, E) \cap \gamma B^d]$ , where  $l[S]$  is the arclength of the line segment  $S$ , with the understanding that  $l[S] = 0$  whenever  $S$  is either empty or a singleton. Clearly  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  for every  $x \in E$  and  $\varphi(x_0) < \psi(x_0)$  for the intersection  $x_0$  of the line  $\text{aff}\{p, q\}$  with  $E$ . Since  $x_0 \in \text{relint}(\pi_E[\gamma B^d])$ , we find a neighbourhood

$W$  of  $\mathbf{x}_0$  in  $E$  such that the restrictions of  $\varphi$  and  $\psi$  to  $\pi_E[K] \cap W$  are both continuous, and so, using Fubini's theorem,

$$\text{Vol}(K \cap \gamma B^d) = \int \varphi d\mathcal{L}^{d-1} < \int \psi d\mathcal{L}^{d-1} = \text{Vol}(\sigma(K, E) \cap \gamma B^d),$$

a contradiction to (11). Here  $\mathcal{L}^{d-1}$  stands for the  $(d-1)$ -dimensional volume in the hyperplane  $E$ . Lemma 4 follows.

### 3. A result

PROOF OF THEOREM 2. Let  $K$  be a convex body in  $\mathbf{R}^d$  which contradicts the statement of Theorem 1. By Lemma 1 and Lemma 3 we find a point  $\iota = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \beta_1, \beta_2)$  in  $\mathbf{R}^5$ , satisfying  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma < \beta_1 < \beta_2$  and, with

$$X(\iota) = \{\mathbf{x} \in \Delta_1(K) : \alpha_1 < \alpha_K(\mathbf{x}) < \alpha_2, \beta_1 < \beta_K(\mathbf{x}) < \beta_2\},$$

also

$$(12) \quad \mu[X(\iota)] > 0.$$

Notice the strict inequalities in the definition of  $X(\iota)$ . Choose  $\varepsilon = \varepsilon(\iota)$  according to Lemma 4. Recall the space  $\mathfrak{R}(\iota)$  mentioned in Lemma 4 and set, for  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$Y(n) = \{\mathbf{x} \in X(\iota) : \text{writing } \sigma(K, \mathbf{x}) = (C_k)_{k \in \mathbf{N}}, \text{ we have } C_k \in \mathfrak{R}(\iota), \text{ for all } k \geq n\}.$$

By the definition of  $X(\iota)$  and the observation above Lemma 2, concerning  $\varrho_1$  and  $\varrho_u$ , we see that  $X(\iota) = \bigcup \{Y(n) : n \in \mathbf{N}\}$ , and consequently

$$(13) \quad \mu[Y(n_0)] > 0, \text{ for some } n_0 \in \mathbf{N}.$$

Whenever  $n \geq n_0$  we set

$$\begin{aligned} Z(n) &= \{\mathbf{x} \in Y(n_0) : \text{writing } \mathbf{x} = (x_k)_{k \in \mathbf{N}} \text{ and } \sigma(K, \mathbf{x}) = (C_k)_{k \in \mathbf{N}} \text{ we have} \\ &\delta(x_k, E(C_k)) > \varepsilon(\iota), \text{ for every } k \geq n \text{ and some push-in hyperplane } E(C_k) \\ &\text{for } C_k \in \mathfrak{R}(\iota), \text{ as described in Lemma 4}\}. \end{aligned}$$

We want to show

$$(14) \quad Y(n_0) = \bigcup \{Z(n) : n \geq n_0\}.$$

Otherwise there exists an element  $\mathbf{x} = (x_k)_{k \in \mathbf{N}}$  of  $Y(n_0)$  and, with the notation  $\sigma(K, \mathbf{x}) = (C_k)_{k \in \mathbf{N}}$ , a subsequence  $(x_{k(i)})_{i \in \mathbf{N}}$  of  $\mathbf{x}$  as well as, for all  $i$  satisfying  $k_i \geq n_0$ , push-in hyperplanes  $E(C_{k(i)}) \in \Gamma$ , such that  $\delta(x_{k(i)}, E(C_{k(i)})) \leq \varepsilon(\iota)$ . According to Lemma 4 this implies that the volume of  $C_{k(i)+1} = \sigma(C_{k(i)}, x_{k(i)})$  obeys the inequality

$$\text{Vol}(C_{k(i)+1} \setminus \gamma B^d) \leq \text{Vol}(C_{k(i)} \setminus \gamma B^d) - \varepsilon(\iota).$$

With  $i \rightarrow \infty$  we reach a contradiction. Remember that the map  $k \mapsto \text{Vol}(C_k \setminus \gamma B^d)$  is, by the definition of the Steiner symmetrization, nonincreasing. From (13) and (14) we deduce

$$(15) \quad \mu[Z(n_1)] > 0, \text{ for some } n_1 \in \mathbf{N}.$$

Let us choose a real number  $e > 0$  such that, for every  $U \in \Gamma$ ,  $\lambda\{V \in \Gamma: \delta(U, V) \leq \varepsilon(1)\} > e$ . As in the proof of Lemma 1 we set, for  $n \geq n_1$ ,  $B_n = p_n[Z(n_1)]$ , where  $p_n: \Delta \rightarrow \Delta_n$  is the projection map. For  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B_n$  we set  $F(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \Gamma: (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B_{n+1}\}$ . By the definition of  $Z(n_1)$  we have  $\delta(\mathbf{y}, E(C_n)) > \varepsilon(1)$  for every  $\mathbf{y} \in F(\mathbf{x})$ , where we have set  $\sigma(K, \mathbf{x}) = (C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , and  $E(C_n)$  is some push-in hyperplane for  $C_n$ , according to Lemma 4. Therefore  $\lambda[F(\mathbf{x})] < 1 - e$ , for every  $\mathbf{x} \in B_n$ ,  $n \geq n_1$ , and Fubini's theorem gives

$$\mu_{n+1}[B_{n+1}] = \int_{B_n} \lambda[F(\mathbf{x})] d\mu_n(\mathbf{x}) < (1 - e)\mu_n[B_n],$$

whenever  $n \geq n_1$ . With  $n \rightarrow \infty$  we obtain  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n[B_n] = 0$ , and since  $\mu[Z(n_1)] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n[B_n]$ , we reach a contradiction to (15), which establishes Theorem 2.

#### 4. Questions

Theorem actually holds for arbitrary compact subsets of  $\mathbb{R}^d$  with positive volume. I think that this is also true for Theorem 2.

There are a number of analogues of the Steiner symmetrization, in Euclidean, spherical and hyperbolic spaces. What can be said if any of them is iterated at random?

H. Hadwiger has given an estimate of the efficiency of the Steiner symmetrization [5]. How good is Hadwiger's estimate, and what can be said about the average efficiency?

#### REFERENCES

- [1] FEDERER, H., *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153, Springer, New York, 1969. MR 41 #1976.
- [2] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer-Verlag, Berlin, 1953. MR 15—248.
- [3] GROSS, W., Die Minimaleigenschaft der Kugel, *Monatsh. Math. Phys.* 28 (1917), 77—97.
- [4] GRÜNBAUM, B., *Convex polytopes*, Pure and applied mathematics, Vol. 16, Wiley, New York, 1967. MR 37 #2085.
- [5] HADWIGER, H., Einfache Herleitung der isoperimetrischen Ungleichung für abgeschlossene Punktmengen, *Math. Ann.* 124 (1952), 158—160. MR 14—198.
- [6] HADWIGER, H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer, Berlin, 1957. MR 21 #1561.
- [7] HALMOS, P., *Measure theory*, D. Van Nostrand, New York, 1950. MR 11—504.

(Received June 25, 1984)

MATHEMATISCHES INSTITUT  
UNIVERSITÄT BERN  
SIDLERSTRASSE 5  
CH—3012 BERN  
SWITZERLAND

## DISJUNKTE PFLASTERUNGEN KONVEXER KÖRPER

E. HERTEL

Herrn László Fejes Tóth zum 70. Geburtstag gewidmet

### 1. Einleitung

Im Jahre 1949 stellte B. L. van der Waerden in den „Elementen der Mathematik“ die Aufgabe, die Unmöglichkeit einer Zerlegung der Kreisfläche in zwei disjunkte kongruente Teilmengen zu beweisen [6]. Die Lösung dieser Aufgabe ist im gleichen Heft dieser Zeitschrift veröffentlicht mit dem Hinweis, daß D. Puppe sogar folgende Aussage bewiesen hat: Ein abgeschlossener ebener Eibereich kann niemals in zwei disjunkte gleichsinnig kongruente Teilmengen zerlegt werden (vgl. auch [2], Satz 66). Im folgenden soll dieser Satz von Puppe in zwei Richtungen verallgemeinert werden: Für den eindimensionalen Fall kann die Aussage auf endlich viele Teile ausgedehnt werden (Abschnitt 2), und im 3. Abschnitt wird der Satz für beliebige Dimensionen bewiesen. Die entsprechenden Zerlegungen in kongruente Teile werden als „disjunkte Pflasterungen“ aufgefaßt. Zunächst sollen die grundlegenden Begriffe in Analogie zu [1] bereitgestellt werden.

Es sei  $M$  eine beliebige Teilmenge des  $d$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $E^d$  und  $G^d$  eine Transformationsgruppe des  $E^d$ . Von besonderem Interesse sind die Fälle  $G^d = T^d$  (Translationsgruppe) und  $G^d = B^d$  (volle Bewegungsgruppe). Für ein beliebiges System  $\mathfrak{S}$  von Teilmengen des  $E^d$  werde definiert:

- $\mathfrak{S}$  ist Überdeckung von  $M$ :  $\Leftrightarrow M \subseteq \bigcup \mathfrak{S}$ ,
- $\mathfrak{S}$  ist disjunkte Packung in  $M$ :  $\Leftrightarrow \bigcup \mathfrak{S} \subseteq M$  und  $\mathfrak{S}$  ist disjunkt,
- $\mathfrak{S}$  ist disjunkte Zerlegung von  $M$ :  $\Leftrightarrow \mathfrak{S}$  ist Überdeckung von  $M$  und disjunkte Packung in  $M$ ,
- $\mathfrak{S}$  ist disjunkte  $G^d$ -Pflasterung von  $M$ :  $\Leftrightarrow \mathfrak{S}$  ist disjunkte Zerlegung von  $M$ , und zu je zwei Elementen  $A, B$  aus  $\mathfrak{S}$  existiert eine Transformation  $\alpha$  aus  $G^d$  mit  $\alpha(A) = B$ .

Im weiteren interessiert nun insbesondere der Fall, daß  $M$  ein konvexer Körper ist, d. h.,

1.  $M$  ist beschränkt,
2.  $M$  ist abgeschlossen und
3.  $M$  ist konvex.

Die hier gestellte Frage lautet also jetzt: Existieren disjunkte Pflasterungen konvexer Körper?

1980 Mathematics Subject Classification. Primary 52A45; Secondary 52A20.

Key words and phrases. Disjoint tilings of convex bodies.



## 2. Eindimensionaler Fall

Im Fall der Dimension  $d=1$  fällt der Begriff des (1-dimensionalen) konvexen Körpers mit dem des abgeschlossenen Intervalls zusammen. Es soll hier der Intervallbegriff in folgendem Sinne benutzt werden: Für zwei reelle Zahlen  $a, b$  mit  $a \leq b$  heiße  $I=(a, b)$  *Intervall*, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt:

- (1)  $I = [a, b] := \{x: a \leq x \leq b\}; I$  abgeschlossen,
- (2)  $I = [a, b[ := \{x: a \leq x < b\},$   
 $I = ]a, b] := \{x: a < x \leq b\}; I$  halboffen,
- (3)  $I = ]a, b[ := \{x: a < x < b\}; I$  offen.

Im Falle  $a=b$  ist insbesondere  $I=[a, a]=\{a\}$  und  $I=]a, a[=\emptyset$  zugelassen. Es sei  $\mathfrak{I}$  die Menge aller dieser Intervalle in  $E^1$ . Dann fällt  $\mathfrak{I}$  mit der Menge aller beschränkten konvexen Mengen des  $E^1$  zusammen, und es gilt folgender

**HILFSSATZ 1.**  $\mathfrak{I}$  ist durchschnitsabgeschlossen, d. h., aus  $A, B \in \mathfrak{I}$  folgt stets  $A \cap B \in \mathfrak{I}$ .

Ferner sei  $R(\mathfrak{I})$  der von  $\mathfrak{I}$  erzeugte Mengerring (Verband) aller endlichen Vereinigungen von Intervallen:

$$R(\mathfrak{I}) := \{X \subseteq E^1: \exists \mathfrak{I}' (\mathfrak{I}' \subseteq \mathfrak{I} \text{ \& \& } \mathfrak{I}' \text{ endlich \& } X = \bigcup \mathfrak{I}')\}.$$

Es wird nun auf  $\mathfrak{I}$  eine spezielle *Bewertung* (valuation) im Sinne von McMullen [3] erklärt, d. h. ein additives Mengenfunktional  $f$  mit Werten in der Menge  $\mathbb{Z}$  aller ganzen Zahlen:

$$f(I) := \begin{cases} 0 & \text{für } I = \emptyset \text{ oder } I \text{ halboffen,} \\ 1 & \text{für } I \text{ abgeschlossen,} \\ -1 & \text{für } I \text{ offen } (I \neq \emptyset). \end{cases}$$

Die erforderliche Additivität dieses Funktionals wird ausgedrückt in dem leicht zu beweisenden

**HILFSSATZ 2.** Für  $I_1, I_2, I_1 \cup I_2 \in \mathfrak{I}$  gilt stets

$$f(I_1 \cup I_2) + f(I_1 \cap I_2) = f(I_1) + f(I_2).$$

Außerdem erfüllt  $f$  folgendes *Inklusions-Exklusions-Prinzip* [3]:

**HILFSSATZ 3.** Für jede natürliche Zahl  $n$  mit  $I_1, \dots, I_n, I = \bigcup_{i=1}^n I_i \in \mathfrak{I}$  gilt

$$f(I) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{i_1 < \dots < i_r} f(I_{i_1} \cap \dots \cap I_{i_r}).$$

**BEWEIS.** Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach  $n$ . Für  $n=2$  fällt Hilfssatz 3 mit der Aussage von Hilfssatz 2 zusammen. Sei jetzt der Hilfssatz 3 für alle Anzahlen kleiner  $n$  richtig und  $I = \bigcup_{i=1}^n I_i$ , wobei  $I = \emptyset$  und  $I = \{a\}$  als

trivial ausgeschlossen werden kann. In einem ersten Fall soll angenommen werden, daß ein Teilintervall existiert, welches ganz in einem anderen enthalten ist, o. B. d. A.

$I_n \subseteq I_{n-1}$ . Dann gilt  $I = I' = \bigcup_{i=1}^{n-1} I_i$  und mit der Induktionsannahme

$$(a) \quad f(I) = f(I') = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r-1} \sum f(I_{i_1} \cap \dots \cap I_{i_r}).$$

Mit  $T := I_{i_1} \cap \dots \cap I_{i_r}$  für  $i_r < n-1$  und  $I_n \subseteq I_{n-1}$  ergibt sich stets

$$f(T \cap I_n) = f(T \cap I_{n-1} \cap I_n),$$

woraus mit (a) die Behauptung folgt. Sei jetzt (2. Fall) keines der Teilintervalle ganz in einem anderen enthalten. Dann kann o. B. d. A. für  $I_i = (a_i, b_i)$  angenommen werden, daß  $b_1 \leq \dots \leq b_{n-1} < b_n$  gilt, und  $I_n$  kann disjunkt in zwei Teilintervalle zerlegt werden  $I_n = I'_n \cup I''_n$ , so daß  $I' = I_1 \cup \dots \cup I_{n-1} \cup I'_n$  gilt und für  $I'$  der erste Fall vorliegt. Mit einfachen Überlegungen ergibt sich dann auch in diesem Fall die zu beweisende Behauptung.

Unter Berücksichtigung des Satzes, daß eine Bewertung  $f$  auf einem durchschnittsabgeschlossenen Mengensystem  $\mathfrak{M}$  mit Werten in einer abelschen Gruppe genau dann eine (eindeutige) Fortsetzung auf den von  $\mathfrak{M}$  erzeugten Mengenring  $R(\mathfrak{M})$  besitzt, wenn  $f$  das Inklusions-Exklusions-Prinzip erfüllt (vgl. [3], Theorem 5.19), ergibt sich zu Hilfssatz 3 das folgende

KOROLLAR. Die Abbildung  $f'$  von  $R(\mathfrak{I})$  in  $Z$  mit

$$f'(K) := \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{i_1 < \dots < i_r} f(I_{i_1} \cap \dots \cap I_{i_r})$$

für  $K = \bigcup_{i=1}^n I_i \in R(\mathfrak{I})$  ist eine Fortsetzung der Bewertung  $f$  auf  $R(\mathfrak{I})$ .

Jetzt kann die Aussage über die Unmöglichkeit der Zerlegung eines abgeschlossenen Intervalls in endlich viele paarweise kongruente und disjunkte Teilmengen formuliert werden in Form von folgendem

SATZ 1. Kein konvexer Körper in  $E^1$  besitzt eine endliche disjunkte  $B^1$ -Pflasterung.

BEWEIS. Es werde indirekt angenommen, daß o. B. d. A. das Intervall  $I = [0, 1]$  eine  $B^1$ -Pflasterung besitzt:

$$I = \bigcup_{i=1}^m K_i, \quad K_i \cap K_j = \emptyset \quad (i \neq j), \quad \gamma_i(K_1) = K_i \quad \text{mit} \quad \gamma_i \in B^1 \\ (i = 1, \dots, m; 1 < m).$$

Jede Bewegung  $\gamma \in B^1$  ist entweder eine Translation

$$\gamma(x) = x + a \quad (a \in \mathbf{R}),$$

oder sie ist eine Spiegelung

$$\gamma(x) = -x + 2b$$

mit dem Fixpunkt  $x=b$ . Im weiteren Beweis werden zwei Fälle unterschieden.

1. Fall. Es existiert ein Punkt  $x_0 \in I$  und ein Index  $t \in \{1, \dots, m\}$ , so daß

(a) in jeder linken punktierten Umgebung

$$U_{\varepsilon}^{-}(x_0) := \{x: x_0 - \varepsilon < x < x_0\} \quad \text{oder}$$

(b) in jeder rechten punktierten Umgebung

$$U_{\varepsilon}^{+}(x_0) := \{x: x_0 < x < x_0 + \varepsilon\}$$

stets Punkte aus  $K_t$  und wenigstens einem  $K_i$  ( $i \neq t$ ) liegen. Da die Anzahl der  $K_i$  endlich ist, existiert dann mindestens ein  $K_s$  ( $s \neq t$ ), so daß in jedem  $U_{\varepsilon}^{-}(x_0)$  oder in jedem  $U_{\varepsilon}^{+}(x_0)$  stets Elemente aus  $K_t$  und  $K_s$  liegen. Der Punkt  $x_0$  mit (a) oder (b) heiße kurz *R-Häufungspunkt* von  $K_t$  (und somit von  $K_s$ ). Es sei nun  $x_0$  das Minimum aller *R-Häufungspunkte* in  $I$  und o. B. d. A.  $t=1$  und  $s=2$ . Dann kann die Abbildung  $\gamma_2$  mit  $\gamma_2(K_1)=K_2$  keine Translation sein, sonst müßte  $K_1$  oder  $K_2$  einen *R-Häufungspunkt* links von  $x_0$  besitzen im Widerspruch zur Minimalität von  $x_0$ . Folglich hat  $\gamma_2$  die Gestalt

$$\gamma_2(x) = -x + 2b \quad \text{mit} \quad 0 < b < 1$$

und dem Fixpunkt  $z=b$ , für den  $z \notin K_1 \cup K_2$  gelten muß. Also ist  $m > 2$ . Es kann nicht  $z < x_0$  gelten, da sonst  $\gamma_2(x_0) < x_0$  gilt und  $\gamma_2(x_0)$  ein *R-Häufungspunkt* von  $K_2$  wäre im Widerspruch zur Minimalität von  $x_0$ . Es sei also  $z > x_0$  (im Fall  $z=x_0$  besitzt  $K_1$  genau einen *R-Häufungspunkt*, und die folgenden Überlegungen vereinfachen sich). Dann ist  $\gamma_2(x_0)=x_1$  maximaler *R-Häufungspunkt* von  $K_1$  und  $K_2$ , und die Mengen  $K_1$  und  $K_2$  sind bezüglich des Mittelpunktes  $z=b$  der Strecke  $x_0x_1$  spiegelsymmetrisch gelegen. Jede weitere Teilmenge  $K_s$  ( $s > 2$ ) muß ebenfalls einen minimalen und einen maximalen *R-Häufungspunkt*  $x_0^s$  bzw.  $x_1^s$  besitzen mit  $x_0 < x_0^s$ , und es muß eine zu  $K_s$  bezüglich des Mittelpunktes von  $x_0^s x_1^s$  symmetrisch gelegene Menge  $K_{s+1} = \gamma_s(K_2)$  geben. Die Teilmengen  $K_i$  von  $I$  treten also in Paaren von symmetrisch gelegenen Mengen auf:  $K_s, K_{s+1}$  ( $s=1, 3, \dots, m-1$ ). Werden diese Paare zu neuen Mengen zusammengefaßt, so entsteht wieder eine disjunkte  $B^1$ -Pflasterung von  $I$ :

$$I = \bigcup_{i=1}^{m/2} K'_i \quad \text{mit} \quad K'_1 = K_1 \cup K_2, \dots, K'_{m/2} = K_{m-1} \cup K_m$$

und

$$\gamma'_i = \gamma_{2i-1} \quad (i = 1, \dots, m/2).$$

Nach eventueller Wiederholung dieses Verfahrens entsteht schließlich aus der Ausgangspflasterung eine solche Pflasterung, die keine *R-Häufungspunkte* mehr besitzt:

2. Fall. Gibt es keinen Punkt  $x_0 \in I$  mit (a) oder (b), so sind die  $K_i$  in der Pflasterung von  $I$  Vereinigungen von endlich vielen Intervallen, also Elemente aus  $R(\mathfrak{J})$ , denn es können keine Häufungen von Intervallen oder isolierten Punkten vorkommen. Da die Bewertung  $f'$  bewegungsinvariant ist, d. h., aus

$$\gamma_i(K_1) = K_i \quad \text{mit} \quad \gamma_i \in B^1 \quad \text{und} \quad K_1, K_i \in R(\mathfrak{J})$$

folgt stets  $f'(K_1) = f'(K_i)$ , ergibt sich aus

$$I = \bigcup_{i=1}^m K_i \quad \text{mit} \quad K_i \cap K_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

die Beziehung

$$f'(I) = f(I) = mf'(K_1) = 1.$$

Wegen  $f'(K_1) \in \mathbb{Z}$  muß  $m=1$  gelten, so daß nur die triviale Pflasterung möglich sein kann, womit Satz 1 bewiesen ist.

### 3. Höherdimensionaler Fall

Es soll nun gezeigt werden, daß kein  $d$ -dimensionaler konvexer Körper  $K$  mengengeometrisch „halbiert“ werden kann, d. h.,  $K$  kann nicht in zwei disjunkte kongruente Teilmengen zerlegt werden. Mit dem Begriff der Pflasterung werde diese Aussage formuliert in folgendem

**SATZ 2.** *Kein konvexer Körper in  $E^d$  besitzt eine disjunkte  $B^d$ -Pflasterung aus zwei Teilen.*

**BEWEIS.** Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach der Dimension  $d = \dim K$  des konvexen Körpers  $K$ . Für  $d=1$  ist die Aussage von Satz 2 in Satz 1 enthalten, und es werde angenommen, daß Satz 2 für alle konvexen Körper der Dimension kleiner als  $d$  richtig ist. Es sei nun  $K$  ein  $d$ -dimensionaler konvexer Körper in  $E^d$  mit der disjunkten Zerlegung

$$K = K_1 \cup K_2, \quad K_1 \cap K_2 = \emptyset, \quad K_2 = \gamma(K_1) \quad \text{für} \quad \gamma \in B^d.$$

Dann muß die Abbildung  $\gamma$ , wie jede Bewegung,

- a) einen Fixpunkt besitzen:  $\gamma(x_0) = x_0$ , oder
- b) einen Vektor  $v_0$  festlassen:  $\gamma(v_0) = v_0$ .

Der Fall a) kann nicht eintreten, denn es müßte  $x_0 \notin K$  gelten. Dann gibt es aber genau einen Punkt  $y_0 \in K$  mit minimalem Abstand zu  $x_0$ , so daß aus  $\gamma(y_0) \in K$  oder  $\gamma^{-1}(y_0) \in K$  folgen würde  $\gamma(y_0) = y_0$  und somit doch ein Fixpunkt von  $\gamma$  in  $K$  läge.

Im Fall b) wird die Stützhyperebene  $H = H(v_0)$  der Richtung  $v_0$  an  $K$  betrachtet mit  $F := H \cap K$ . Dann ist  $H$  keine Fixhyperebene von  $\gamma$ , weil sonst entweder  $H$  einen Fixpunkt enthalten würde, was nach a) unmöglich ist, oder es würde in  $H$  der konvexe Körper  $F$  mit  $\dim F < d$  disjunkt zerlegt in  $F_1 = H \cap K_1$  und  $F_2 = H \cap K_2$  mit  $\gamma(F_1) = F_2$  im Widerspruch zur Induktionsannahme. Die Hyperebene  $H$  wird also auf eine zu  $H$  parallele Hyperebene  $H_1 = H_1(v_0) \neq H$  abgebildet. Die Invarianz der Orientierung  $v_0$  bedeutet, daß  $\gamma$  einen Translationsanteil  $-\lambda v_0$  enthält, wobei für  $\|v_0\|=1$  die Zahl  $\lambda > 0$  der Abstand zwischen den Hyperebenen  $H$  und  $H_1$  ist.  $K_1$  (und somit  $K_2$ ) besteht also aus einer endlichen Menge paralleler Schichten der Gestalt

$$A = H^- \cap H_1^+ \cap K,$$

die „in Richtung  $v_0$  abgeschlossen und in Richtung  $-v_0$  offen“ sind. Dabei ist  $H^-$  der von  $H$  erzeugt abgeschlossene Halbraum in Richtung  $-v_0$  und  $H_1^+$  der von  $H_1$  erzeugte offene Halbraum in Richtung  $v_0$ . Eine solche Gestalt der beiden Teile  $K_i$  ist aber unmöglich wegen der Abgeschlossenheit von  $K=K_1 \cup K_2$  in Richtung  $v_0$  und  $-v_0$ , womit Satz 2 bewiesen ist.

Es bleibt festzustellen, daß die Voraussetzungen der Sätze 1 und 2 nicht abgeschwächt werden können, d. h., es darf keine der drei Eigenschaften eines konvexen Körpers fallengelassen werden. Es gilt nämlich der folgende

**SATZ 3.** Zu allen natürlichen Zahlen  $m, d > 0$  existieren

a) beschränkte abgeschlossene (also kompakte),

b) beschränkte konvexe und

c) abgeschlossene konvexe

$d$ -dimensionale Punktmengen, die eine disjunkte  $T^d$ -Pflasterung in  $m$  Teile gestatten.

**BEWEIS.** Im Fall a) ist für die Dimension  $d=1$  die Menge

$$M := \bigcup_{k=1}^m [2k, 2k+1]$$

bei gegebener natürlicher Zahl  $m$  beschränkt und abgeschlossen, und sie läßt sich in die  $m$  disjunkten Teilmengen

$$M_k = [2k, 2k+1] \quad (k = 1, \dots, m)$$

zerlegen, die aus  $M_1 = [2, 3]$  durch die Translationen

$$x' = x + 2(k-1) \quad (k = 1, \dots, m)$$

hervorgehen. Für höhere Dimensionen  $d > 1$  wird aus  $M$  die Menge  $M'$  gebildet mit

$$M' := \{x \in E^d: x = (x_1, \dots, x_d) \ \& \ x_1 \in M \ \& \ 0 \leq x_i \leq 1 \ (i = 2, \dots, d)\},$$

welche ebenfalls die Voraussetzungen a) erfüllt und durch  $m$  zu

$$M'_1 := \{x \in M': 2 \leq x_1 \leq 3\}$$

translationsgleiche Mengen disjunkt gepflastert werden kann.

Im Fall b) erfüllt für die Dimension  $d=1$  die Menge  $M := [0, m[$  die Voraussetzung der Beschränktheit und der Konvexität, und  $M$  besitzt die  $T^1$ -Pflasterung mit den  $m$  paarweise disjunkten Teilmengen  $M_i = [i-1, i[$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Eine Übertragung auf höhere Dimensionen ist wie im Fall a) möglich.

Für den Beweis von Fall c) werde die abgeschlossene und konvexe Menge

$$M := \{x: 0 \leq x\}$$

betrachtet. Sie besitzt die disjunkte Zerlegung

$$M = \bigcup_{i=1}^m K_i \quad \text{mit} \quad K_i = \bigcup_{k=0}^{\infty} [km+i-1, km+i[ \quad (i = 1, \dots, m),$$

und die  $K_i$  sind alle zu  $K_1$  translationsgleich. Die Übertragung auf den  $d$ -dimensionalen Fall ( $d > 1$ ) liegt wieder auf der Hand, so daß Satz 3 vollständig bewiesen ist.



#### 4. Probleme

Abschließend sollen einige offene Fragen bezüglich disjunkter Pflasterungen konvexer Körper formuliert werden. Zunächst drängt sich die Frage auf, ob nicht Satz 2 in der bezüglich der Anzahl  $m$  der Teile allgemeineren Form des Satzes 1 ausgesprochen werden kann. Diese Frage werde formuliert als

**PROBLEM 1.** Gibt es  $d$ -dimensionale konvexe Körper ( $d > 1$ ), die eine disjunkte  $B^d$ -Pflasterung erlauben in  $m > 2$  Teilmengen?

Wenn statt der Bewegungsgruppe  $B^d$  allgemeinere Transformationsgruppen  $G$  des euklidischen Raumes zugelassen werden, verlieren die Sätze 1 und 2 im allgemeinen ihre Gültigkeit. Ist  $G^1$  z. B. die Gruppe aller Bijektionen des  $E^1$  auf sich, so besitzt der eindimensionale konvexe Körper  $I = [0, 1]$  eine disjunkte  $G^1$ -Pflasterung  $I = I_1 \cup I_2$  mit

$$I_1 = [0, 1/2], \quad I_2 = ]1/2, 1], \quad \gamma(I_2) = I_1 \quad \text{für}$$

$$\gamma(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 1, \\ 2^{1-n} & \text{für } x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \quad (n = 2, 3, \dots), \\ x - \frac{1}{2} & \text{sonst } (x \in I). \end{cases}$$

Disjunkte  $G^1$ -Pflasterungen von  $I$  in mehr als 2 Teile lassen sich analog konstruieren, und die Übertragung auf höhere Dimensionen ist wieder trivial. Es ergibt sich also folgendes

**PROBLEM 2.** Welches ist die umfassendste Transformationsgruppe, für welche die Sätze 1 bzw. 2 gültig bleiben?

Werden unendliche Pflasterungen zugelassen, so verlieren die Sätze 1 und 2 ebenfalls ihre Gültigkeit, denn es gilt folgender

**SATZ 4.** Jeder  $d$ -dimensionale Würfel gestattet eine abzählbar unendliche disjunkte  $T^d$ -Pflasterung.

**BEWEIS.** Für die Dimension  $d=1$  wurde diese Aussage bereits im Jahre 1928 von J. v. Neumann [4] bewiesen. Die Übertragung auf höhere Dimensionen erfolgt in naheliegender Weise wie beim Beweis von Satz 3.

Wird auf die Eigenschaften des konvexen Körpers bei der auszufpflasternden Menge verzichtet, ergeben sich bezüglich disjunkter  $B^d$ -Pflasterungen überraschende Aussagen. So existiert zu jeder Kardinalzahl  $m$ , welche die Mächtigkeit des Kontinuums nicht übersteigt, eine ebene Menge  $M$ , die sich durch  $m$  zur Menge  $M$  kongruente Teilmengen disjunkt auspfastern läßt. Diese Aussage und weitere Sätze über paradoxe disjunkte Pflasterungen finden sich z. B. in dem Übersichtsartikel [5] von W. Sierpiński.

Angesichts der Tatsache, daß sich die  $(d-1)$ -Sphäre stets in zwei disjunkte kongruente Teilmengen zerlegen läßt und die Kreislinie für jedes  $m \geq 2$  eine disjunkte Pflasterung in  $m$  kongruente Teile gestattet, ergibt sich schließlich das folgende

PROBLEM 3. In welcher Weise lassen sich die Sätze 1 und 2 auf nichteuklidische bzw. metrische Räume übertragen?

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, 2. Aufl., Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 65, Springer-Verlag, Berlin, 1972. *MR* 50 # 5603
- [2] HADWIGER, H. und DEBRUNNER, H., *Kombinatorische Geometrie in der Ebene*, Monographies de „L'Enseignement Mathématique“, No. 2, Institut de Mathématiques, Genève, 1960. *MR* 22 # 11310.
- [3] McMULLEN, P. and SCHNEIDER, R., Valuations on convex bodies, *Convexity and its Applications*, ed. by P. M. Gruber and J. M. Wills, Birkhäuser, Basel—Boston, 1983, 170—247. *MR* 85e: 52001.
- [4] NEUMANN, J. VON, Die Zerlegung eines Intervalles in abzählbar viele kongruente Teilmengen, *Fund. Math.* 11 (1928), 230—238.
- [5] SIERPIŃSKI, W., Sur la congruence des ensembles de points et ses généralisations, *Comment. Math. Helv.* 19 (1946—47), 215—226. *MR* 8—255.
- [6] WAERDEN, B. L. VAN DER, Aufgabe 51, *Elem. Math.* 4 (1949), 18.

(Eingegangen am 25. Juni 1984)

SEKTION MATHEMATIK  
FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA  
UNIVERSITÄTSHOCHHAUS  
DDR—69 JENA  
GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

# OPTIMALE ZERLEGUNGEN EINES KONVEXEN BEREICHS IN KONVEXE BEREICHE

G. BLIND

Herrn Prof. L. Fejes Tóth zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Wird ein konvexer Bereich  $T$  der euklidischen Ebene in  $n \geq 2$  konvexe Bereiche  $T_1, \dots, T_n$  vom Flächeninhalt  $|T_i|$  und vom Umfang  $|L_i|$  zerlegt ( $1 \leq i \leq n$ ), so heißt  $\{T; T_1, \dots, T_n\}$  eine  $n$ -Zerlegung oder *Zerlegung*. Es sei  $I(n)$  das Minimum von  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|L_i|^2}{|T_i|}$  über alle  $n$ -Zerlegungen. Nach [5, S. 70] gilt

$$(1) \quad I(n) > 8\sqrt{3} \quad (n \geq 2).$$

Diese Ungleichung für das arithmetische Mittel der isoperimetrischen Quotienten  $\frac{|L_i|^2}{|T_i|}$  wurde in [2], [3] und [4] verschärft durch die Untersuchung anderer Mittelbildungen.

Andererseits interessiert die Größe  $I(n)$  selbst, in Abhängigkeit von  $n$ , und die Gestalt der *optimalen Zerlegungen*, d. h. der  $n$ -Zerlegungen, für die  $I(n)$  angenommen wird.

In der vorliegenden Arbeit werden für kleine  $n$  die Werte  $I(n)$  und die optimalen Zerlegungen bestimmt. Hieraus läßt sich vermuten, daß die Bereiche  $T_i$  einer optimalen Zerlegung Formfiguren sind (d. h.: jede Stützgerade berührt den Inkreis (vgl. [6, S. 151])). Bewiesen wird eine notwendige Bedingung dafür. Aus dem Fejes Tóth'schen Beweis von (1) und den optimalen Zerlegungen für kleine  $n$  entsteht die Frage, inwieweit folgende  $n$ -Zerlegungen optimal sind:  $T$  ist die konvexe Hülle gewisser Kreise der dichtesten Kreispackung, diese Kreise sind Inkreise der  $T_i$ . Dieser Frage wird nachgegangen.

Zu einer Menge  $M$  sei  $\partial M$  ihr Rand,  $|M|$  ihr Inhalt,  $\bar{M}$  ihre abgeschlossene Hülle.

Die Ecken der  $T_i$  heißen *Ecken der Zerlegung*, sie heißen *Randecken*, wenn sie auf  $\partial T$  liegen, sonst *innere Ecken*. Die Kanten der  $T_i$  heißen *Kanten der Zerlegung*.  $T_i$  heißt *innerer Bereich*, wenn  $T_i \cap \partial T = \emptyset$ .

Eine Zerlegung heißt *einfach*, wenn  $T$  glatt ist und alle Ecken der Zerlegung 3-wertig. Jede  $n$ -Zerlegung läßt sich durch einfache  $n$ -Zerlegungen approximieren, d. h.  $I(n) = \inf \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|L_i|^2}{|T_i|}$  über alle einfachen  $n$ -Zerlegungen.

1980 Mathematics Subject Classification. Primary 52A40; Secondary 52A45.

Key words and phrases. Euclidean plane, convex domain, dividing into convex domains, isoperimetric quotient.

## 2. Es gilt

SATZ 1. Für  $2 \leq n \leq 7$  hat  $I(n)$  den in Fig. 1 angegebenen Wert und die angegebenen  $n$ -Zerlegungen sind optimal<sup>1</sup>.

Für  $n=8$  ist  $14,5813... \leq I(8) \leq 14,5825...$ ,  
für  $n=9$  ist  $14,5733... \leq I(9) \leq 14,5770...$ ,

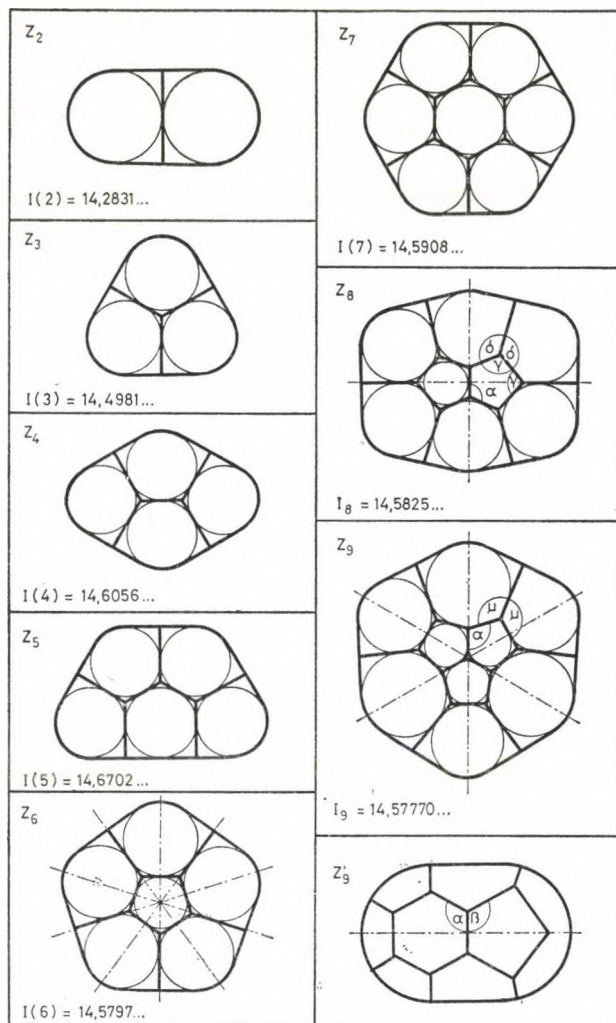


Fig. 1

<sup>1</sup> Innerhalb der Klasse der einfachen  $n$ -Zerlegungen sind es die einzigen optimalen; wenn weitere optimale existieren, werden sie durch Zerlegungen dieses topologischen Typs approximiert.

und optimale 8- bzw. 9-Zerlegungen sind vom selben topologischen Typ wie  $Z_8$  bzw. wie  $Z_9$  oder werden von Zerlegungen dieses Typs approximiert.

BEWEIS. Für  $2 \leq n \leq 9$  sei  $Z_n$  die in Fig. 1 angegebene  $n$ -Zerlegung: Alle  $T_i$  sind Formfiguren; eingezeichnet sind die Inkreise der  $T_i$ , die für  $n \leq 5$  und  $n=7$  wie in der dichtesten Kreispackung liegen;  $Z_6$  hat 5 Symmetrieachsen;  $Z_8$  hat 2 Symmetrieachsen und es ist  $\alpha=1,967$ ,  $Z_9$  hat 3 Symmetrieachsen und es ist  $\alpha=1,922$ , und gleich bezeichnete Winkel sind kongruent.

Weil  $T_i$  Formfigur ist, gilt (vgl. etwa [5, S. 10 und 70])

$$(2) \quad \frac{|L_i|^2}{|T_i|} = 2\alpha_i + 4 \sum_{k=1}^{m_i} \tan \frac{\beta_k^i}{2},$$

wobei  $m_i$  die Anzahl der Ecken von  $T_i$  ist,  $\beta_1^i, \dots, \beta_{m_i}^i$  sind die Außenwinkel der Ecken von  $T_i$ , und  $\alpha_i := 2\pi - (\beta_1^i + \dots + \beta_{m_i}^i)$ . Offenbar ist  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2\pi$ . Für jedes  $Z_n$  läßt sich damit  $\frac{1}{n} \sum \frac{|L_i|^2}{|T_i|} =: I_n$  berechnen, was in Fig. 1 (für  $n \leq 7$  als  $I(n)$ ) angegeben ist.

Weil jede  $n$ -Zerlegung durch einfache  $n$ -Zerlegungen approximiert werden kann, ist zum Beweis von Satz 1 zu zeigen: Für jede einfache  $n$ -Zerlegung von anderem topologischen Typ als  $Z_n$  ist  $\frac{1}{n} \sum \frac{|L_i|^2}{|T_i|} \geq I_n + \varepsilon_n$  für ein geeignetes  $\varepsilon_n > 0$  ( $2 \leq n \leq 9$ ). Für alle von  $Z_n$  verschiedenen einfachen Zerlegungen vom selben topologischen Typ wie  $Z_n$  gilt  $\frac{1}{n} \sum \frac{|L_i|^2}{|T_i|} > I_n$  für  $2 \leq n \leq 7$ ,  $\frac{1}{n} \sum \frac{|L_i|^2}{|T_i|} \geq 14,5813\dots$  für  $n=8$  und  $\frac{1}{n} \sum \frac{|L_i|^2}{|T_i|} \geq 14,5733\dots$  für  $n=9$ .

Nun ist der isoperimetrische Quotient eines konvexen Bereichs höchstens größer als der der zugehörigen Formfigur (d. h. einer Formfigur mit denselben äußeren Normalenvektoren) (vgl. [5, S. 10]), so daß für eine  $n$ -Zerlegung wegen (2) gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|L_i|^2}{|T_i|} \geq \frac{4}{n} \left( \pi + \sum_j \tan \frac{\pi - \gamma_j}{2} \right),$$

wobei  $\gamma_j$  alle Winkel an Ecken der  $T_i$  sind.

Weil die beiden Winkel an einer Randecke einer einfachen Zerlegung die Summe  $\pi$  haben, folgt mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung für einfache Zerlegungen

$$(3) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|L_i|^2}{|T_i|} \geq \frac{4}{n} \left( \pi + 2r + \sum_l \tan \frac{\pi - \gamma_l}{2} \right),$$

wobei jetzt  $\gamma_l$  alle Winkel an inneren Ecken der Zerlegung sind, und  $r$  ist die Anzahl der Randecken. Nach dem Eulerschen Polyedersatz hat eine einfache  $n$ -Zerlegung  $2n-2$  Ecken, also  $2n-2-r$  innere Ecken.

Man betrachte nun alle einfachen  $n$ -Zerlegungen von gegebenem topologischem Typ. Dann ist die Summe der Winkel aus einer der folgenden Mengen konstant, d. h. unabhängig von der speziellen Realisierung des topologischen Typs:



- Die Menge der 3 Winkel an einer inneren Ecke;
- Die Menge aller Winkel, die einem topologischen Kreis aus Kanten der Zerlegung nach innen anliegen; speziell die Menge der  $k$  Innenwinkel eines  $k$ -Ecks.
- Die Menge aller Winkel, die einem topologischen Kreis aus Kanten der Zerlegung nach außen anliegen; speziell die Menge der  $2k$  Winkel, die einem inneren  $k$ -Eck nach außen anliegen.

Die Menge der Winkel an inneren Ecken läßt sich damit in geeignete Winkel-mengen mit jeweils konstanter Summe zerlegen, und für jede solche Menge  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  gilt

$$\sum_{l=1}^k \tan \frac{\pi - \gamma_l}{2} \geq k \tan \frac{\sum_{l=1}^k (\pi - \gamma_l)}{2k}.$$

Damit liefert (3) Abschätzungen für  $\frac{1}{n} \sum \frac{|L_i|^2}{|T_i|}$ .

Gibt es z. B. in einer  $n$ -Zerlegung ein inneres Dreieck, so haben seine 3 Innenwinkel die Summe  $\pi$ , die 6 außen anliegenden Winkel die Summe  $5\pi$ , die 3 Winkel an jeder der restlichen  $2n - 2 - r - 3$  inneren Ecken die Summe  $2\pi$ , so daß in diesem Fall

$$\frac{1}{n} \sum \frac{|L_i|^2}{|T_i|} \geq \frac{4}{n} \left( \pi + 2r + 3 \tan \frac{\pi}{3} + 6 \tan \frac{\pi}{12} + (2n - r - 5) 3 \tan \frac{\pi}{6} \right),$$

was für  $4 \leq n \leq 9$  und  $r \geq 3$  den verlangten Ungleichungen genügt. Es brauchen also nur  $n$ -Zerlegungen ohne innere Dreiecke betrachtet zu werden.

Auch hier führt die beschriebene Methode zu den gewünschten Abschätzungen; die folgenden beiden Zerlegungen der Winkelmenge sind dabei besonders geeignet:

- Zu jedem inneren Bereich die Menge der Innenwinkel und außerdem die Menge der verbleibenden Winkel.
- Man betrachte eine Menge topologischer Kreise aus Kanten so, daß jede innere Ecke auf genau einem Kreis liegt. Zu jedem solchen Kreis wähle man die Menge der innen anliegenden Winkel und die Menge der außen anliegenden Winkel.

Speziell bei Zerlegungen vom topologischen Typ von  $Z_8$  oder  $Z_9$  beachtet man, daß die Zerlegung o. B. d. A. dieselben Symmetrieachsen wie  $Z_8$  bzw.  $Z_9$  hat. Dann nimmt man den Winkel  $\alpha$  in Fig. 1 als Variable, so daß  $\frac{1}{n} \sum \frac{|L_i|^2}{|T_i|}$  durch eine

Funktion von  $\alpha$  abgeschätzt wird. Ihr Minimum ist die angegebene untere Schranke für  $I(8)$  bzw.  $I(9)$ . Speziell bei Zerlegungen vom topologischen Typ von  $Z_9'$  (siehe Fig. 1) nimmt man die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  als Variable.

3. Ausgehend von den optimalen  $n$ -Zerlegungen für  $2 \leq n \leq 7$  entstehen die Fragestellungen

1. Man beschreibe die für optimale Zerlegungen möglichen  $T$ .
2. Sind die  $T_i$  in optimalen Zerlegungen Formfiguren?

Einen ersten Schritt in beide Richtungen liefert

**SATZ 2.**  $\{T; T_1, \dots, T_n\}$  sei eine optimale Zerlegung mit  $m$  Randecken. Dann ist  $\partial T$  glatt und besteht aus genau  $m$  Geradenstücken und  $m$  Kreisstücken, wobei jedes Geradenstück eine Randecke enthält.

**BEWEIS.**  $F$  sei ein konvexer Bereich. Dann gilt

- (1) Enthält  $\partial F$  eine Strecke  $s$ , so wird der isoperimetrische Quotient von  $F$  kleiner, wenn man an  $s$  ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis  $s$  und genügend kleiner Höhe  $\varepsilon_1$  ansetzt.
- (2) Enthält  $\partial F$  eine Ecke  $S$ , so wird der isoperimetrische Quotient von  $F$  kleiner, wenn man von  $F$  einen  $S$  enthaltenden Bereich abschneidet durch eine Gerade  $g$  mit genügend kleinem Abstand  $\varepsilon_2$  von  $S$  und parallel zu einer nicht extremalen Stützgeraden von  $F$  durch  $S$ .
- (3) Enthält  $\partial F$  eine Ecke  $S$ , die Endpunkt eines Kreisstücks und eines Geradenstücks in  $\partial F$  ist, so wird der isoperimetrische Quotient von  $F$  kleiner, wenn man von  $F$  einen  $S$  enthaltenden Bereich abschneidet durch eine Gerade  $g$  mit genügend kleinem Abstand  $\varepsilon_3$  von  $S$  und parallel zur Tangente an das Kreisstück in  $S$ .

Zum Beweis dieser Aussagen seien  $I(\varepsilon_1)$ ,  $I(\varepsilon_2)$  bzw.  $I(\varepsilon_3)$  die isoperimetrischen Quotienten der aus  $F$  entstehenden Bereiche. Man überlegt, daß es positive Konstanten  $a$  und  $b$  gibt so, daß

$$I'(\varepsilon_2) := \frac{(|\partial F| - a\varepsilon_2)^2}{|F| - b\varepsilon_2^2} \cong I(\varepsilon_2).$$

Weil die Ableitungen von  $I(\varepsilon_1)$ ,  $I'(\varepsilon_2)$  bzw.  $I(\varepsilon_3)$  für  $\varepsilon \dots = 0$  negativ sind, gilt die Behauptung.

Wegen (2) ist  $\partial T$  glatt.

$A$  und  $B$  seien zwei in  $\partial T$  aufeinanderfolgende Randecken.  $a$  und  $b$  seien die Stützgeraden an  $T$  in  $A$  bzw.  $B$ .  $\widehat{AB}$  sei das  $A$  und  $B$  verbindende Kurvenstück von  $\partial T$ , das für ein geeignetes  $i$  in  $\partial T \cap \partial T_i$  liegt. Nach (1) ist  $\widehat{AB}$  verschieden von der Strecke  $\overline{AB}$  und nach (2) ist  $\widehat{AB} \setminus a \setminus b \neq \emptyset$ .  $H$  bzw.  $H_a$  bzw.  $H_b$  seien die von den Geraden  $AB$  bzw.  $a$  bzw.  $b$  begrenzten abgeschlossenen Halbebenen, die  $\widehat{AB}$  enthalten. Nach Voraussetzung von Satz 2 ist  $\widehat{AB}$  von allen gleichlangen Kurven durch  $A$  und  $B$  und in  $H \cap H_a \cap H_b$  diejenige, die mit  $\widehat{AB}$  einen flächenmäßig größten Bereich einschließt.

Jeder Punkt  $X \in \widehat{AB} \setminus a \setminus b$  liegt in einem Bogen  $\widehat{X_1 X_2} \subset \widehat{AB} \setminus a \setminus b$  so, daß der Kreis um  $X_1$  mit Radius  $|\widehat{X_1 X_2}|$  ganz im Innern von  $H_a \cap H_b$  liegt. Wegen der isoperimetrischen Maximaleigenschaft des Kreises ist also  $\widehat{X_1 X_2}$  ein Kreisstück. Deshalb ist  $\widehat{AB} \setminus a \setminus b$  eine Vereinigung von Kreisstücken. Analog zu [1, S. 46] zeigt man, daß  $\widehat{AB} \setminus a \setminus b$  ein einziges Kreisstück ist: Zwei genügend kleine Kreisstücke  $\widehat{X_1 X_2}$  und  $\widehat{X_3 X_4} \subset \widehat{AB} \setminus a \setminus b$  haben dieselbe Krümmung; denn sonst wähle man Punkte  $Y_1, Y_2$  und  $Y_3, Y_4$  aus dem relativen Innern von  $\widehat{X_1 X_2}$  bzw.  $\widehat{X_3 X_4}$  mit

$|\overline{Y_1 Y_2}| = |\overline{Y_3 Y_4}|$ . Dann ersetze man  $\overline{Y_1 Y_2}$  durch  $\overline{Y_3 Y_4}$  und umgekehrt. Für die entstehende Kurve  $c \subset H \cap H_a \cap H_b$  ist  $|c| = |\overline{AB}|$ , und  $c$  schließt mit  $\overline{AB}$  denselben Flächeninhalt ein wie  $\overline{AB}$ . Weil aber  $c$  zwischen  $X_1$  und  $X_2$  kein Kreisstück ist, kann dieser Flächeninhalt nicht maximal sein.

Deshalb besteht  $\overline{AB}$  aus einem Kreisstück und höchstens zwei Geradenstücken, und  $A$  ist nicht Endpunkt von zwei Kreisstücken wegen (3). Daraus folgt die Behauptung.

4. Bei den optimalen  $n$ -Zerlegungen  $Z_2, \dots, Z_5$  und  $Z_7$  ist  $T$  die konvexe Hülle gewisser Kreise der dichtesten Kreispackung, die Kreise sind die Inkreise der  $T_i$ . Es liegt nahe, etwa auf Grund des Fejes Tóth'schen Beweises von (1), für alle genügend großen  $n$  solche Zerlegungen für optimal zu halten. Dem widerspricht Satz 3. Zur Präzisierung

DEFINITION. Gegeben sei eine solche dichteste Kreispackung  $\mathcal{K}$ , daß jeder ihrer Kreise 6 andere berührt. Eine  $n$ -Zerlegung heißt  $n$ -Ausschnitt aus der dichtesten Kreispackung, wenn gilt

- (1)  $T$  ist die konvexe Hülle von endlich vielen Kreisen von  $\mathcal{K}$ .
- (2) Jeder Kreis von  $\mathcal{K}$ , der ganz in  $T$  liegt, ist in genau einem  $T_i$  enthalten, und jedes  $T_i$  enthält genau einen Kreis aus  $\mathcal{K}$ .
- (3) Ist  $K_i$  der in  $T_i$  enthaltene Kreis von  $\mathcal{K}$ , so ist  $\bigcup_{i=1}^n K_i$  zusammenhängend.

$\{K_i\}_{i=1}^n$  heißt einem  $n$ -Ausschnitt zugeordnete Kreismenge oder ebenfalls ein  $n$ -Ausschnitt.

SATZ 3. Zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $n \geq N$  und eine  $n$ -Zerlegung, für die  $\frac{1}{n} \sum \frac{|L_i|^2}{|T_i|}$  kleiner ist als für jeden  $n$ -Ausschnitt aus der dichtesten Kreispackung.

BEWEIS. Zunächst wird die einem  $n$ -Ausschnitt zugeordnete Kreismenge untersucht und dazu folgende Bezeichnungen eingeführt ( $\mathfrak{M}$  sei Teilmenge von  $\mathcal{K}$ ):

- $\mathfrak{M}$  heißt zusammenhängend, wenn  $\bigcup_{K \in \mathfrak{M}} K$  zusammenhängend ist.
- $g$  sei eine Gerade und  $\mathfrak{M}$  die Menge aller Kreise, deren Mittelpunkt auf  $g$  liegt.  $\mathfrak{M}$  heißt Reihe, wenn es zusammenhängend ist. Es gibt genau 3 Geradenrichtungen zu Reihen. Ist  $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$ , so ist eine Reihe von  $\mathcal{A}$  der Durchschnitt von  $\mathcal{A}$  mit einer Reihe.
- $K \in \mathfrak{M}$  heißt Randkreis von  $\mathfrak{M}$ , wenn er höchstens 5 Kreise von  $\mathfrak{M}$  berührt. Zerfallen diese Kreise in 2 oder 3 zusammenhängende Mengen, so ist  $K$  ein doppelter bzw. dreifacher Randkreis und wird bei der Bestimmung der Anzahl der Randkreise von  $\mathfrak{M}$  entsprechend oft gezählt.
- $K \in \mathcal{K} \setminus \mathfrak{M}$  heißt Fehlkreis zu  $\mathfrak{M}$ , wenn er mindestens 3 Kreise von  $\mathfrak{M}$  berührt, die zusammenhängend sind.

Klar ist, daß Hinzufügen eines Fehlkreises zu  $\mathfrak{M}$  die Zahl der Randkreise von  $\mathfrak{M}$  nicht erhöht.

- $\mathfrak{M}$  heißt vollständig, wenn es zu  $\mathfrak{M}$  keinen Fehlkreis gibt.

HILFSSATZ. Ein vollständiger  $n$ -Ausschnitt aus  $n \geq 1 + 6k(2k+1)$  ( $k \geq 1$ ) Kreisen hat mindestens  $6 \cdot 2k$  Randkreise.

BEWEIS.  $\mathcal{K}_{2k}$  sei der vollständige Ausschnitt mit genau  $6 \cdot 2k$  Randkreisen, die genau 6 Reihen bilden und deren Mittelpunkte auf dem Rand eines regulären 6-Ecks liegen.  $\mathcal{K}_{2k}$  besteht aus  $1 + 6k(2k + 1)$  Kreisen. Der Hilfssatz besagt also: Hat ein vollständiger Ausschnitt  $\mathcal{A}$  mindestens so viele Kreise wie  $\mathcal{K}_{2k}$ , so hat er auch mindestens so viele Randkreise wie  $\mathcal{K}_{2k}$ . Nun beachte man

(i) Wie sich die Anzahl  $r$  der Randkreise von  $\mathcal{A}$  bestimmen läßt: Man zerlege  $\mathcal{A}$  in parallele Reihen, etwa in horizontale.  $\mathfrak{R}_1$  sei eine solche Reihe, und  $r_1$  sei die Anzahl der Randkreise des Ausschnitts  $\mathfrak{R}_1$ .  $\mathfrak{R}_2$  sei eine an  $\mathfrak{R}_1$  anschließende Reihe, die Anzahl ihrer Kreise ist  $\#(\mathfrak{R}_2) \in \{\#(\mathfrak{R}_1) - 1, \#(\mathfrak{R}_1), \#(\mathfrak{R}_1) + 1\}$ . Für die Anzahl  $r_2$  der Randkreise des Ausschnitts  $\mathfrak{R}_2 \cup \mathfrak{R}_1$  gilt dann  $r_2 = r_1 + 1$  bzw.  $r_1 + 2$  bzw.  $r_1 + 3$ .  $\mathfrak{R}_3$  sei eine an  $\mathfrak{R}_j$  anschließende Reihe ( $j = 1$  oder  $2$ ). Es ist

$$\#(\mathfrak{R}_3) \in \{\#(\mathfrak{R}_j) - 1, \#(\mathfrak{R}_j), \#(\mathfrak{R}_j) + 1\},$$

und für die Anzahl  $r_3$  der Randkreise des Ausschnitts  $\mathfrak{R}_3 \cup \mathfrak{R}_2 \cup \mathfrak{R}_1$  gilt  $r_3 = r_2 + 1$  bzw.  $r_2 + 2$  bzw.  $r_2 + 3$ . Man berücksichtigt so der Reihe nach alle Reihen von  $\mathcal{A}$  und erhält schließlich  $r$ .

(ii) Zerlegt man  $\mathcal{A}$  etwa in horizontale Reihen, und ist eine Reihe kürzer als die darunterliegende (darüberliegende), so sind auch alle nach oben (unten) folgenden Reihen kürzer als die jeweils darunterliegende (darüberliegende).

$\mathcal{A}$  bestehe aus  $n \geq 1 + 6k(2k + 1)$  ( $k \geq 1$ ) Kreisen.  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{K}_{2k}$  seien in horizontale Reihen zerlegt, und  $\mathfrak{R}_1$  sei die längste solche Reihe von  $\mathcal{A}$ . Weil jede Reihenrichtung als horizontal aufgefaßt werden kann, ist  $2k + 1 \leq \#(\mathfrak{R}_1)$ , denn sonst hätte  $\mathcal{A}$  höchstens  $2(2k)^2 < 1 + 6k(2k + 1)$  Kreise; o. B. d. A. ist  $\#(\mathfrak{R}_1) < 4k + 1$ , denn sonst wäre mit (i) von vornherein  $r \geq 6 \cdot 2k$ . Es gibt also in  $\mathcal{K}_{2k}$  zwei Reihen  $\mathfrak{R}'_1$  und  $\mathfrak{R}''_1$  mit  $\#(\mathfrak{R}'_1) = \#(\mathfrak{R}''_1) = \#(\mathfrak{R}_1)$ .

$r_1$  sei die Anzahl der Randkreise des Ausschnitts  $\mathfrak{R}'_1$  bzw.  $\mathfrak{R}_1$ . Zwischen  $\mathfrak{R}'_1$  und  $\mathfrak{R}''_1$  liegen  $2l - 1$  ( $l \geq 1$ ) Reihen von  $\mathcal{K}_{2k}$ . Der Ausschnitt, der durch Vereinigung von  $\mathfrak{R}'_1$ ,  $\mathfrak{R}''_1$  und allen Reihen von  $\mathcal{K}_{2k}$  dazwischen entsteht, hat dann nach (i)  $r_1 + 2 \cdot 2l$  Randkreise;  $\mathcal{K}_{2k}$  hat  $r_1 + 2 \cdot 2l + 4k - 2l = r_1 + 4k + 2l$  Randkreise.

Gibt es nun in  $\mathcal{A}$   $2l + 1$  Reihen der Länge  $\#(\mathfrak{R}_1)$ , so liegen diese nach (ii) o. B. d. A. unmittelbar übereinander, und ihre Vereinigung hat als Ausschnitt gerade  $r_1 + 2 \cdot 2l$  Randkreise. Hat  $\mathcal{A}$  genau  $2l + 1$  Reihen der Länge  $\#(\mathfrak{R}_1)$ , so ist man zusammen mit (ii) und (i) fertig. Sonst aber beachte man, daß jede weitere Reihe der Länge  $\#(\mathfrak{R}_1)$  die Anzahl der Randkreise um 2 erhöht, aber weniger Kreise verbraucht, als in 2 Reihen von  $\mathcal{K}_{2k}$  liegen.

Hat aber  $\mathcal{A} < 2l + 1$  Reihen der Länge  $\#(\mathfrak{R}_1)$ , etwa  $j$  Reihen, so entferne man aus  $\mathcal{K}_{2k}$  gemäß Fig. 2 bzw. Fig. 3  $(2l + 1 - j)2k$  Kreise. Man sieht sofort, daß  $\mathcal{A}$  aus mindestens  $(4k + 1) + (2l + 1 - j)$  Reihen besteht, d. h. die Anzahl der Randkreise von  $\mathcal{A}$  ist  $\geq r_1 + 2(j - 1) + ((4k + 1) + (2l + 1 - j) - j) = r_1 + 4k + 2l$ , w. z. z. w.

Zum Beweis von Satz 3 wähle man nun  $k \geq 2$  so groß, daß  $n := 1 + 6k(2k + 1) + 6(k + 1) \geq N$ .  $\mathcal{A}$  sei ein  $n$ -Ausschnitt, die Anzahl seiner Randkreise soll nach unten abgeschätzt werden.

Dazu zerlegt man  $\mathcal{A}$  etwa in horizontale Reihen;  $\mathfrak{R}$  sei die oberste horizontale Reihe von  $\mathcal{A}$  und die Kreise von  $\mathfrak{R}$  seien der Reihe nach numeriert. Gibt es einen Fehlkreis  $F$  zu  $\mathcal{A}$  so, daß  $\mathfrak{R} \cup \{F\}$  keine horizontale Reihe ist, so setze man den ersten Kreis  $K_1$  von  $\mathfrak{R}$  an die Stelle von  $F$ . Die so entstandene Kreismenge  $\mathcal{A}_1$  hat



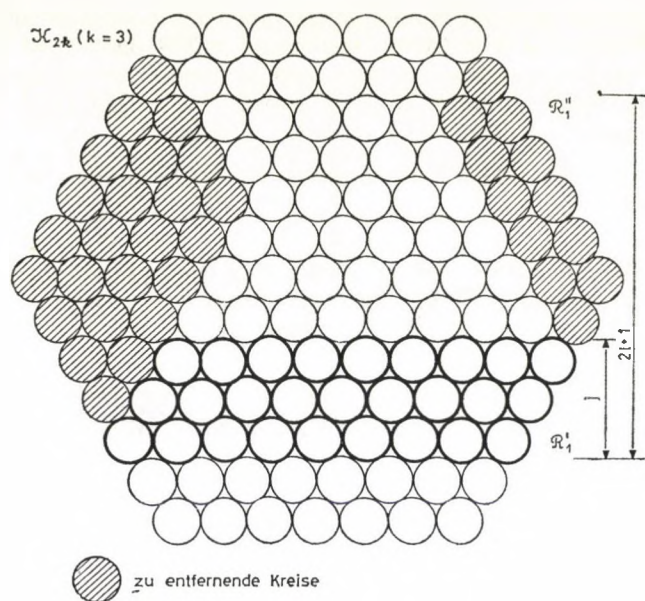


Fig. 2

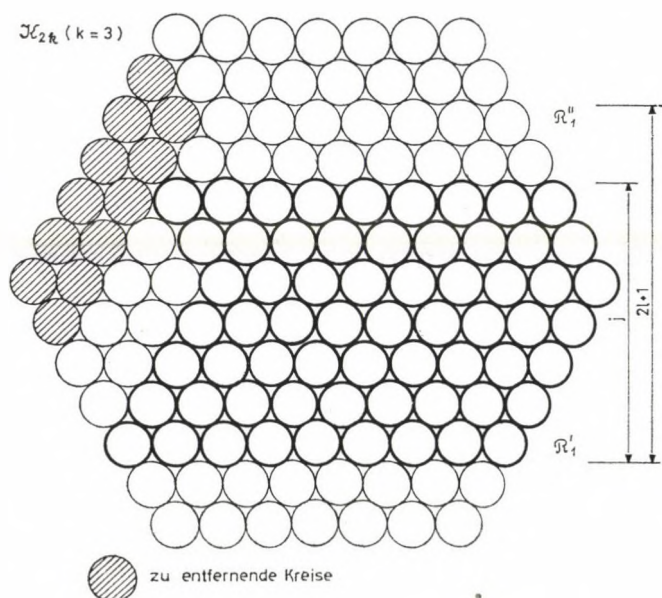


Fig. 3



nicht mehr Randkreise als  $\mathcal{A}$ . Ist  $\mathcal{R} \setminus \{K_1\} \neq \emptyset$  und gibt es einen Fehlkreis  $F_1$  zu  $\mathcal{A}_1$  so, daß  $(\mathcal{R} \setminus \{K_1\}) \cup \{F_1\}$  keine horizontale Reihe ist, so versetze man den zweiten Kreis aus  $\mathcal{R} \setminus \{K_1\}$ . Dies wiederhole man gegebenenfalls so lange, bis alle Kreise aus  $\mathcal{R}$  versetzt worden sind. Diese Operation wiederhole man so lange, wie es möglich ist.

Man erhält schließlich eine Kreismenge  $\mathcal{U}'$  mit einer obersten horizontalen Reihe  $\mathcal{R}'$  so, daß entweder  $\mathcal{U}'$  vollständig ist und dann sei  $\mathcal{B}' := \mathcal{U}'$ , oder daß für jeden Fehlkreis  $F'$  zu  $\mathcal{U}'$  auch  $\mathcal{R}' \cup \{F'\}$  eine horizontale Reihe ist und dann ist  $\mathcal{B}' := \mathcal{U}' \setminus \mathcal{R}'$  vollständig.  $\mathcal{R}'$  besteht aus Randkreisen von  $\mathcal{U}'$ .

$\mathcal{U}'$  hat nach Voraussetzung  $n > 1 + 6k(2k+1)$  Kreise. Hätte nun  $\mathcal{U}'$  weniger als  $6 \cdot 2(k-1)$  Randkreise, so hätte  $\mathcal{B}'$  mehr als  $1 + 6(k-1)(2(k-1)+1)$  Kreise, also nach dem Hilfssatz mindestens  $6 \cdot 2(k-1)$  Randkreis. Weil  $\mathcal{U}'$  höchstens mehr Randkreise als  $\mathcal{B}'$  hat, hat also  $\mathcal{U}'$  und damit  $\mathcal{A}$  mindestens  $6 \cdot 2(k-1)$  Randkreise.

Nun sei  $\mathcal{T} = \{T; T_1, \dots, T_n\}$  ein  $n$ -Ausschnitt und  $\mathcal{A}$  die zugeordnete Kreismenge. Enthält  $T_i$  keinen Randkreis von  $\mathcal{A}$ , so ist es ein reguläres 6-Eck. Enthält  $T_i$  den mittleren der einen Fehlkreis berührenden 3 Kreise von  $\mathcal{A}$ , so hat  $T_i$  eine Ecke im Mittelpunkt des Fehlkreises. Alle übrigen  $T_i$  enthalten eine Strecke von  $\partial T$  (vgl. Fig. 4). Die 3 Winkel  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  an einer inneren Ecke von  $\mathcal{T}$  sind also entweder kongruent, oder einer hat die Größe  $\frac{2\pi}{6}$ . In diesem Fall ist  $\sum_{i=1}^3 \tan \frac{\pi - \gamma_i}{2} \cong$

$\cong \tan \frac{\pi}{3} + 2 \tan \frac{\pi}{12} > 2$ . Deshalb gilt für einen  $n$ -Ausschnitt nach (3)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|L_i|^2}{|T_i|} \cong \frac{4}{n} \left( \pi + 2r + 3i \tan \frac{\pi}{6} \right),$$

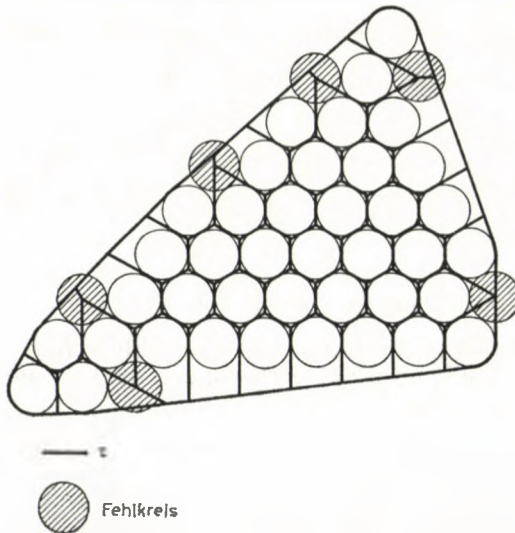


Fig. 4



Dann gilt mit  $\tilde{L}_i := \partial \tilde{T}_i$  nach (2)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\tilde{L}_i|^2}{|\tilde{T}_i|} = \frac{1}{n} \left( 6(k-1)C_1 + 6C_2 + 4 \cdot 6(1 + 6(2k-1)k) \tan \frac{\pi}{6} \right).$$

Wegen (4) ist also  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|L_i|^2}{|T_i|} > \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\tilde{L}_i|^2}{|\tilde{T}_i|}$  für genügend große  $n$  richtig, wenn gilt

$$(5) \quad C_1 < 16 + 48 \tan \frac{\pi}{6} = 43,71 \dots$$

Es bleibt also  $C_1$  zu bestimmen.

Dazu betrachte man Fig. 5. Zu einem Winkel  $\alpha$  sei  $\alpha' := \pi - \alpha$ . Es sei  $\beta > \frac{2\pi}{3}$ ,

d. h.  $\beta' < \frac{\pi}{3}$ .  $\gamma'$  und  $\mu'$  sind lineare Funktionen von  $\beta'$ .  $\varrho$ ,  $r$ ,  $R$  seien die Radien der Inkreise von  $T^1$ ,  $T^2$ ,  $T^3$ .  $\varrho$  und  $r$  sind Funktionen von  $\beta'$ . Für  $\delta'$  gilt

$$\tan \frac{\delta'}{2} = \left( \tan \frac{\beta'}{2} + \tan \frac{\pi}{6} \right) \frac{\tan \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\beta'}{2} \right) + \tan \left( \frac{\pi}{12} + \frac{\beta'}{2} \right)}{\tan \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\beta'}{2} \right) + \tan \frac{\pi}{6}} - \tan \frac{\beta'}{2}.$$

Der dabei auftretende Bruch ist für  $\beta' \cong \frac{\pi}{6}$  monoton wachsend und  $\cong 1$ , also ist dort  $\tan \frac{\delta'}{2}$  und also  $\delta'$  in  $\beta'$  monoton wachsend.  $\varepsilon'$ ,  $\nu'$ ,  $\psi'$  sind lineare Funktionen von  $\beta'$  und  $\delta'$ .

Nun ist  $T^3$  genau dann Formfigur, wenn für  $R$  gilt

$$R \tan \frac{\nu'}{2} = \varrho \tan \frac{\mu'}{2}$$

und

$$R \left( \tan \frac{\nu'}{2} + \tan \frac{\psi'}{2} \right) = r \left( \tan \frac{\delta'}{2} + \tan \frac{\varepsilon'}{2} \right),$$

oder wenn

$$(6) \quad \frac{\tan \left( \frac{5}{12} \pi - \frac{\beta'}{2} - \frac{\delta'}{2} \right)}{\tan \left( \frac{5}{12} \pi - \frac{\beta'}{2} - \frac{\delta'}{2} \right) + \tan \left( \frac{\beta'}{2} + \frac{\delta'}{2} - \frac{\pi}{6} \right)} - \frac{\tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\beta'}{2}}{\tan \frac{\pi}{6} + \tan \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\beta'}{2} \right)} \cdot \frac{\tan \left( \frac{\pi}{12} + \frac{\beta'}{2} \right)}{\tan \frac{\delta'}{2} + \tan \left( \frac{5}{6} \pi - \beta' - \delta' \right)} = 0.$$

Weil die linke Seite von (6) im Intervall  $\frac{4\pi}{17} \leq \beta' \leq \frac{\pi}{4}$  das Vorzeichen wechselt, ist (6) richtig für ein gewisses  $\beta'_0$  aus diesem Intervall, und hierfür ist  $T^3$  Formfigur. Dann gilt nach (2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} C_1 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \frac{|L^i|^2}{|T^i|} = 2 \tan \frac{\pi}{6} + 2 \tan \frac{\beta'}{2} + 2 \tan \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\beta'}{2} \right) + 2 \tan \frac{\delta'}{2} + \\ &+ 2 \tan \left( \frac{\pi}{12} + \frac{\beta'}{2} \right) + 2 \tan \left( \frac{5}{12} \pi - \frac{\beta'}{2} - \frac{\delta'}{2} \right) + \tan \left( \frac{5}{6} \pi - \beta' - \delta' \right) + \\ &+ 2 \tan \left( \frac{\beta'}{2} + \frac{\delta'}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + 2, \quad \text{für } \beta' = \beta'_0, \quad \text{und } \delta' = \delta'(\beta'_0) =: \delta'_0. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$(7) \quad \frac{4}{17} \pi \leq \beta'_0 \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \frac{4}{11} \pi \leq \delta'_0 \leq \frac{2}{5} \pi.$$

Durch Ableiten sieht man, daß in diesen Intervallen gilt:  $2 \tan \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\beta'}{2} \right) + 2 \tan \left( \frac{\pi}{12} + \frac{\beta'}{2} \right)$  ist in  $\beta'$  monoton fallend,  $\tan \left( \frac{5}{6} \pi - \beta' - \delta' \right) + 2 \tan \left( \frac{\beta'}{2} + \frac{\delta'}{2} - \frac{\pi}{6} \right)$  ist jeweils in  $\beta'$  und  $\delta'$  monoton fallend, und

$$2 \tan \frac{\beta'}{2} + 2 \tan \frac{\delta'}{2} + 2 \tan \left( \frac{5}{12} \pi - \frac{\beta'}{2} - \frac{\delta'}{2} \right)$$

ist jeweils in  $\beta'$  und  $\delta'$  monoton wachsend. Diese Funktionen sind also nach oben abschätzbar durch ihre Werte an den unteren bzw. oberen Intervallgrenzen gemäß (7). Damit ist  $C_1 \leq 43, 57, \dots$ , so daß (5) gilt.

5. Es seien  $n$  Einheitskreise in ein konvexes Gebiet  $T$  eingelagert. Analog zu [5, S. 71] gilt für die Dichte  $D(n) := \frac{n\pi}{|T|}$  die Ungleichung  $D(n) \leq \frac{4\pi}{I(n)}$ . Wegen Satz 1 gelten die scharfen Schranken

$n$	2	3	4	5	7
$D(n)$	0,879 ...	0,866 ...	0,860 ...	0,856 ...	0,861 ...

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BESICOVITCH, A. S., Variants of a classical isoperimetric problem, *Quart. J. Math., Oxford Ser.* (2) **3** (1952), 42—49. *MR* **13**—768.
- [2] BLIND, G., Zerlegung eines konvexen Gebiets in konvexe Gebiete, *Arch. Math. (Basel)* **41** (1983), 276—279. *MR* **84k**: 52002.
- [3] BLIND, G. und BUCHTA, C., Zerlegung eines Eibereichs, *Arch. Math. (Basel)* **44** (1985), 89—94.
- [4] BUCHTA, C., Zerlegung eines konvexen Gebiets in konvexe Gebiete, *Anz. Österreich Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl.*, 1983.
- [5] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1953. *MR* **15**—248.
- [6] FEJES TÓTH, L., *Reguläre Figuren*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965. *MR* **30** # 3408.

(Eingegangen am 26. Juni 1984)

MATHEMATISCHES INSTITUT B  
UNIVERSITÄT STUTTGART  
PFAFFENWALDRING 57  
D—7000 STUTTGART 80  
FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY





# AFFINE-INVARIANT APPROXIMATION BY CONVEX POLYTOPES

ROLF SCHNEIDER

*Dedicated to László Fejes Tóth on his seventieth birthday*

For the optimal approximation of convex curves and surfaces by polygons and polyhedra one has, in some cases, precise asymptotic results, the first of which go back to L. Fejes Tóth. For instance, if  $C$  is a convex body in the plane with a sufficiently smooth boundary, if  $\mathcal{P}_n^i$  denotes the set of convex polygons with at most  $n$  vertices contained in  $C$ , and if  $\delta^H$  is the Hausdorff metric, then

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \delta^H(C, \mathcal{P}_n^i) = \frac{1}{8} \left( \int_{\partial C} |k(s)|^{1/2} ds \right)^2.$$

Here  $k$  is the curvature of the boundary curve  $\partial C$ , considered as a function of the arc length  $s$ . Similarly, if  $\delta^S$  denotes the symmetric difference metric, then

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \delta^S(C, \mathcal{P}_n^i) = \frac{1}{12} \left( \int_{\partial C} |k(s)|^{1/3} ds \right)^3.$$

A more general version of (1) was proved by Fejes Tóth [3]. In that paper (footnote 4) and also in his book [4], p. 43, the author mentioned formula (2) without proof. One can find detailed proofs of these and similar results in the work of McClure and Vitale [6]. A comprehensive survey over the various kinds of approximation problems for convex bodies was recently given by Gruber [5].

Comparing the different measures of deviation used in (1) and (2), one sees that  $\delta^S$  is invariant under volume preserving affine maps, while  $\delta^H$  is only invariant under rigid motions. On the other hand, results of type (1) are stronger in so far as  $\delta^H(C, P)$  is a measure for the maximum of the local deviation of  $C$  and  $P$ . In the present paper, we propose a measure of deviation for convex bodies and inscribed polytopes which combines both aspects, equiaffine invariance and local character. If  $C$  is a plane convex body and if  $P$  is a convex polygon with  $n$  vertices inscribed to  $C$ , then the closure of  $C \setminus P$  consists of  $n$  regions each bounded by an edge of  $P$  and an arc of  $\partial C$ . The sum of their areas is  $\delta^S(C, P)$ . The maximum of these areas will be denoted by  $\Delta(C, P)$ . If one knows (as, for smooth  $C$ , follows from the result below) that for every  $n \geq 3$  there is a polygon  $P_n$  with  $n$  vertices inscribed to  $C$  such that

$$\Delta(C, P_n) \leq \frac{c}{n^3},$$

where  $c$  is a constant depending only on  $C$ , then this implies

$$\delta^S(C, P_n) \leq \frac{c}{n^2},$$

but one cannot conclude in the reverse direction. It is in this sense that results on  $\Delta$  are stronger than those involving  $\delta^S$ .

Now let  $C$  be a convex body in  $d$ -dimensional Euclidean space  $E^d$  ( $d \geq 2$ ) and let  $P$  be a convex polytope contained in  $C$  (not necessarily inscribed). For each facet  $F_i$  of  $P$ , let  $H_i^+$  denote the closed halfspace bounded by the affine hull of  $F_i$  and not containing  $P$ . Then we define

$$\Delta(C, P) := \max_i V(C \cap H_i^+),$$

where  $V$  is the volume in  $E^d$ . For  $\varepsilon > 0$ , let  $n(C, \varepsilon)$  be the smallest number  $n$  for which there exists a convex polytope  $P \subset C$  with  $n$  facets such that  $\Delta(C, P) \leq \varepsilon$ .

**THEOREM.** *If  $C \subset E^d$  is a convex body with a regular boundary hypersurface  $\partial C$  of class  $C^3$  and with positive principal curvatures, then*

$$(3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} n(C, \varepsilon) \varepsilon^{(d-1)/(d+1)} = \left( \frac{\kappa_{d-1}}{d+1} \right)^{(d-1)/(d+1)} \frac{\vartheta_{d-1}}{\kappa_{d-1}} \int_{\partial C} K^{1/(d+1)} dF.$$

Here,  $\kappa_{d-1}$  is the volume of the unit ball in  $E^{d-1}$ ,  $\vartheta_{d-1}$  is the density of the thinnest covering of  $E^{d-1}$  by unit balls,  $K$  is the Gauss—Kronecker curvature (product of principal curvatures) of  $\partial C$ , and  $dF$  is the Euclidean surface area element.

The integral

$$A(\partial C) = \int_{\partial C} K^{1/(d+1)} dF$$

is known as the affine surface area of  $\partial C$ . The isoperimetric inequality of equiaffine differential geometry, due to Blaschke [1] for  $d \leq 3$  and to Deicke [2] for general  $d$ , implies that for all  $C$  of given volume the limit  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} n(C, \varepsilon) \varepsilon^{(d-1)/(d+1)}$  is maximal precisely when  $C$  is an ellipsoid. Thus, in sense of the deviation measure  $\Delta$ , ellipsoids are asymptotically approximated worst.

If, for given  $C$ , we denote by  $\mathcal{P}_{(n)}^i$  the set of convex polytopes with at most  $n$  facets contained in  $C$ , and if we write

$$\Delta(C, \mathcal{P}_{(n)}^i) := \inf \{ \Delta(C, P) : P \in \mathcal{P}_{(n)}^i \},$$

then (3) is easily seen to be equivalent to

$$(4) \quad \Delta(C, \mathcal{P}_{(n)}^i) \sim \frac{\kappa_{d-1}}{d+1} \left( \frac{\vartheta_{d-1}}{\kappa_{d-1}} \int_{\partial C} K^{1/(d+1)} dF \right)^{(d+1)/(d-1)} \frac{1}{n^{(d+1)/(d-1)}} \quad \text{for } n \rightarrow \infty.$$

This relation is formally similar to the relation

$$(5) \quad \delta^H(C, \mathcal{P}_n^i) \sim \frac{1}{2} \left( \frac{\vartheta_{d-1}}{\kappa_{d-1}} \int_{\partial C} K^{1/2} dF \right)^{2/(d-1)} \frac{1}{n^{2/(d-1)}} \quad \text{for } n \rightarrow \infty,$$

where  $\mathcal{P}_n^i$  denotes the set of convex polytopes with at most  $n$  vertices contained in  $C$ . This was discovered by Fejes Tóth [3], [4], p. 149, for  $d=3$ , and it was proved for general  $d \geq 2$  by Schneider [7].

For any constant

$$c > \frac{\kappa_{d-1}}{d+1} \left( \frac{\partial_{d-1}}{\kappa_{d-1}} \int_{\partial C} K^{1/(d+1)} dF \right)^{(d+1)/(d-1)},$$

relation (4) implies that

$$\delta^S(C, \mathcal{P}_n^i) \leq \frac{c}{n^{2/(d-1)}}$$

for large  $n$ . A precise asymptotic relation for  $\delta^S(C, \mathcal{P}_n^i)$ , however, remains unknown, as is the case for  $\delta^S(C, \mathcal{P}_n^i)$ . For  $d=3$ , one may compare the discussion in Fejes Tóth [4], pp. 151—152.

The subsequent proof of our theorem utilizes an idea which is similar to the one used for the proof of (5) in [7]. Namely, we consider optimal coverings of  $\partial C$  by geodesic balls with respect to the Riemannian metric induced by the first fundamental form of equiaffine differential geometry (for the latter, see Blaschke [1]). For  $d=2$ , a corresponding principle was mentioned by Fejes Tóth [4], p. 43. In [7], the second fundamental form of Euclidean differential geometry was used as a Riemannian metric. Some of the estimates can be taken over from [7], others have to be proved in addition. First, we have to explain some of the terminology and of the basic inequalities of [7].

We assume that  $C$  satisfies the assumptions of the theorem and we denote the boundary hypersurface  $\partial C$  by  $F$ . On  $F$ , we introduce the Riemannian metric of equiaffine differential geometry. The corresponding geodesic distance of the points  $x, y \in F$  (that is, the infimum of the affine lengths of all smooth curves in  $F$  joining  $x$  and  $y$ ) will be denoted by  $\delta_A(x, y)$ . The set

$$B(p, r) := \{y \in F: \delta_A(y, p) \leq r\}$$

is the  $A$ -geodesic ball with centre  $p \in F$  and radius  $r > 0$ .

Let  $p \in F$ , let  $T_p$  be the tangent hyperplane to  $F$  at  $p$ ,  $H$  a parallel hyperplane at distance  $h > 0$  from  $T_p$  and cutting  $F$ , and  $H^+$  the closed halfspace bounded by  $H$  and containing  $p$ . We write

$$C(p, h) := C \cap H^+, \quad F(p, h) := F \cap H^+$$

and call the latter set the cap of height  $h$  with centre  $p$ . For the following, we fix a number  $0 < \alpha < \pi/2$ , and we say that the cap  $F(p, h)$  is flat if the exterior normals at any two points of  $F(p, h)$  make an angle not exceeding  $\alpha$ . There exists a number  $h_0 > 0$  such that each  $p \in F$  is the centre of a flat cap  $F(p, h_0)$ . Now let  $F(p, h)$  be a flat cap, and denote by  $D(p, h)$  the image of  $F(p, h)$  under orthogonal projection onto  $T_p$ . Let  $e_p$  be the unit vector orthogonal to  $T_p$  and pointing into the interior of  $F$ . There is a function  $z^p$  of class  $C^3$  on  $D(p, h)$  such that  $x + z^p(x)e_p \in F$  for  $x \in D(p, h)$ . If  $x + z^p(x)e_p = y$ , we write  $x = y^p$ . For  $x \in D(p, h)$ , we denote by  $x_1, \dots, x_{d-1}$  the coordinates of  $x$  with respect to some fixed cartesian coordinate system in  $T_p$  with origin  $p$ , and we write

$$z_i^p = \frac{\partial z^p}{\partial x_i}, \quad z_{ij}^p = \frac{\partial^2 z^p}{\partial x_i \partial x_j}, \quad z_{ijk}^p = \frac{\partial^3 z^p}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}.$$

From [7] we know that there exist constants  $0 < h_1 \leq h_0$  and  $c_0$ , independent of  $p$ , such that

$$(6) \quad |z_i^p(x)| \leq c_0, \quad |z_{ij}^p(x)| \leq c_0, \quad |z_{ijk}^p(x)| \leq c_0$$

for all  $i, j, k$  and all  $x \in D(p, h)$ , provided that  $h \leq h_1$ .

The standard norm on  $E^d$  will be denoted by  $\|\cdot\|$ . For given  $p \in F$ , we interpret  $T_p$  as a vector space with origin  $p$  and we introduce a scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  on  $T_p$  by means of

$$\langle v, w \rangle_p := \sum z_{ij}^p(p) v_i w_j \quad \text{for } v, w \in T_p$$

(all summations from 1 to  $d-1$ , unless otherwise stated). Then we define two norms on  $T_p$  by

$$\|v\|_p := \sqrt{\langle v, v \rangle_p}$$

and

$$\|v\|_p^A := Q_p \|v\|_p$$

with

$$Q_p := (\det Z^p(p))^{(-1)/(2(d-1))}$$

for  $v \in T_p$ , where  $Z^p$  is the (positive definite) matrix  $(z_{ij}^p)^{d-1}_{i,j=1}$ . Note that  $\det Z^p(p)$  is the Gauss—Kronecker curvature of  $F$  at  $p$ , hence  $Q_p$  lies between two positive constants independent of  $p$ .

For a given flat cap  $F(p, h)$ , and with the terminology introduced above, we use the coordinates  $x_1, \dots, x_{d-1}$  of  $x \in D(p, h)$  as local parameters of  $F$  at  $x + z^p(x)e_p$ . The coefficients of the first fundamental form of equiaffine differential geometry at  $x + z^p(x)e_p$  with respect to these parameters are denoted by  $g_{ij}(x)$ , and we write  $(g_{ij}(x))^{d-1}_{i,j=1} = G(x)$ . Let  $\zeta_{\min}^p(x)$  be the smallest and  $\zeta_{\max}^p(x)$  the largest relative eigenvalue of the matrix  $G(x)$  with respect to the matrix  $G(p)$ . Finally,  $V(p, h)$  is the volume of  $C(p, h)$ .

LEMMA 1. For any given  $\lambda$  with  $0 < \lambda < 1$ , there exists a number  $h_\lambda$  with  $0 < h_\lambda \leq h_1$  such that, for all  $p \in F$ , all  $h$  with  $0 < h \leq h_\lambda$  and all  $x, y \in F(p, h)$ ,

$$(7) \quad \lambda \leq \zeta_{\min}^p(x^p) \leq \zeta_{\max}^p(x^p) \leq \lambda^{-1},$$

$$(8) \quad \sqrt{\lambda} \leq \frac{\delta_A(x, y)}{\|x^p - y^p\|_p^A} \leq \sqrt{\lambda^{-1}},$$

$$(9) \quad B(p, \lambda Q_p \sqrt{2h}) \subset F(p, h) \subset B(p, \lambda^{-1} Q_p \sqrt{2h}),$$

$$(10) \quad \lambda \leq \frac{d+1}{\kappa_{d-1}} \frac{V(p, h)}{(Q_p \sqrt{2h})^{d+1}} \leq \lambda^{-1}.$$

PROOF. Let  $0 < \lambda < 1$  and  $p \in F$  be given. For the cap  $F(p, h_1)$ , let  $D = D(p, h_1)$  and  $z^p$  be defined as above. We have (see Blaschke [1], § 65)

$$G(x) = (\det Z^p(x))^{(-1)/(d+1)} Z^p(x) \quad \text{for } x \in D.$$



In the following,  $c_1, c_2, \dots$  denote positive constants which depend only on  $C$  and possibly on  $\lambda$ , but not on  $p$ . As in [7], we define  $H(x) = (h_{ij}(x))_{i,j=1}^{d-1}$  by

$$z_{lj}^p(x) = z_{lj}^p(p) + h_{lj}(x) \quad \text{for } x \in D$$

and then have

$$(11) \quad |h_{ij}(x)| \leq c_1 \|x - p\| \quad \text{for } x \in D.$$

Further, we define  $b_{ij}$  by

$$g_{ij}(x) = g_{ij}(p) + b_{ij}(x) \quad \text{for } x \in D.$$

From (6) and (11) we easily get

$$(12) \quad |(\det Z^p(x))^{1/(d+1)} - (\det Z^p(p))^{1/(d+1)}| \leq c_2 \|x - p\| \quad \text{for } x \in D.$$

Since  $\det Z^p(p) \geq c_3$ , we deduce

$$(13) \quad (\det Z^p(x))^{1/(d+1)} \geq c_4$$

for all  $x \in D$  with  $\|x - p\| \leq r_0$ , if  $r_0 > 0$  is chosen sufficiently small (this choice is possible independent of  $p$ ). Using (6), (11), (12), (13), we get

$$\begin{aligned} |b_{ij}(x)| &= \left| z_{lj}^p(p) \left( \frac{1}{(\det Z^p(x))^{1/(d+1)}} - \frac{1}{(\det Z^p(p))^{1/(d+1)}} \right) + \frac{h_{lj}(x)}{(\det Z^p(x))^{1/(d+1)}} \right| \leq \\ &\leq |z_{lj}^p(p)| \frac{c_2 \|x - p\|}{c_4^2} + \frac{c_1 \|x - p\|}{c_4} \leq c_5 \|x - p\| \end{aligned}$$

for  $x \in D$  with  $\|x - p\| \leq r_0$ . Using this estimate, we can argue in the same way as in [7], p. 293—294 (with  $z_{ij}(0)$ ,  $k_{ij}(x)$  replaced by  $g_{ij}(p)$ ,  $b_{ij}(x)$ , respectively) and conclude that there exists a constant  $0 < r_1 \leq r_0$ , independent of  $p$ , such that (7) holds whenever  $x^p \in D$  and  $\|x^p - p\| \leq r_1$ . In particular, we have

$$(14) \quad \lambda \sum g_{ij}(p) v_i v_j \leq \sum g_{ij}(x) v_i v_j \leq \lambda^{-1} \sum g_{ij}(p) v_i v_j$$

for  $x \in D$  with  $\|x - p\| \leq r_1$  and arbitrary real  $v_1, \dots, v_{d-1}$ . Proceeding further as in [7], p. 294, we find a positive constant  $r_2$  with

$$(15) \quad 2\lambda z^p(x) \leq \|x\|_p^2 \leq 2\lambda^{-1} z^p(x)$$

for  $x \in D$  with  $\|x - p\| \leq r_2$ . Then we can choose a positive constant  $c_6 \leq h_1$  such that for all  $p \in F$  and  $x \in T_p$  with  $z^p(x) \leq c_6$  we have  $\|x - p\| \leq \min \{r_1, r_2\}$ . Next, we can choose a positive constant  $h_2 < c_6$  such that

$$(16) \quad \sqrt{\lambda} \|x^p - y^p\|_p^4 \leq \delta_A(x, y) \leq \sqrt{\lambda^{-1}} \|x^p - y^p\|_p^4$$

for  $p \in F$  and arbitrary points  $x, y \in F(p, h_2)$ . The proof is verbally the same as the corresponding one in [7], p. 295—296, except that (14) replaces no. (10) in [7], the norm  $\|\cdot\|_p^4$  replaces  $\|\cdot\|_p$ , and one has to use that  $Q_p$  lies between two positive bounds independent of  $p$ . Thus, (8) holds if  $h \leq h_2$ .

Now we prove (9) for  $p \in F$  and  $h \leq h_2$ . Let  $y \in B(p, \lambda Q_p \sqrt{2h})$ , hence  $\delta_A(y, p) \leq \lambda Q_p \sqrt{2h}$ . Using (15) and (8), we get

$$2\lambda z^p(y^p) \leq \|y^p\|_p^2 = Q_p^{-2} (\|y^p\|_p^4)^2 \leq \lambda^{-1} Q_p^{-2} \delta_A(y, p)^2 \leq 2\lambda h,$$

hence  $z^p(y^p) \leq h$  and thus  $y \in F(p, h)$ . On the other hand, suppose that  $y \in F(p, h)$ , hence  $z^p(y^p) \leq h$ . Again using (8) and (15), we get

$$\begin{aligned}\delta_A(y, p) &\leq \sqrt{\lambda^{-1}} \|y^p\|_p^A = \sqrt{\lambda^{-1}} Q_p \|y^p\|_p \leq \sqrt{\lambda^{-1}} Q_p \sqrt{\lambda^{-1}} \sqrt{2z^p(y^p)} \leq \\ &\leq \lambda^{-1} Q_p \sqrt{2h},\end{aligned}$$

thus  $y \in B(p, \lambda^{-1} Q_p \sqrt{2h})$ , which completes the proof of (9).

In [8], p. 72, it was proved that

$$V(p, h) = \frac{\kappa_{d-1}}{d+1} K^{-1/2} (2h)^{(d+1)/2} (1 + \varphi_1(h)),$$

where  $K = Q_p^{-2(d+1)}$  is the Gauss—Kronecker curvature of  $F$  at  $p$  and  $\varphi_1$  is a function satisfying  $|\varphi_1(h)| \leq c_7 \sqrt{h}$  with a constant  $c_7$  independent of  $p$ . Hence, (10) holds if  $0 < h_\lambda \leq h_2$  is chosen sufficiently small. This completes the proof of Lemma 1.

For  $r > 0$ , we define  $q(F, r)$  as the smallest number  $q$  such that  $F$  can be covered by  $q$   $A$ -geodesic balls of radius  $r$ .

LEMMA 2. For any given  $\lambda$  with  $0 < \lambda < 1$ , there exists a number  $\varepsilon_\lambda > 0$  such that

$$q\left(F, \left(\lambda^{-(d+2)} \frac{d+1}{\kappa_{d-1}} \varepsilon\right)^{1/(d+1)}\right) \leq n(C, \varepsilon) \leq q\left(F, \left(\lambda^{d+2} \frac{d+1}{\kappa_{d-1}} \varepsilon\right)^{1/(d+1)}\right)$$

for  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_\lambda$ .

PROOF. Let  $0 < \lambda < 1$  be given and take  $h_\lambda$  according to Lemma 1. We can choose  $\varepsilon_\lambda > 0$  with

$$(17) \quad \varepsilon_\lambda \leq \lambda^{-1} \frac{\kappa_{d-1}}{d+1} (Q_p \sqrt{2h_\lambda})^{d+1}$$

and such that  $V(p, h) \leq \varepsilon_\lambda$  implies  $h \leq h_\lambda$ . Let  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_\lambda$  be given. There exists a polytope  $P \subset C$  with  $n = n(C, \varepsilon)$  facets  $F_1, \dots, F_n$  satisfying  $\Delta(C, P) \leq \varepsilon$ . For  $i \in \{1, \dots, n\}$ , let  $p_i \in F$  be the point where the exterior unit normal vector to  $F$  is equal to the exterior unit normal to  $P$  at  $F_i$ , and let  $h_i$  be the distance of  $p_i$  from the affine hull of  $F_i$ . By the definition of  $\Delta(C, P)$ , we have  $V(p_i, h_i) \leq \varepsilon$ , hence (10) yields

$$Q_{p_i} \sqrt{2h_i} \leq \left(\lambda^{-1} \frac{d+1}{\kappa_{d-1}} \varepsilon\right)^{1/(d+1)},$$

and then (9) implies

$$F(p_i, h_i) \subset B(p_i, \lambda^{-1} Q_{p_i} \sqrt{2h_i}) \subset B(p_i, r_\varepsilon)$$

with

$$r_\varepsilon = \left(\lambda^{-(d+2)} \frac{d+1}{\kappa_{d-1}} \varepsilon\right)^{1/(d+1)}.$$

Since  $P \subset C$ , the system  $\{F(p_i, h_i)\}_{i=1}^n$  clearly covers  $F$ , hence  $\{B(p_i, r_\varepsilon)\}_{i=1}^n$  covers  $F$ , which shows that  $q(F, r_\varepsilon) \leq n(C, \varepsilon)$ .

On the other hand, let  $\{B(p_i, s_\varepsilon)\}_{i=1}^q$  be a covering of  $F$  by  $q=q(F, s_\varepsilon)$   $A$ -geodesic balls of radius

$$s_\varepsilon = \left( \lambda^{d+2} \frac{d+1}{\kappa_{d-1}} \varepsilon \right)^{1/(d+1)}.$$

Assumption (17) implies  $s_\varepsilon \leq \lambda Q_p \sqrt{2h_\lambda}$  for  $p \in F$ , hence  $h_i$  defined by

$$\lambda Q_{p_i} \sqrt{2h_i} = s_\varepsilon$$

satisfies  $h_i \leq h_\lambda$ , and (9) yields

$$B(p_i, s_\varepsilon) \subset F(p_i, h_i).$$

Let  $H_i^-$  denote the closed halfspace meeting  $F$  and not containing  $p_i$  whose bounding hyperplane is parallel to  $T_{p_i}$  and at distance  $h_i$  from it. Then

$$P := \bigcap_{i=1}^q H_i^-$$

is a convex polytope (not empty, without loss of generality) which must be contained in  $C$  since  $\{F(p_i, h_i)\}_{i=1}^q$  is a covering of  $F$ . By (10) we have

$$V(p_i, h_i) \leq \lambda^{-1} \frac{\kappa_{d-1}}{d+1} (Q_{p_i} \sqrt{2h_i})^{d+1} = \varepsilon,$$

hence  $\Delta(C, P) \leq \varepsilon$ . This shows that  $n(C, \varepsilon) \leq q(F, s_\varepsilon)$  and completes the proof of Lemma 2.

LEMMA 3.

$$\lim_{r \rightarrow 0+} q(F, r) \kappa_{d-1} r^{d-1} = \vartheta_{d-1} A(F).$$

Here  $A(F)$  denotes the affine surface area of  $F$ . Lemma 3 is proved exactly as Hilfssatz 4 in [7]; one has to replace the II-geodesic distance of [7] by the  $A$ -geodesic distance and the scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  in  $T_p$  by  $Q_p^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ . Clearly, the inequalities (7) and (8) of Lemma 1 have to replace the corresponding ones of Hilfssatz 1 in [7].

The proof of the theorem now follows from Lemmas 2 and 3. For positive  $\lambda < 1$  we have

$$\begin{aligned} \kappa_{d-1}^{-1} \vartheta_{d-1} A(F) &= \lim_{r \rightarrow 0+} q(F, r) r^{d-1} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0+} n(C, \varepsilon) \left( \lambda^{-(d+2)} \frac{d+1}{\kappa_{d-1}} \varepsilon \right)^{(d-1)/(d+1)} \leq \\ &\leq \lambda^{-2(d+2)(d-1)/(d+1)} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} n(C, \varepsilon) \left( \lambda^{d+2} \frac{d+1}{\kappa_{d-1}} \varepsilon \right)^{(d-1)/(d+1)} \leq \\ &\leq \lambda^{-2(d+2)(d-1)/(d+1)} \lim_{r \rightarrow 0+} q(F, r) r^{d-1} = \\ &= \lambda^{-2(d+2)(d-1)/(d+1)} \kappa_{d-1}^{-1} \vartheta_{d-1} A(F). \end{aligned}$$

If  $\lambda$  tends to 1, we get the assertion of the theorem.

## REFERENCES

- [1] BLASCHKE, W., *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Band II, Springer-Verlag, Berlin, 1923.
- [2] DEICKE, A., Über die Finsler-Räume mit  $A_1=0$ , *Arch. Math.* **4** (1953), 45—51. *MR* **14**—1017.
- [3] FEJES TÓTH, L., Approximation by polygons and polyhedra, *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 431—438. *MR* **9**—525.
- [4] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953. *MR* **15**—248.
- [5] GRUBER, P. M., Approximation of convex bodies, *Convexity and its applications*, ed. by P. M. Gruber and J. M. Wills, Birkhäuser Verlag, Basel—Boston—Stuttgart, 1983, 131—162. *MR* **85d**: 52001.
- [6] MCCLURE, D. E. and VITALE, R. A., Polygonal approximation of plane convex bodies, *J. Math. Anal. Appl.* **51** (1975), 326—358. *MR* **52** # 6573.
- [7] SCHNEIDER, R., Zur optimalen Approximation konvexer Hyperflächen durch Polyeder, *Math. Ann.* **256** (1981), 289—301. *MR* **82m**: 52003.
- [8] SCHNEIDER, R. and WIEACKER, J. A., Random polytopes in a convex body, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **52** (1980), 69—73. *MR* **81f**: 52008.

( Received June 26, 1984 )

MATHEMATISCHES INSTITUT  
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT  
ALBERTSTRASSE 23b  
D—7800 FREIBURG IM BREISGAU  
FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY

## ENCLOSING A SET BY SETS

A. BEZDEK and K. BEZDEK

*To Professor L. Fejes Tóth on his 70th birthday*

### Abstract

A set  $s$  of the  $n$ -dimensional space is said to be enclosed by the sets  $s_1, s_2, \dots$  if  $\text{int } s \cap \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} s_i \right) = \emptyset$  and any curve connecting a point of  $s$  with a point sufficiently far from  $s$  intersects at least one of the sets  $s_1, s_2, \dots$ . We discuss some special cases of the general problem: How must the sets  $s_1, s_2, \dots$  be arranged in order that they enclose the greatest set similar to a given set  $s$ ?

### Introduction

We will use the following terminology.

If  $n \geq 3$  and if  $n$  points in the plane are assigned in order, then each segment that joins a point and its successor, and the segment joining the last point to the first, are the segments or the *sides* of a *circuit*, and the  $n$  points are the *vertices* of the circuit. The circuit is a *polygon* or an *n-gon* if no two of the sides intersect except at a vertex and each vertex is the intersection of exactly two sides. We will use the notations (i)  $P_1 P_2 \dots P_n$  to represent the  $n$ -gon with vertices  $P_1, P_2, \dots, P_n$  and (ii)  $\widehat{P_i P_j}$  to represent the arc consisting of the sides  $P_i P_{i+1}, \dots, P_{j-1} P_j$ . The  $n$ -gon  $P_1 \dots P_n$  (the arc  $\widehat{P_i P_j}$ , resp.) is said to be *convex* if the angles at the vertices  $P_1, \dots, P_n$  (at the vertices  $P_{i+1}, \dots, P_{j-1}$ , resp.) are  $\leq \pi$ .

### I. Enclosing a circle by segments

Denote the segments and their length by the same symbol. We prove

**THEOREM 1.** *An arrangement of the given segments  $s_1, \dots, s_n$  enclosing the great-possible circle  $C$  satisfies the following properties:*

- (1) *there exists an  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) and  $s'_i \leq s_i$  such that the segments*

$$\{s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n\}$$

*are the sides of a convex  $n$ -gon and the line of  $s'_i$  is different from the lines of  $s_j$  ( $1 \leq j \leq n, j \neq i$ );*

- (2) *at least one of any two adjacent sides of the polygon  $P_{i_1} \dots P_{i_k}$  is tangent to the circle  $C$  — where  $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$  denote the vertices of  $P$  of angles  $\neq \pi$ .*

---

Research (partially) supported by Hungarian National Foundation for Scientific Research Grant No. 1238.

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A45; Secondary 51M05.

*Key words and phrases*. Packing of convex sets, minimal area.



REMARK 1. If  $n=3$  and  $0 < s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} (s_1+s_2) = 0.618\dots(s_1+s_2)$  then  $P$  is a triangle of sides  $s_1, s_2, s_3$ .

REMARK 2. The configurations of the Fig. 1 show that generally the segments in the extremal arrangement does not form a polygon and not all of them will be tangent to the enclosed circle.

REMARK 3. If  $0 < s_1 = s_2 = \dots = s_n$ , then  $P$  is a regular  $n$ -gon.



Fig. 1

## II. Estimate concerning the size of the enclosed set

The statements of Section I raise the following question.

Having a convex polygon  $P$  of inradius  $R$ , we denote by  $R'$  the radius of the greatest circle which can be enclosed by the sides of  $P$  after a rearrangement. How large the ratio  $\frac{R'}{R}$  can be?

We discuss a similar question.

Let  $S$  be a convex domain and  $K$  a centro-symmetric convex domain. The greatest domain which is similar to  $K$  and is contained by  $S$  is called the inscribed  $K$ -domain of  $S$ . Dividing the boundary of  $S$  by  $n$  points into  $n$  parts, we get  $n$  convex arcs  $k_1, \dots, k_n$ . We prove

THEOREM 2. *If a domain which is congruent to the domain obtained by enlarging the inscribed  $K$ -domain of  $S$  by the factor  $\lambda$  can be enclosed by the translates of  $k_1, \dots, k_n$ , then*

$$(3) \quad \lambda \leq \frac{3}{2}.$$

(4) *If  $S$  is centro-symmetrical, then  $\lambda \leq 1$ .*

## III. Construction

We show that Theorem 2 cannot be extended to the  $n$ -dimensional space ( $n \geq 3$ ). Let  $N > 0$  be a given integer. We give a convex centro-symmetric polyhedron  $P_N$  of inradius 1 in the  $n$ -dimensional space such that a sphere of radius  $NR$  can be enclosed by the translates of the faces of  $P_N$ .

## PROOF OF THEOREM 1.

LEMMA 1. Let  $P_1 \dots P_n$  be an  $n$ -gon enclosing a circle  $C$  and  $a_1, a_2$  be arcs of this polygon with endpoints  $p_i, p_j$  ( $i < j$ ). If  $a_1$  is convex,  $a_2$  is not a segment and  $a_2 \cap C = \emptyset$  then there exists a polygon  $P'_1 \dots P'_n$  such that it encloses a circle greater than  $C$  and  $P'_k P'_{k+1} \equiv P_k P_{k+1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

PROOF OF LEMMA 1. Choose a side  $P_k P_{k+1}$  and a point  $Q$  on it such that  $Q \notin C$  and the region interior to angle  $\angle P_i Q P_j$  contains the centre of  $C$ . We may suppose that the polygon is divided into the following four disjunct parts  $\widehat{P_i P_j}$ ,  $\widehat{P_j P_k}$ ,  $\widehat{P_k P_{k+1}}$ ,  $\widehat{P_{k+1} P_i}$ . Rotate the arcs  $\widehat{P_j P_k}$ ,  $\widehat{P_{k+1} P_i}$  about  $Q$  such that they do not have common point with  $C$ . Let  $P'_x$  be the image of the vertex  $P_x$ . If the measures of the rotations are small enough  $P'_i$  and  $P'_j$  can be connected by the framework  $\widehat{A_i A_j}$  (the sides are rods which are joined but rotate freely at the vertices) such that the sides have no common point with  $C$ . Let  $P'_x$  be the image of the vertex  $P_x$ . The polygon  $P'_1 \dots P'_n$  satisfies the conditions of Lemma 1.  $\square$

LEMMA 2. Let  $P$  be a convex polygon of sides  $\{s_1, \dots, s_n\}$ . If  $s_1 < s'_1$ ,  $s_2 < s'_2$  then the segments  $\{s'_1, s'_2, s_3, \dots, s_n\}$  can enclose a circle greater than the incircle of  $P$ .

PROOF OF LEMMA 2. (i) If  $s_1, s_2$  are adjacent sides with vertices  $A, B, C$  then replace the arc  $ABC$  by an arc  $AB'C$  such that  $ABC_\Delta \subset AB'C_\Delta$  and  $AB < AB' < s'_1$ ;  $BC < BC' < s'_2$ . Using Lemma 1 we get a better arrangement.

(ii) If  $P$  is a rectangle our statement is trivial.

(iii) In the case different from (i) and (ii) one of  $s_1, s_2$  has an adjacent side such that the angle at the common vertex is  $> \frac{\pi}{2}$ . For this sidepair we can use the method of (i).

Denote  $S$  the union of the segments  $s_1, \dots, s_n$  in the extremal arrangement. Let  $D$  be the union of the points which can be connected with the centre of  $C$  by a curve avoiding all the segments  $s_1, \dots, s_n$ .

Since the boundary of  $D$  is a polygon the class  $\mathcal{P}$  of polygons lying in  $S$  and enclosing  $C$  is not empty. Let  $P \in \mathcal{P}$  be a polygon of least perimeter. Obviously  $s_j \cap P \neq \emptyset$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

(a)  $s_j \cap P$  is a segment ( $j = 1, \dots, n$ ).

Suppose there are vertices  $P_k, P_l$  on the segment  $s_j$  which are connected by arcs different from the segment  $P_k P_l$ . Replacing one of these arcs by the segment  $P_k P_l$  we get a polygon of less perimeter than that of  $P$ , which is a contradiction.

(b)  $P$  is convex.

Suppose  $P$  is not convex. Let  $P_k P_l$  be a side of the convex hull of  $P$ , which does not belong to  $P$ .

Reflect the arc  $\widehat{P_k P_l}$  in the midpoint of the side  $P_k P_l$ . In view of (a) after a finite number of such modifications we get a convex polygon  $C \in \mathcal{P}$ . Since the arc obtained by the last reflection has no common point with  $C$  we can use Lemma 1, and get a contradiction.

(c) The statement (1) is true.

From Lemma 2 it follows that  $s_i \subset P$  for all  $1 \leq i \leq n$  except at most one and from Lemma 2 (ii) that if  $s_i \setminus P \neq \emptyset$  then the line of  $s_i$  is different from the lines  $s_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ,  $j \neq i$ ). Thus we have only to prove that a polygon  $P_1 \dots P_n$  of sides  $\{s_1, \dots, s_n\}$  such that each side has at least one collinear neighbour is not extremal.

Consider the vertices with angle equal to  $\pi$ . If all of them lies on  $C$  our statement is trivial. Otherwise consider the vertex  $P_i$  of maximal distance from the centre  $O$  of  $C$ . We may suppose that  $\angle OP_i P_{i+1} \cong \frac{\pi}{2}$ . Reflect the arc  $P_i P_{i+1} P_{i+2}$  in the normal bisector of the segment  $P_i P_{i+2}$ . It is easy to see that the image  $P_i P'_{i+1} P_{i+2}$  must be disjunct from  $C$ . Using Lemma 1 we get that the polygon  $P_1 \dots P_n$  is not extremal.

(d) From Lemma 1 and (b) it follows the statement (2).

PROOF OF REMARK 1. If  $n=3$  the extremal circle is contained by a triangle of sides  $s_1, s_2, x_0$  where  $0 < x_0 < s_3$ . Thus it has the radius  $\frac{1}{2} \sqrt{f(x_0)}$  where

$$f(x) = \frac{(s_1 + x - s_2)(s_2 + x - s_1)(s_1 + s_2 - x)}{s_1 + s_2 + x}$$

for  $x \in [s_1 - s_2, s_1 + s_2]$ . If  $0 < x < s_3$  in view of

$$0 < s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} (s_1 + s_2) \quad \text{and} \quad f'(x_0) = 0$$

we have

$$\begin{aligned} 0 &= -x_0^3 - (s_1 + s_2)x_0^2 + (s_1 + s_2)^2 x_0 + (s_1 + s_2)(s_1 - s_2)^2 > \\ &> x_0(-s_3^2 - (s_1 + s_2)s_3 + (s_1 + s_2)^2) \cong \\ &\cong x_0 \left( - \left[ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} (s_1 + s_2) \right]^2 - (s_1 + s_2) \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} (s_1 + s_2) + (s_1 + s_2)^2 \right) \\ &= x_0 (s_1 + s_2)^2 \left( - \left[ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right]^2 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

this is a contradiction, thus  $x_0 = s_3$ .  $\square$

PROOF OF REMARK 3. We use the notations of proof of Theorem 1. The polygon  $P_1 \dots P_n$  is convex. Consider the triangle  $P_i O P_{i+1}$ . It is easy to see that the distance between  $O$  and  $P_i P_{i+1}$  is maximal for  $OP_i = OP_{i+1}$  if  $\angle P_i O P_{i+1}$  is fixed. Since at least for one  $1 \leq i \leq n$  the angle  $\angle P_i O P_{i+1} \cong \frac{2\pi}{n}$ . The inradius of  $P$  is  $\leq \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$ , what we wanted.  $\square$

NOTATIONS. Let  $S_1, S_2$  be two point-sets of the Euclidean space, and  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  two vectors pointing from a given point  $O$  to a point in  $S_1$  and  $S_2$ , respectively. We consider the vector  $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$  where  $\lambda_1, \lambda_2$  are fixed numbers. The new set  $S$  consisting of the end-points of all such vectors  $\mathbf{v}$ , when the end-points of  $\mathbf{v}_1$  and  $\mathbf{v}_2$  vary

independently in  $S_1$  and  $S_2$  is called the linear combination of  $S_1$  and  $S_2$ . Symbolically this is expressed by

$$S = \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2.$$

The centro-symmetrization  $CS$  of a convex set  $S$  is defined by the form

$$CS = \frac{1}{2}(S + (-S)).$$

If the sets  $S_1, S_2$  are similar and  $S_1$  is smaller than  $S_2$  we write

$$S_1 < S_2.$$

Let  $S, K$  be two convex sets.  $K_S$  denotes the greatest set such that  $K_S \subset S$  and  $K_S$  homothetic with  $K$ .

LEMMA 3. *Let  $S$  be a convex domain and  $K_0$  a centro-symmetric convex domain. The inscribed  $K_0$ -domain of  $CS$  is not greater than  $\frac{3}{2}$  times the inscribed  $K_0$ -domain of  $S$ .*

PROOF OF LEMMA 3. We may suppose that  $S$  is a polygon. It is enough to prove that  $K_{CS} \leq \frac{3}{2} K_S$  for any  $K$  congruent with  $K_0$ . If  $S$  has two parallel sides tangent to  $K_S$  then  $K_{CS} \leq K_S$ . If do not exist such sides then there exist three sides of  $S$  tangent to  $K_S$ . Let  $T$  be the triangle determined by the lines of these sides. Since  $CT_T = \frac{2}{3} CT$  we have

$$K_{CS} \leq K_{CT} \leq \frac{3}{2} K_T = \frac{3}{2} K_S. \quad \square$$

PROOF OF THEOREM 2. We may suppose that  $S$  is a polygon. Similarly as in the proof of Theorem 1 we get a convex polygon  $P$  the sides of which are covered by the sides of  $S$ . Since  $K$  is centro-symmetrical the inscribed  $K$ -domain of  $P$  is not greater than the inscribed  $K$ -domain of  $CP$ .

In view that  $CP$  is translatable in  $CS$  from Lemma 3 follows (3). If  $S$  is centro-symmetrical using  $CS=S$  we get (4) by the above method.  $\square$

CONSTRUCTION. Let  $P_N$  be the prism bounded by two squares of side-length  $2N$  and  $4N^2$  squares of side-length  $\frac{2}{N}$ . The prism  $P_N$  has an inradius  $\frac{1}{N}$ . Each small square is planar with  $N^2-1$  other small squares. The faces of  $P_N$  can be translated such that they cover the faces of a cube of side length 2 which has an inradius 1.

(Received June 26, 1984)

MTA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETE  
POSTAFIÓK 127  
H-1364 BUDAPEST

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR  
GEOMETRIA TANSZÉK  
RÁKÓCZI ÚT 5  
H-1088 BUDAPEST  
HUNGARY





## DO INFINITE-DIMENSIONAL BANACH SPACES ADMIT NICE TILINGS?

VICTOR KLEE

*With Warm Regards for László Fejes Tóth on the Occasion of his Seventieth Birthday*

### Introduction

As the term is used here, a *tiling* of a normed linear space  $E$  is a covering  $\mathcal{T}$  of  $E$  such that each *tile* (member of  $\mathcal{T}$ ) is the closure of its nonempty interior and no point of  $E$  is interior to more than one tile. Far too weak to be of interest in themselves, the basic conditions may be augmented by requirements on the individual tiles (bounded, convex, etc.), on the relative positions of the tiles ( $\mathcal{T}$  is a *translative* (resp. *lattice*) *tiling* if there is a subset (resp. additive subgroup)  $S$  of  $E$  and a tile  $T_0$  such that  $\mathcal{T} = \{T_0 + s : s \in S\}$ ), and on the properties of  $\mathcal{T}$  as a covering (locally finite, point-finite, etc.). An important limitation is imposed by Corson's theorem [2] that if  $E$  has an infinite-dimensional reflexive subspace then  $E$  does not admit a locally finite covering by bounded closed convex sets.

In contrast to a genuine theory of tilings in finite-dimensional spaces [3], [5], [17] and an extensive theory for the plane [6], there are few significant examples and not even a rudimentary theory of tilings in infinite-dimensional spaces. It is premature to attempt to develop a theory until more interesting examples are known. The present note contains a few examples and its main purpose is to encourage the search for more.

Section 1 introduces a property of coverings, protectiveness, which seems appropriate for use, along with local finiteness and point-finiteness, in classifying tilings of infinite-dimensional spaces. (A covering  $\mathcal{C}$  of a topological space  $X$  is *protective* if each point of  $X$  is interior to the union of the members of  $\mathcal{C}$  that contain it.) Section 2 shows that each infinite-dimensional separable normed linear space admits a lattice-tiling by "parallelotopes" that are *finitely bounded* (bounded intersection with each finite-dimensional subspace) but norm-unbounded, and the underlying group may be required to span an arbitrary  $\aleph_0$ -dimensional subspace of  $E$ . Section 3 describes some fairly nice tilings of  $l^p(\aleph)$  spaces for all infinite cardinals  $\aleph$  such that  $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$  — in particular, a tiling of  $l^2(\aleph)$  with bounded convex tiles and a tiling of  $l^1(\aleph)$  by pairwise disjoint translates of its closed unit ball. Section 4 contains some unsolved problems. For example, can the separable Hilbert space ( $l^2$ ) be tiled with bounded convex tiles?

I am indebted to W. Henson, P. L. Papini and C. A. Rogers for helpful comments, to B. Grünbaum and I. Singer for useful references, and to the National Science Foundation for research support.

---

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 46B20, 52A45; Secondary 46A45, 46C05, 52A43.

*Key words and phrases*. Tiling, packing, covering, box, proximal, convex body, starshaped, uniformly convex, biorthogonal system, point-finite, locally finite, protective,  $l^p$ -space.

### 1. Protectiveness, point-finiteness and local finiteness of tilings

**THEOREM 1.1.** *If a topological space is covered by a collection  $\mathcal{C}$  of its closed subsets, then local finiteness of  $\mathcal{C}$  implies point-finiteness and protectiveness; when  $\mathcal{C}$  is a tiling the converse is also true.*

**PROOF.** If  $\mathcal{C}$  is locally finite then each point  $x$  of the space admits a neighborhood  $U_x$  and a finite  $\mathcal{C}_x \subset \mathcal{C}$  such that  $U_x \subset \bigcup \mathcal{C}_x$ . Since each member of  $\mathcal{C}$  is closed, the set  $U_x \sim \bigcup \{C \in \mathcal{C}_x: x \notin C\}$  is a neighborhood of  $x$  and hence  $\mathcal{C}$  is protective. Now suppose, conversely, that  $\mathcal{T}$  is a point-finite protective tiling,  $x$  is a point of the space, and  $V = \text{int} \bigcup_1^n T_i$  where  $T_1, \dots, T_n$  are the tiles that include  $x$ . Then  $V$  is an open neighborhood of  $x$ . If a member  $D$  of  $\mathcal{T} \sim \{T_1, \dots, T_n\}$  intersects  $V$  then (since  $D$  is the closure of its interior)  $\text{int } D$  intersects  $V$  and hence  $\text{int } D$  intersects some  $\text{int } T_i$ , an impossibility in the case of a tiling. Hence  $\mathcal{T}$  is locally finite.  $\square$

**THEOREM 1.2.** *Each protective tiling of  $\mathbb{R}^d$  by convex tiles is locally finite.*

**PROOF.** The proof is by induction on  $d$ , the assertion being obvious when  $d=1$ . Suppose that  $d \geq 2$  and the result is known for  $\mathbb{R}^{d-1}$ . In view of Theorem 1.1, it suffices to show that for each  $p \in \mathbb{R}^d$  and each protective tiling  $\mathcal{T}$  of  $\mathbb{R}^d$  by convex tiles, only finitely many members of  $\mathcal{T}$  include  $p$ . Suppose the contrary and let  $T_1, T_2, \dots$  be the members of  $\mathcal{T}$  that include  $p$ . We claim that

(\*) there exists  $\delta > 0$  such that each  $T_i$  includes a point  $q_i$  with  $\|q_i - p\| = \delta$ .

Indeed, if (\*) fails there are sequences  $q_{k(1)}, q_{k(2)}, \dots$  and  $r_{k(1)}, r_{k(2)}, \dots$  converging to  $p$  such that for each  $i$ ,  $q_{k(i)}$  is interior to  $T_i$ ,  $r_{k(i)} \notin T_i$  and  $q_{k(i)} \in ]p, r_{k(i)}[$ . Since  $\mathcal{T}$  is protective, there exist  $i$  and  $j$  such that  $r_{k(i)} \in T_j$ . But also  $p \in T_j$ , whence  $q_{k(i)} \in ]p, r_{k(i)}[ \subset T_j$  and it follows from this that  $\text{int } T_{k(i)}$  intersects  $\text{int } T_j$ , an impossibility since  $k(i) \neq j$ .

With  $\delta$  and the  $q_i$ s as in (\*), let  $q_{k(1)}, q_{k(2)}, \dots$  be a subsequence of the  $q_i$ s that converges to a point  $q$  at distance  $\delta$  from  $p$ . Let  $H$  be a hyperplane in  $\mathbb{R}^d$  that intersects but does not contain the segment  $]p, q[$  and is not a supporting hyperplane of any member of  $\mathcal{T}$ . Then the collection  $\{T \cap H: T \in \mathcal{T}\}$  is a protective tiling of  $H$  by convex tiles. Since each neighborhood of the point  $]p, q[ \cap H$  intersects  $T_{k(i)} \cap H$  for  $i=1, 2, \dots$ , that contradicts the inductive hypothesis.  $\square$

As can be seen from the figures, even a tiling of  $\mathbb{R}^2$  by triangles may be point-finite without being protective, and a tiling of  $\mathbb{R}^2$  by topological 2-balls, all but one of which is a triangle, may be protective without being point-finite.

By way of further illustration, let  $E$  be one of the classical sequence-spaces ( $c_0$ ) or ( $l^p$ ) ( $1 \leq p \leq \infty$ ), and consider in  $E$  the "box"

$$B_0 = \{b = (b_1, b_2, \dots) \in E: |b_i| \leq \frac{1}{2} \text{ for all } i\},$$

the subgroup

$$S = \{s = (s_1, s_2, \dots) \in E: \text{each } s_i \text{ is an integer}\},$$

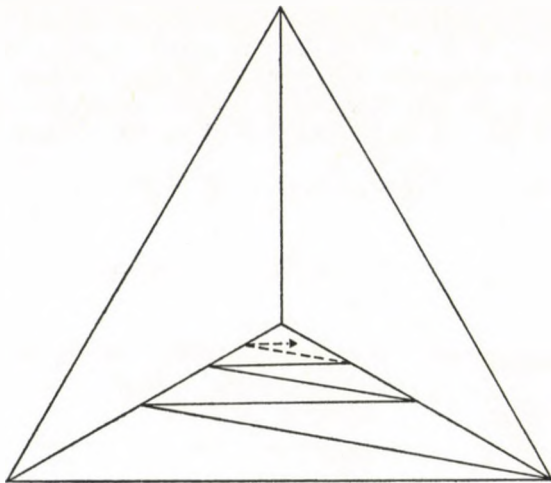


Fig. 1

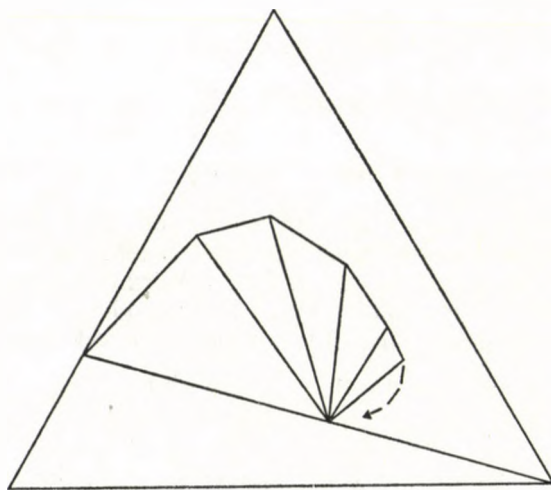


Fig. 2

and the tiling

$$\mathcal{T} = \{B_0 + s : s \in S\}$$

of  $E$ . The tiles are finitely bounded and convex, but are norm-bounded only for  $(c_0)$  and  $(l^\infty)$ . For each point  $x = (x_1, x_2, \dots) \in E$ , the tiles  $B_0 + s$  that include  $x$  are precisely those for which  $s \in S_x$ , where  $S_x$  is the set of all  $s \in S$  such that  $|x_i - s_i| \leq \frac{1}{2}$  for each  $i$ .

When  $E$  is  $(c_0)$  or is  $(l^p)$  with  $1 \leq p < \infty$ , the above tiling  $\mathcal{T}$  is point-finite and protective, hence locally finite. However, the next paragraph describes a tiling  $\mathcal{R}$  of  $E$  such that  $\mathcal{R}$  is a refinement of  $\mathcal{T}$ , the tiles of  $\mathcal{R}$  are convex and are equivalent under  $E$ 's isometry group, and  $\mathcal{R}$  is (when  $E \neq (l^\infty)$ ) protective but not point-finite. Hence Theorem 1.2 does not extend to tilings of infinite-dimensional Banach spaces by convex tiles.

Let  $I$  denote the set of all nonzero integers, and for each  $i \in I$  consider the face

$$F_i = \left\{ b \in B_0 : b_{|i|} = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} i) \right\}$$

of the box  $B_0$  and the "pyramid"

$$P_i = \operatorname{con}(\{0\} \cup F_i) = \left\{ b \in B_0 : \operatorname{sgn} b_{|i|} = \operatorname{sgn} i, |b_{|i|}| = \sup \{|b_1|, |b_2|, \dots\} \right\}.$$

Then the tiling

$$\mathcal{R} = \{P_i + s : i \in I, s \in S\}$$

has the stated properties.

In the case of  $(l^\infty)$  the above tiling  $\mathcal{T}$  is not point-finite because the point  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right)$  belongs to infinitely many tiles, and  $\mathcal{T}$  is not protective because if  $p_i = (i-1)/(2i)$  for all  $i$  then the point  $p$  belongs to the unique tile  $B_0$  but is not interior to it.

In an arbitrary vector space  $V$  whose points are sequences of real numbers, define a *closed box* (resp. *open box*) as a set of the form

$$\{v \in V : u_i \leq v_i \leq w_i\} \quad \text{resp.} \quad \{v \in V : u_i < v_i < w_i \text{ for all } i\}$$

where  $u$  and  $w$  are points of  $V$  with  $u_i < w_i$  for all  $i$ . Call the box *full* if  $\inf \{w_i - u_i : i\} > 0$ . (Our earlier "box"  $B_0$  in  $(l^p)$  is a full box when  $p = \infty$  but is not a box at all for  $(l^p)$  with  $1 \leq p < \infty$  or for  $(c_0)$ .) For  $(l^\infty)$  with its norm topology, C. A. Rogers has proved (unpublished) that there is no locally finite tiling by closed full boxes. He has also proved that if the sequence-space  $V$  is such that

- (a)  $V$  includes a sequence  $v$  with  $v_i > 0$  for all  $i$

and

- (b)  $V$  is *normal* in the sense of Köthe [9] (for each  $v \in V$ , the space  $V$  also includes each sequence  $u$  with  $|u_i| \leq |v_i|$  for all  $i$ ),

then with respect to the box topology  $V$  admits no locally finite tiling by closed boxes. (The open boxes form a basis for the box topology, and this turns  $V$  into a topological group but not into a topological vector space in the usual sense, for multiplication by scalars is not jointly continuous. In fact, the space is not even connected.)



## 2. Tilings based on biorthogonal sequences

The tilings produced here are locally finite, and the tiles may perhaps be called "parallelotopes". The tiles are finitely bounded, but norm-unbounded and it seems clear the construction cannot be modified so as to produce bounded tiles. Let us first describe the construction and then discuss its applicability.

**THEOREM 2.1.** *Suppose that  $E$  is a normed linear space, and the infinite sequences  $x_1, x_2, \dots$  in  $E$  and  $y_1, y_2, \dots$  in  $E^*$  are such that*

$$\langle x_i, y_j \rangle \neq 0 \quad \text{if and only if} \quad i = j$$

$$\langle x, y_j \rangle = 0 \quad \text{for all } j \text{ implies } x = 0.$$

*Let the  $u_i$ s and  $v_i$ s be multiples of the  $x_i$ s and  $y_i$ s, respectively, such that for each  $i$ ,*

$$\|v_i\| = 1 \quad \text{and} \quad \langle u_i, v_i \rangle \geq i.$$

*Let  $S$  denote the additive subgroup of  $E$  consisting of all linear combinations of the  $u_i$ s with integer coefficients, and let*

$$T_0 = \{x \in E: |\langle x, v_i \rangle| \leq \langle u_i, v_i \rangle / 2 \text{ for all } i\}.$$

*Then the collection*

$$\mathcal{T} = \{T_0 + s: s \in S\}$$

*is a locally finite lattice-tiling of  $E$  by tiles that are convex, centrally symmetric, and finitely bounded but norm-unbounded.*

**PROOF.** Plainly  $T_0 = -T_0$ ,  $T_0$  is closed and convex, and  $T_0$  contains the ball of radius  $1/2$  centered at the origin. Since  $T_0$  is convex, its finite boundedness follows readily from linear boundedness. Consider an arbitrary pair  $p, q$  of points of  $E$  with  $q \neq 0$ , and choose  $i$  such that  $\langle q, v_i \rangle \neq 0$ . Since

$$\langle p + \lambda q, v_i \rangle = \langle p, v_i \rangle + \lambda \langle q, v_i \rangle$$

it is clear that for all sufficiently large  $|\lambda|$  the point  $p + \lambda q$  does not belong to  $T_0$ . Thus the set  $T_0$  is linearly and hence finitely bounded. However,  $T_0$  is norm-unbounded because each  $u_i$  belongs to  $2T_0$  and  $\|u_i\| \rightarrow \infty$ .

Since  $\langle u_i, v_j \rangle = 0$  for all  $i \neq j$ , the translate

$$T(k_1, \dots, k_n) = T_0 + k_1 b_1 + \dots + k_n b_n$$

of  $T_0$  is the set of all  $x \in E$  such that

$$(\dagger) \quad \left(k_i - \frac{1}{2}\right) \langle u_i, v_i \rangle \leq \langle x, v_i \rangle \leq \left(k_i + \frac{1}{2}\right) \langle u_i, v_i \rangle \quad \text{for } 1 \leq i \leq n$$

and

$$|\langle x, v_i \rangle| \leq \langle u_i, v_i \rangle / 2 \quad \text{for } i > n.$$

From this it is clear that  $T_0 + s$  and  $T_0 + s'$  have disjoint interiors when  $s$  and  $s'$  are distinct members of  $S$ . It follows also that  $\mathcal{T}$  covers  $E$ , for if  $x \in E$  and the integer  $n$  are such that  $n > 2\|x\|$ , then for all  $i > n$  it is true that

$$|\langle x, v_i \rangle| \leq \|x\| \|v_i\| < n/2 < i/2 \leq \langle u_i, v_i \rangle / 2;$$



the integers  $k_1, \dots, k_n$  can be chosen so that the inequalities  $(\dagger)$  are all satisfied, and then  $x \in T(k_1, \dots, k_n)$ . Note, finally, that for  $x$  and  $n$  as described, there are at most  $2^n$  tiles  $T(k_1, \dots, k_n)$  that include  $x$ , and their union contains the ball of radius  $\varepsilon/2$  centered at  $x$ , where  $\varepsilon$  is the minimum of  $|j - \langle x, v_i \rangle / \langle u_i, v_i \rangle|$  as  $j$  ranges over all integers and  $i$  over all integers  $h$  such that  $1 \leq h \leq n$  and  $\langle x, v_n \rangle / \langle u_n, v_n \rangle$  is not an integer. Hence the tiling  $\mathcal{T}$  is locally finite.  $\square$

Consider, for a moment, the case in which  $E$  is the sequence-space  $(l^p)$ ,  $y_j$  is the linear functional that sends each point of  $E$  into its  $j$ th coordinate, and  $x_i$  is the point of  $E$  whose  $i$ th coordinate is 1 while all others are 0. The tiling of  $(l^p)$  produced by Theorem 2.1 is locally finite and its tiles are finitely bounded but norm-unbounded. When  $1 \leq p < \infty$  it resembles in these respects the tiling  $\{B_0 + s : s \in S\}$  of  $(l^p)$  described in Section 1, but when  $p = \infty$  the latter tiling is not locally finite but has norm-bounded tiles. The local finiteness of 2.1's tiling of  $(l^\infty)$  does not contradict the theorem of Rogers stated in Section 1, because 2.1's tiles are not boxes in his sense.

Theorem 2.1's construction can be carried out whenever  $E$  is a separable space or the conjugate of such a space. The needed  $x_i$ 's and  $y_j$ 's are supplied by a theorem of Markušević [13] on the existence of biorthogonal systems (see [11] for a short proof). Theorem 2.3 below is a sharpened version of the result of [13], and makes it possible to exercise much control over the linear hull  $\text{lin } S$  of the subgroup  $S$  in 2.1.

**LEMMA 2.2.** *Suppose that the real vector spaces  $X$  and  $Y$  are in duality with respect to a bilinear form  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , that  $X_1 \subset X_2 \subset \dots$  is a sequence of linear subspaces of  $X$  with  $\dim X_i = i$  for each  $i$ , and that  $Y_1, Y_2$  is a sequence of subsets of  $Y$  with  $\text{lin } Y_i = Y$  for each  $i$ . Then there exist biorthogonal sequences  $x_1, x_2, \dots$  in  $X$  and  $y_1, y_2, \dots$  in  $Y$  such that for each  $i$ ,  $\text{lin } \{x_1, \dots, x_i\} = X_i$  and  $\text{lin } \{y_1, \dots, y_i\}$  intersects  $Y_i$ .*

**PROOF.** It suffices to produce  $x_1, x_2, \dots$  in  $X$  and  $y_1, y_2, \dots$  in  $Y$  such that the linear hulls are as described and  $\langle x_i, y_j \rangle = 0$  if and only if  $i \neq j$ ; rescaling then yields the desired biorthogonal sequences. Start the construction by choosing  $x_1 \in X_1 \setminus \{0\}$  and noting that the polar  $(R_{S_1})^0 = X_1^0$  is a subspace of codimension 1 in  $Y$ . But then  $Y_1 \not\subset X_1^0$ , so there exists  $y_1 \in Y_1 \setminus X_1^0$  and of course  $\langle x_1, y_1 \rangle \neq 0$ .

Now suppose that  $x_1, \dots, x_n$  and  $y_1, \dots, y_n$  have been produced so as to satisfy the desired conditions. Let  $L_n = \text{lin } \{y_1, \dots, y_n\}$ ,  $W = L_n^0 \subset Y$  and  $Z = X_n^0 \subset Y$ , so that  $X$  is the direct sum of  $W$  and  $X_n$  and  $Y$  is the direct sum of  $Z$  and  $L_n$ . If  $x \in X$  and  $\langle x, z \rangle = 0$  for all  $z \in Z$  then  $x \in X_n$ , whence  $x \in W$  only if  $x = 0$ . Thus  $Z$  separates points of  $W$ . A similar argument shows that  $W$  separates points of  $Z$ , whence  $W$  and  $Z$  are in duality with respect to the restriction of the bilinear form  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  to  $W \times Z$ .

Since  $W$  is of codimension  $n$  and  $\dim X_{n+1} = n+1$ , the intersection  $X_{n+1} \cap W$  is a line through the origin. Since  $\text{lin } Y_{n+1} = Y$ ,  $Z$  is the linear hull of  $Y_{n+1}$ 's image  $Y'_{n+1}$  in  $Z$  under a linear projection of  $Y$  onto  $Z$  with kernel  $L_n$ . By the case discussed at the start of the proof, there exist  $x_{n+1} \in X_{n+1} \cap W$  and  $y_{n+1} \in Y'_{n+1}$  such that  $\langle x_{n+1}, y_{n+1} \rangle \neq 0$ . Thus the procedure can be continued to produce the desired infinite sequences  $x_1, x_2, \dots$  and  $y_1, y_2, \dots$ .  $\square$

**THEOREM 2.3.** *For a separable normed linear space  $E$ , suppose either that  $X=E$  and  $Y=E^*$  or that  $X=E^*$  and  $Y=E$ . Suppose also that  $p_1, p_2, \dots$  is a linearly independent sequence in  $X$ . Then there exist biorthogonal sequences  $x_1, x_2, \dots$  in  $X$  and  $y_1, y_2, \dots$  in  $Y$  such that*

$$\text{lin}\{x_1, \dots, x_i\} = \text{lin}\{p_1, \dots, p_i\} \quad \text{for all } i$$

$$\langle x, y_j \rangle = 0 \quad \text{for all } j \text{ implies } x = 0.$$

**PROOF.** Let  $U$  denote the unit ball of  $Y$ , taken in the weak  $*$  topology when  $Y=E^*$  and in the norm topology when  $Y=E$ . Since  $U$  is separable and metrizable, there is a sequence  $Y_1, Y_2, \dots$  of relatively open subsets of  $U$  such that each subset of  $U$  that intersects all  $Y_i$ 's is dense in  $U$ . Plainly  $\text{lin } Y_i = Y$  for each  $i$ , and hence Lemma 2.2 is applicable with  $X_i = \text{lin}\{p_1, \dots, p_i\}$  for each  $i$ . If  $x \in E$  and  $\langle x, y_j \rangle = 0$  for all  $j$  then of course  $\langle x, q \rangle = 0$  for each  $q \in \text{lin}\{y_1, y_2, \dots\}$ . Since  $\text{lin}\{y_1, y_2, \dots\}$  is dense in  $U$ , this implies  $x = 0$ .  $\square$

**COROLLARY 2.4.** *Suppose that  $L$  is an  $\aleph_0$ -dimensional subspace of a normed linear space  $E$ , where  $E$  is separable or is a subspace of the conjugate of a separable space. Then  $E$  admits a tiling of the sort described in Theorem 2.1, with precisely  $L$  as the linear hull of the additive subgroup  $S$ .*

We have not studied the possibility of extending the methods of this section far beyond the separable case. Plainly some obstacles to such an extension would be presented by the examples of Godun and Kadec [4], Pličko [15] and Shelah [18] in which the availability of biorthogonal systems is severely restricted.

### 3. Tilings based on discrete proximal sets

For a point  $x$  and a nonempty subset  $K$  of a metric space  $M$  with distance-function  $d(\cdot, \cdot)$ , the distance from  $x$  to  $K$  is defined as

$$d_K(x) = \inf \{d(x, k) : k \in K\}$$

and the metric projection  $P_K: M \rightarrow 2^K$  is defined as follows:

$$P_K(x) = \{y \in K : d(x, y) = d_K(x)\}.$$

A set  $K$  is proximal if for each  $x \in M$  the set  $P_K(x)$  is nonempty. A set  $K$  of at least two points is discrete if  $d_{K \setminus \{k\}}(k) > 0$  for each  $k \in K$ , and is  $\delta$ -dispersed if  $d(k, y) > \delta$  for each pair  $k, y$  of distinct points of  $K$ .

**THEOREM 3.1.** *Suppose that  $K$  is a discrete proximal subset of a normed linear space  $E$ , and for each  $k \in K$  let  $T_k = \{x \in E : k \in P_K(x)\}$ . Then each set  $T_k$  is closed, is starshaped from  $k$ , and has  $k$  as an interior point. If the space  $E$  is strictly convex then the interiors of the sets  $T_k$  are pairwise disjoint. If  $E$  is locally uniformly convex then each set  $T_k$  is the closure of its interior and hence the collection  $\{T_k : k \in K\}$  is a tiling of  $E$  by starshaped tiles. When  $E$  is an inner-product space the tiles are convex.*

**PROOF.** For each  $x \in T_k$  it is immediate from the triangle inequality that  $[x, k] \subset T_k$ . Thus  $T_k$  is starshaped from  $k$ . The other parts of the first assertion are obvious.

If  $k$  and  $l$  are distinct points of  $K$  and the sets  $T_k$  and  $T_l$  have a common interior point, then the set  $T_k \cap T_l$  contains a segment  $[p, q]$  parallel to  $[k, l]$  — say  $q - p = \lambda(l - k)$  for  $\lambda > 0$ . With  $\|k - q\| = \|l - q\|$  and  $\|k - p\| = \|l - p\|$ , we may also assume without loss of generality that  $\|l - p\| \leq \|l - q\|$ . Let  $\mu = (1 + \lambda)^{-1} \in ]0, 1[$  and note that

$$l = (1 - \mu)k + \mu(l - p + q).$$

It follows from convexity of the norm that

$$\|l - q\| \leq (1 - \mu)\|k - q\| + \mu\|l - p\|$$

and hence, in view of inequalities already established, that these three norms are equal. But then the sphere of radius  $\|l - q\|$  centered at  $q$  contains a segment, and the space  $E$  is not strictly convex.

For the next step in the proof, we show that if  $x \in T_k \sim \{k\}$  and the unit sphere of  $E$  is locally uniformly convex at the point  $(k - x)/\|k - x\|$ , then  $]x, k[ \subset \text{int } T_k$ . It may be assumed without loss of generality that  $x = 0$  and  $\|k\| = 1$ . By the definition (Lovaglia [12]) of local uniform convexity at the point  $k$  of the unit sphere, for each  $\varepsilon \in ]0, 2]$  there is a  $\delta(\varepsilon) > 0$  such that for each point  $y$  with  $\|y\| \leq 1$  and  $\|y - k\| \geq \varepsilon$ , it is true that  $\|k + y\| \leq 2(1 - \delta(\varepsilon))$ .

Assuming without loss of generality that  $\delta(\varepsilon) < \varepsilon$ , we claim that  $\varepsilon k + q \in T_k$  for all

$$\varepsilon < \frac{1}{3} \min \{1, d_{K \sim \{k\}}(k)\} \quad \text{and} \quad \|q\| < \varepsilon \delta(\varepsilon).$$

In view of the starshapedness already established, this implies  $]x, k[ \subset \text{int } T_k$ . Suppose the claim fails, whence for some  $\varepsilon$  and  $q$  as described there exists

$$l \in P_K(\varepsilon k + q) \quad \text{with} \quad \|l - k\| \geq d_{K \sim \{k\}}(k) > 3\varepsilon.$$

Since  $\|\varepsilon k + q\| < 1 \leq \|l\|$ , the segment  $[\varepsilon k + q, l]$  includes a point  $y$  of norm 1, and it is true that

$$\|\varepsilon k + q - y\| \leq \|\varepsilon k + q - l\| < \|\varepsilon k + q - k\| \leq (1 - \varepsilon)\|k\| + \|q\| < 1 - \varepsilon + \varepsilon \delta < 1,$$

$$\|\varepsilon k + q - y\| \geq \|y\| - \|\varepsilon k + q\| > 1 - 2\varepsilon,$$

$$\|y - l\| = \|\varepsilon k + q - l\| - \|\varepsilon k + q - y\| < 1 - (1 - 2\varepsilon) = 2\varepsilon,$$

and hence

$$\|y - k\| \geq \|l - k\| - \|y - l\| > 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon.$$

It is also true that

$$\|k - y\| \leq \|\varepsilon k + q - y\| + \|q\| < 1 - \varepsilon + 2\varepsilon \delta.$$

Since

$$k + y = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)y + \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon k - y),$$

it follows that

$$\|k+y\| \cong \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\|y\| - \frac{1}{\varepsilon}\|ek-y\| > \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon}(1 - \varepsilon + 2\varepsilon\delta)$$

whence

$$\|k+y\| > 2(1 - \delta(\varepsilon))$$

and from the contradiction we conclude that the set  $T_k$  is indeed the closure of its interior.

Note, finally, that since

$$T_k = \bigcap_{l \in K \sim \{k\}} H(k, l) \quad \text{with} \quad H(k, l) = \{x \in E: \|x-k\| \leq \|x-l\|\},$$

and since, when  $E$  is an inner-product space,  $H(k, l)$  is the closed halfspace defined by the inequality

$$2\langle x, l-k \rangle \leq \langle l, l \rangle - \langle k, k \rangle,$$

it is obvious that tiles are convex in this case.  $\square$

Papers by Kalisch and Strauss [7] and Panda and Kapoor [14] are related to Theorem 3.1, for they study the structure of subsets of a Banach space consisting of all points equidistant from two given points.

In the following theorem,  $l^p(n)$  denotes the Banach space of all real-valued functions  $x$  on a set  $I$  of cardinality  $n$  such that  $\sum_{i \in I} |x(i)|^p < \infty$ ; of course,

$$\|x\| = \left(\sum_{i \in I} |x(i)|^p\right)^{1/p}.$$

**THEOREM 3.2.** *If  $1 \leq p < \infty$  and  $n$  is an infinite cardinal for which  $n^{n_0} = n$ , then the space  $l^p(n)$  contains a  $2^{1/p}$ -dispersed proximal set  $K$  such that  $d_K(x) \leq 1$  for each  $x \in l^p(n)$ . Let  $T_k = \{x: k \in P_K(x)\}$  and let  $\mathcal{T} = \{T_k: k \in K\}$ . Then  $\mathcal{T}$  is a point-finite nonprotective tiling of the space by bounded starshaped tiles. Each tile  $T_k$  contains the ball of radius  $2^{(1-p)/p}$  centered at  $k$  and is contained in the ball of unit radius centered at  $k$ . When  $p=2$  all tiles are convex and when  $p=1$  they are pairwise disjoint translates of the unit ball.*

**PROOF.** Given the existence of the set  $K$  as described, the rest is obvious when  $p=1$ . When  $1 < p < \infty$ , starshapedness of the tiles (convexity when  $p=2$ ) follows from Theorem 3.1 and the fact that  $l^p(n)$  is uniformly convex. For point-finiteness, note that by a theorem of Burlak, Rankin and Robertson [1], the unit ball of  $l^p(n)$  does not contain an infinite  $2^{1/p}$ -dispersed subset. Nonprotectiveness is then a consequence of point-finiteness, Corson's theorem [2], and Theorem 1.1.

The existence of  $K$  was proved in [8] under the additional assumption that  $n$  is regular, but W. Henson has pointed out that this assumption is superfluous. Indeed, assume merely that  $n^{n_0} = n$ , let  $r = (2^n)^+$ , the successor of the cardinal  $2^n$ , and let  $I$  be a set of cardinality  $r$ . Since  $r$  is regular and  $r^{n_0} = r$ , it follows from [8] that the space  $l^p(r)$  of functions on the set  $I$  does contain a set  $K$  of the sort described.

Let the functions

$$k: l^p(r) \rightarrow K, \quad \sigma: l^p(r) \rightarrow 2^I$$



be such that for each  $x \in I^p(r)$ ,

$$k(x) \in P_K(x), \quad \sigma(x) = \{x \in I: x(i) \neq 0\}.$$

For each subset  $S$  of  $I$  let

$$E(S) = \{x \in I^p(r): \sigma(x) \subset S\}.$$

Let  $S_0$  be a subset of  $I$  of cardinality  $n$ , and construct the sequences

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_\beta \subset \dots \quad \text{and} \quad S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_\beta \subset \dots \quad (\beta < \omega_1)$$

inductively as follows:

$$\text{when } \beta \text{ is a limit ordinal, } K_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} K_\alpha \text{ and } S_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} S_\alpha;$$

when  $\beta = \alpha + 1$ ,

$$K_\beta = K_\alpha \cup k(E(S_\alpha)) \quad \text{and} \quad S_\beta = S_\alpha \cup \sigma(K_\beta).$$

In the latter case,

$$|S_\beta \sim S_\alpha| \leq |\sigma(K_\beta \sim K_\alpha)| \leq \aleph_0 |k(E(S_\alpha))| \leq \aleph_0 |E(S_\alpha)| \leq \aleph_0 |S_\alpha|^{\aleph_0} 2^{\aleph_0},$$

and from  $|S_\alpha| = n = n^{\aleph_0}$  it follows that  $|S_\beta| = n$ . In the former case,

$$|S_\beta| \leq \aleph_0 \sup \{|S_\alpha|: \alpha < \beta\}$$

and when all the relevant  $|S_\alpha|$ s are equal to  $n$ , so is  $|S_\beta|$ . Hence, by induction,  $|S_\beta| = n$  for all  $\beta < \omega_1$ , and then with

$$K' = \bigcup_{\beta < \omega_1} K_\beta \quad \text{and} \quad S' = \bigcup_{\beta < \omega_1} S_\beta,$$

we have  $|S'| \leq 2^{\aleph_0} n = n$  and hence  $|S'| = n$ . The subspace  $E(S')$  is, in effect,  $I^p(n)$  and its subset  $K'$  has the desired properties.  $\square$

#### 4. Some open problems

The title question, "Do infinite-dimensional Banach spaces admit nice tilings?", is vague because "nice" has purposely not been defined. The tilings of Section 2 are nice in several respects, but their tiles are not norm-bounded. However, when  $E$  has an infinite-dimensional reflexive subspace, no tiling by bounded convex tiles can be locally finite [1]. The constructions of Section 3 are confined to a very limited class of spaces. The situation may be summarized by saying that for most choices of a classical infinite-dimensional Banach space  $E$ , the question "How nicely can  $E$  be tiled?" has not been definitively answered. A possible exception is the space  $(c_0)$ , where the natural lattice tiling by translates of the unit ball seems to be about as "nice" as one could wish.

It seems that for each separable infinite-dimensional reflexive space  $E$ , the following three questions are open:

- (1) Does  $E$  admit a tiling by bounded convex tiles?



(There is special interest in tilings such that not only are the tiles individually bounded, but there are two concentric balls  $B_1$  and  $B_2$  such that each tile  $T$  admits a translate  $T+x$  such that  $B_1 \subset T+x \subset B_2$ .)

(2) Does  $E$  contain a discrete proximal set  $K$  such that

$$\sup \{d_K(x) : x \in E\} < \infty?$$

(3) Does  $E$  contain a bounded closed convex set  $C$  that has nonempty interior and has only countably many exposed points?

When  $E$  is the separable Hilbert space ( $l^2$ ), a natural approach to (1) is to take the subset  $K$  of  $l^2(n)$  as in Theorem 3.2, choose a countably infinite subset  $M$  of  $K$ , represent ( $l^2$ ) as the closed linear hull  $H$  of  $M$ , and form the collection of all intersections  $T_k \cap H$  that have nonempty interior in  $H$ . However, this collection may fail to cover  $H$ . On the other hand, it follows from 3.1 that in the case of ( $l^2$ ), an affirmative answer to the question (2) implies an affirmative answer to (1).

Question (3) is related to tilings through the following theorem and remark where the term *body* means a closed set that has nonempty interior.

**THEOREM 4.1.** *Suppose that  $\mathcal{B}$  is a collection of convex bodies in a separable normed linear space  $E$ , and that no point of  $E$  is interior to two members of  $\mathcal{B}$ . For each  $B \in \mathcal{B}$ , let  $\mathcal{X}_B$  denote the set of all hyperplanes  $H$  in  $E$  such that for some point  $b$  of the boundary  $\partial B$ ,  $H$  is the unique hyperplane supporting  $B$  at  $b$ . If  $C \in \mathcal{B}$  and the set  $\mathcal{X}_C$  is uncountable, then there are uncountably many points  $c \in \partial C$  such that  $c$  belongs to no other member of  $\mathcal{B}$ .*

**PROOF.** For each  $H \in \mathcal{X}_C$ , let  $\varphi(H) \in \partial C$  be such that  $H$  is the unique hyperplane supporting  $C$  at  $\varphi(H)$ . The function  $\varphi: \mathcal{X}_C \rightarrow \partial C$  is an injection, so its range  $R$  is uncountable. For each  $B \in \mathcal{B} \sim \{C\}$ , the intersection  $B \cap C$  includes at most one point of  $R$ , for if  $r \in B \cap C \cap R$  and  $H$  is the hyperplane separating  $B$  and  $C$ , then  $H \in \mathcal{X}_C$  and  $\varphi(H) = r$ . Since  $\mathcal{B}$  is countable by separability, the stated conclusion follows.  $\square$

**REMARK 4.2.** *Suppose that  $\mathcal{B}$ ,  $C$  and  $c$  are as in (4.1), and  $S$  is a segment that is centered at  $c$  and not contained in  $\partial C$ . If  $\mathcal{B}$  is a tiling then  $S$  intersects infinitely many members of  $\mathcal{B}$ .*

In connection with (4.2), recall Corson's theorem [2] that for any covering of a reflexive space by bounded closed convex sets, there is a finite-dimensional parallelootope that intersects infinitely many members of the covering.

Note that if  $C$  is a bounded convex body in  $E$ , and  $0 \in \text{int } C$ , then the polar  $C^0$  is a bounded convex body in  $E^*$ . If  $E$  is reflexive, then so is  $E^*$ , and in this case the collection  $\mathcal{X}_C$  is uncountable if and only if the body  $C^0$  has uncountably many exposed points. When  $E$  is reflexive and infinite-dimensional, it follows from a theorem of Lindenstrauss and Phelps [10] that  $C^0$  has uncountably many extreme points, but they show also that the number of *strongly* exposed points may be countable. Their results do not settle question (3).

A tiling of a normed linear space  $E$  is both a sparsest covering and a densest packing (no point interior to two of its members). However, it appears that in order

to achieve this for most infinite-dimensional  $E$ , one must tolerate tiles whose shapes (as in Section 2) or arrangement (as in Section 3) are not as nice as one would wish. This suggests fixing on a nice convex body  $B$  and seeking an additive subgroup  $S$  of  $E$  such that at least the following conditions are satisfied, for  $\lambda$  not too large:

$P_S(B)$  — the collection  $\{B+s: s \in S\}$  is a packing;

$C_S(\lambda B)$  — the collection  $\{\lambda B+s: s \in S\}$  is a covering.

That has been accomplished by Rogers [16] for an arbitrary Banach space  $E$ , using an arbitrary  $\lambda > 3$  and taking for  $B$  the unit ball  $U$  of  $E$ . It would be interesting to know whether there is a fairly nice tiling of the form  $\{T_s: s \in S\}$  with  $U+s \subset T_s \subset \subset \lambda U+s$  for each  $s \in S$ . In seeking such a tiling, it is natural to study maximal members of  $\mathcal{P}$  and minimal members of  $\mathcal{C}$ , where  $\mathcal{P}$  (resp.  $\mathcal{C}$ ) is the collection of all convex bodies  $B$  in  $E$  such that  $P_S(B) \langle C_S(B) \rangle$  holds and  $U \subset B \subset \subset \lambda U$ . However, it appears (superficially, at least) that while there are maximal members  $B_0$  of  $\mathcal{P}$ , the collection  $\{B_0+s: s \in S\}$  need not be a covering; and that there may not be any minimal members of  $\mathcal{C}$ .

#### REFERENCES

- [1] BURLAK, J. A. C., RANKIN, R. A. and ROBERTSON, A. P., The packing of spheres in the space  $l_p$ , *Proc. Glasgow Math. Assoc.* 4 (1958), 22—25. *MR* 22 #9917.
- [2] CORSON, H. H., Collections of convex sets which cover a Banach space, *Fund Math.* 49 (1960/61), 143—145. *MR* 23 #A2732.
- [3] DELONE, B. N., GALIULIN, R. V. and ŠTOGRIN, M. I., The contemporary theory of regular decompositions of the Euclidean space, In: Fedorov, E. S., *Regular partitions of plane and space*, Nauka, Leningrad, 1979, 235—260 (in Russian).
- [4] GODUN, B. V. and KADEČ, M. I., Banach spaces without complete minimal systems, *Funkcional. Anal. i Priložen.* 14 (1980), 67—68. *MR* 82a: 46014.
- [5] GRÜNBAUM, B. and SHEPHARD, G. C., Tilings with congruent tiles, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* 3 (1980), 951—973. *MR* 81k: 51014.
- [6] GRÜNBAUM, B. and SHEPHARD, G. C., *Tilings and patterns*, W. H. Freeman, New York, 1986.
- [7] KALISCH, G. K. and STRAUS, E. G., On the determination of points in a Banach space by their distances from the points of a given set, *An. Acad. Brasil. Ci.* 29 (1957), 501—519. *MR* 20 #3441.
- [8] KLEE, V., Dispersed Chebyshev sets and coverings by balls, *Math. Ann.* 257 (1981), 251—260. *Zbl* 453: 41021; *MR* 84e: 41036.
- [9] KÖTHE, G., *Topological vector spaces, I*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159, Springer-Verlag, New York, 1969. *MR* 40 #1750.
- [10] LINDENSTRAUSS, J. and PHELPS, R. R., Extreme point properties of convex bodies in reflexive Banach spaces, *Israel J. Math.* 6 (1968), 39—48. *MR* 38 #2577.
- [11] LINDENSTRAUSS, J. and TZAFRIRI, L., *Classical Banach spaces I. Sequence Spaces*, Lecture notes in mathematics, Vol. 338, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1973. *MR* 54 #3344.
- [12] LOVAGLIA, A. R., Locally uniformly convex Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 78 (1955), 225—238. *MR* 16—596.
- [13] MARKUŠEVIČ, A. I., Sur les bases (au sens large) dans les espaces linéaires, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.)* 41 (1943), 227—229. *MR* 6—69.
- [14] PANDA, B. B. and KAPOOR, O. P., On equidistant sets in normed linear spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.* 11 (1974), 443—454. *MR* 50 #10763.
- [15] PLIČKO, A. N., A Banach space without a fundamental biorthogonal system, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 254 (1980), 798—802. *MR* 82a: 46015; *Soviet Math. Dokl.* 22 (1980), 450—453.

- [16] ROGERS, C. A., Lattices in Banach spaces, In: H. S. M. Coxeter-Festschrift, Ed. D. Gaier and G. Pickert, Math. Sem. Giessen 165 (1984), 155—167.
- [17] RYŠKOV, S. S. and BARANOVSKI, E. P.,  $S$ -types of  $n$ -dimensional lattices and primitive five-dimensional parallelohedra, *Trudy Mat. Inst. Steklov.* 137 (1976), pp. 131 (in Russian). *MR* 57 #9655.
- [18] SHELAH, S., On iterated forcing and on Banach spaces, *Notices Amer. Math. Soc.* 26 (1979), Abstract A—525.

(Received June 26, 1984)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
UNIVERSITY OF WASHINGTON, GN—50  
SEATTLE, WA 98195  
U.S.A.



## PACKING AND COVERING OF DISCRETE SPACE BY CERTAIN SPHERES

SÁNDOR SZABÓ

*To Professor László Fejes Tóth on his 70th birthday*

**1. Introduction.** Consider the set of  $n$ -tuples of integers with the metrics  $d(a, b) = |a_1 - b_1| + \dots + |a_n - b_n|$  and its corresponding spheres. We shall be interested in the question, "How well can translates of sphere pack and cover the integer point in space?". This question will be examined by algebraic and combinatorial techniques mainly in the setting of finite abelian groups.

The problem of this paper grows out of coding theory. Certain subset of  $n$ -tuples of integers are the code words and finding the best coding-decoding rules is equivalent to finding the densest packing of this set by spheres. For the details see [3], [8] and [10].

The problems of packings and coverings are presented in monographs [1] and [11]; most of their results refer to coverings and packings by convex bodies.

**2. Preliminaries.** Let  $\mathbf{Z}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbf{Z}\}$ , where  $\mathbf{Z}$  denotes the set of integers. We will say the set  $S(k, n) = \{a = (a_1, \dots, a_n) : a \in \mathbf{Z}^n, \sum_{i=1}^n |a_i| \leq k\}$  is an  $n$ -dimensional sphere with radius  $k$  or simply a  $(k, n)$ -sphere.

A family of integer translates of a  $(k, n)$ -sphere is an  $n$ -dimensional packing of  $\mathbf{Z}^n$  if its elements are pairwise disjoint; and it forms a covering if the union of its elements is  $\mathbf{Z}^n$ .

Our interest will focus primarily on the case when the set of translation vectors of the spheres forms an abelian group. In other words, we are interested in the lattice packings and coverings of  $\mathbf{Z}^n$ .

Let  $G$  be a finite abelian group written additively. If there exist elements  $g_1, \dots, g_n$  of  $G$  such that the elements  $\sum_{i=1}^n a_i g_i$ , where  $\sum_{i=1}^n |a_i| \leq k$ , are distinct, then we say that  $G$  has a  $(k, n)$ -packing. On the other hand, if these elements cover  $G$ , then we say that  $G$  has a  $(k, n)$ -covering. The system  $g_1, \dots, g_n$  is called a packing system and a covering system, respectively. Clearly, in the case of a packing system the  $g_i$  are distinct. We shall consider only covering systems in which the  $g_i$  are distinct. We can see that a permutation of a packing (covering) system is a packing (covering) system as well. Thus we may speak of a "packing set" and a "covering set". A set that is both a packing and a covering set will be called a "tiling set".

---

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 52A45; Secondary 20K01.

*Key words and phrases*. Packing and covering by cubistic cross polytopes, setting finite abelian groups.



Denote  $p(k, n)$  the order of the smallest group which has a  $(k, n)$ -packing and let  $c(k, n)$  be the order of the largest group which has a  $(k, n)$ -covering. Obviously,  $p(k, n) \leq |S(k, n)| \leq c(k, n)$ . The following two theorems show that  $|S(k, n)|/p(k, n)$  and  $|S(k, n)|/c(k, n)$  are the densities of the densest lattice packing and thinnest covering by  $(k, n)$ -spheres.

**THEOREM 1.** *If there exists a lattice packing (covering) by  $(k, n)$ -spheres with density  $d$ , there exists a finite abelian group  $G$  which has a  $(k, n)$ -packing (covering) and  $d = |S(k, n)|/|G|$ .*

**PROOF.**  $\mathbb{Z}^n$  is generated by the  $n$  vectors  $\mathbf{e}_1 = (1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 1)$ . Let  $L$  be the group of translation vectors of the spheres. Since the translates of the spheres form a packing (covering) the elements  $l + \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i$ ,  $l \in L$ ,  $\sum_{i=1}^n |a_i| \leq k$  are pairwise different (cover  $\mathbb{Z}^n$ ). Considering the factor group  $G = \mathbb{Z}^n/L$ , we have  $\{g_1, \dots, g_n\}$  is a packing (covering) set, where  $g_i$  is the coset containing  $\mathbf{e}_i$ .

If  $l_1, \dots, l_n$  is a basis for  $L$  then the density of the packing (covering) is  $d = |S(k, n)|/|\det(l_1, \dots, l_n)|$ . But  $|\det(l_1, \dots, l_n)| = |\mathbb{Z}^n/L| = |G|$ .

**THEOREM 2.** *If there exists a finite abelian group  $G$  which has a  $(k, n)$ -packing (covering), then there exists a lattice packing (covering) by  $(k, n)$ -spheres with density  $d = |S(k, n)|/|G^*|$ , where  $G^*$  is the subgroup of  $G$  generated by the packing (covering) set in  $G$ .*

**PROOF.** Let  $\{g_1, \dots, g_n\}$  be a packing (covering) set in  $G$  and consider the homomorphism  $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow G^*$  given by  $f(\sum_{i=1}^n t_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n t_i g_i$ , where  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ . The kernel of  $f$  is a subgroup of  $\mathbb{Z}^n$  and  $\mathbb{Z}^n/\text{Ker } f$  is isomorphic to  $G^*$ . Since  $\{g_1, \dots, g_n\}$  is a packing (covering) set in  $G$ , it is a packing (covering) set in  $G^*$ . Hence the elements  $l + \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i$ ,  $l \in \text{Ker } f$ ,  $\sum_{i=1}^n |a_i| \leq k$ , are pairwise different (cover  $\mathbb{Z}^n$ ). In other words, the translates of a  $(k, n)$ -sphere by elements of  $\text{Ker } f$  form a packing (covering) of  $\mathbb{Z}^n$ .

If  $\{l_1, \dots, l_n\}$  is a basis for  $\text{Ker } f$ , then the density of the packing or covering is  $d = |S(k, n)|/|\det(l_1, \dots, l_n)| = |S(k, n)|/|G^*|$  since  $|\det(l_1, \dots, l_n)| = |\mathbb{Z}^n/\text{Ker } f| = |G^*|$ .

**3. Results on  $p(k, n)$  and  $c(k, n)$ .** In some special cases  $c(k, n) = p(k, n)$ , in other words the  $(k, n)$ -spheres lattice tile  $\mathbb{Z}^n$ .

**THEOREM 3.** *For each positive integers  $k$  and  $n$   $p(k, 1) = c(k, 1)$ ,  $p(k, 2) = c(k, 2)$  and  $p(1, n) = c(1, n)$ .*

**PROOF.** The first two statements can easily be verified geometrically, but we will use Theorem 1 to obtain them algebraically. Let  $C(m)$  be the additive group of integers modulo  $m$ . Note that  $|S(k, 1)| = 2k + 1$ ,  $|S(k, 2)| = 2k^2 + 2k + 1$  and that  $\{1\}$  is a  $(k, 1)$ -tiling set of  $C(2k + 1)$  and  $\{1, 2k + 1\}$  is a  $(k, 2)$ -tiling set of  $C(2k^2 + 2k + 1)$ .

To prove the third statement in the theorem it is sufficient to note that  $|S(1, n)| = 2n + 1$  and  $\{1, 2, \dots, n\}$  is a  $(1, n)$ -tiling set of  $C(2n + 1)$ .

REMARK. According to [7], for composite  $2n+1$  there exist geometrically non-equivalent lattice tilings by  $(1, n)$ -spheres. Thus optimal packings and coverings are not necessarily unique.

Now we investigate  $(2, 3)$ -spheres, which do not lattice tile  $\mathbb{Z}^3$ . The next two theorems show that its  $\mathbb{Z}$ -lattice packing constant is  $25/27$  and its  $\mathbb{Z}$ -lattice covering constant is  $25/21$ .

THEOREM 4.  $p(2, 3) = 27$ .

PROOF. Obviously, a packing (covering) set is not uniquely determined; for example, its image under an isomorphism is a packing (covering) set as well. Moreover, its elements may be replaced by their inverses independently of each other. The set  $\{g_1, g_2, g_3\}$  is a  $(2, 3)$ -packing (covering) set of  $G$  if and only if the elements

$$(1) \quad \begin{aligned} &\pm g_1, \pm g_2, \pm g_3, \pm 2g_1, \pm 2g_2, \pm 2g_3, \\ &\pm g_1 \pm g_2, \pm g_1 \pm g_3, \pm g_2 \pm g_3, \pm g_1 \mp g_2, \pm g_1 \mp g_3, \pm g_2 \mp g_3 \end{aligned}$$

are pairwise different and nonzero (cover  $G \setminus \{0\}$ ). This suggests the construction of a graph on the element-inverse pairs of  $G$  such that  $[(g, -g), (2g, -2g)]$  are the directed edges of the graph for  $g \in G$ . If the edges  $[(g_1, -g_1), (2g_1, -2g_1)]$ ,  $[(g_2, -g_2), (2g_2, -2g_2)]$ ,  $[(g_3, -g_3), (2g_3, -2g_3)]$  and the vertices  $(g_1 + g_2, -g_1 - g_2)$ ,  $(g_1 + g_3, -g_1 - g_3)$ ,  $(g_2 + g_3, -g_2 - g_3)$ ,  $(g_1 - g_2, -g_1 + g_2)$ ,  $(g_1 - g_3, -g_1 + g_3)$ ,  $(g_2 - g_3, -g_2 + g_3)$  are disjoint, then  $\{g_1, g_2, g_3\}$  is a packing set of  $G$ . If these edges and vertices cover the vertices of the graph then  $\{g_1, g_2, g_3\}$  is a covering set of  $G$ .

It is easy to check that  $\{1, 4, 10\}$  is a  $(2, 3)$ -packing set of  $C(27)$ . Since  $25 = |S(2, 3)| \leq p(2, 3) \leq 27$ , all that remains is to prove that  $p(2, 3) \neq 25$  or  $26$ .

Assume that  $p(2, 3) = 25$ , that is, an abelian group  $G$  of order 25 has a  $(2, 3)$ -packing set  $T$ . According to the fundamental theorem of finite abelian groups either  $G = C(25)$  or  $G = C(5) + C(5)$ .

Suppose  $G = C(25)$  and consider the corresponding graph which consists of three disjoint cycles of lengths 10, 2 and 1, respectively (see Figure 1). The mapping  $g \rightarrow 2g$  is an automorphism of  $G$  and so it is a permutation of the element-inverse pairs of  $G$ . The previous graph is not other than the cycles of this permutation. The set  $T$  has at least two elements from the first cycle. Some power of the previous automorphism takes one of these elements into 1 so we may assume that  $1 \in T$ . The elements of  $T$  divide the cycle into arcs. Since we may rotate the cycle, we may assume that the arc between the first and second elements of  $T$  is the shortest. Thus the second element of  $T$  may be one of the elements 4, 8, 9, 7.

If  $1, 4 \in T$ , then the vertices of the edges  $[(1, -1), (2, -2)]$  and  $[(4, -4), (8, -8)]$  and the vertices  $(1+4, -1-4)$  and  $(1-4, -1+4)$  are occupied. These edges

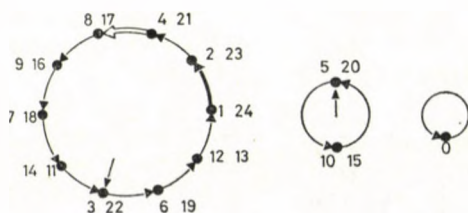


Fig. 1

and vertices are signed in Figure 1. Thus the last element of  $T$  may be one of the elements 9, 7, 6, but  $9-1=2 \cdot 4$ ,  $7+1=2 \cdot 4$ , and  $6-1=1+4$ .

The case  $1, 8 \in T$  is impossible because  $(-2) \cdot 8 = 8 + 1$ .

In case  $1, 9 \in T$  the vertices of the edges  $[(1, -1), (2, -2)]$  and  $[(9, -9), (2 \cdot 9, -2 \cdot 9)]$  and the vertices  $(1+9, -1-9)$  and  $(1-9, -1+9)$  are occupied. So  $T$  cannot have any element from the second cycle. Since the distance between 1 and 9 is the shortest,  $T$  cannot have any element from the first cycle.

If  $1, 7 \in T$ , then the last element may be either 5 or 10, but  $7-5=2 \cdot 1$  and  $-(7+1)=10+7$ . Thus  $C(25)$  does not have a packing set  $\{g_1, g_2, g_3\}$ .

Suppose  $G=C(5)+C(5)$  and consider the corresponding graph which consists of six cycles of length 2 and one cycle of length one. Each cycle has at most one element from  $T$  so  $T$  has at least one element from the 3rd, 4th, 5th, 6th cycles. If  $(i, j) \in T$  for  $1 \leq i, j \leq 4$ , then the inverse of the automorphism of  $C(5)+C(5)$  for which  $(1, 0) \rightarrow (i, 0)$  and  $(0, 1) \rightarrow (0, j)$  takes  $(i, j)$  to  $(1, 1)$ . Thus we may assume that  $(1, 1) \in T$ . The automorphism given by  $(1, 0) \rightarrow (0, 1)$  and  $(0, 1) \rightarrow (1, 0)$  leaves the 3rd cycle fixed and interchanges the first and second cycles and similarly the fourth and fifth cycles. So we may assume that the second element of  $T$  is one of the elements  $(1, 0), (2, 0), (1, 3), (2, 1)$ .

If  $(1, 1), (1, 0) \in T$ , then the possibilities for the last element are  $(1, 2), (2, 4), (1, 4), (2, 3)$  (since the second and the fifth cycles have occupied elements), but  $(1, 2) + (1, 0) = 2(1, 1)$ ,  $(2, 4) + (1, 1) = -2(1, 0)$ ,  $(1, 4) - (1, 0) = (0, 4)$ ,  $(2, 3) - (1, 1) = (1, 2)$ .

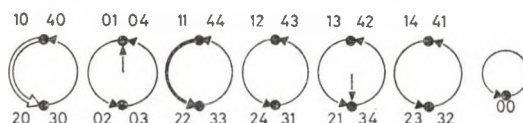


Fig. 2

If  $(1, 1), (2, 0) \in T$ , then the possibilities for the last element are  $(0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 1)$  since the fourth and the sixth cycles have occupied elements, but  $(0, 1) - (1, 1) = (3, 0)$ ,  $(0, 2) - (1, 1) = (3, 1)$ ,  $(1, 3) + (1, 1) = (2, 4)$ ,  $(2, 1) - (1, 1) = (1, 0)$ .

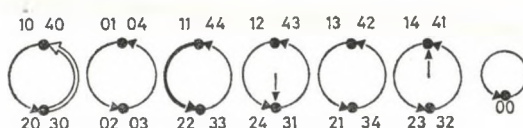


Fig. 3

If  $(1, 1), (1, 3) \in T$ , then  $T$  cannot have an element from the first two cycles since these cases may be reduced to the previous cases. The second and fourth cycles have occupied elements so the possibilities for the last element of  $T$  are  $(1, 4), (2, 3)$ , but  $(1, 4) - (1, 1) = (0, 3)$ ,  $(2, 3) + (1, 1) = (3, 4)$ .

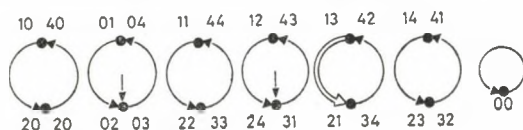


Fig. 4

If  $(1, 1), (2, 1) \in T$ , then the possibilities for the last element are  $(1, 2), (2, 4)$ , but  $(1, 2) + (1, 1) = (2, 3)$ ,  $(2, 4) - (1, 1) = (1, 3)$ .

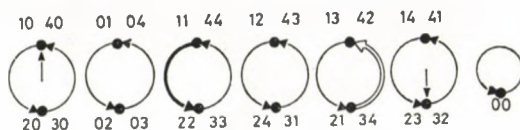


Fig. 5

Thus no packing set of  $C(5) + C(5)$ .

Finally, assume that  $p(2, 3) = 26$ , that is, an abelian group  $G$  of order 26 has a  $(2, 3)$ -packing set  $T$ . According to the fundamental theorem of finite abelian groups  $G = C(26)$ . Consider the corresponding graph. The even numbers of  $C(26)$  form a subgroup  $2 \cdot C(26)$  of  $C(26)$ . If the number of even numbers in  $T$  is 0, 1, 2, 3, then the number of even numbers among the elements (1) is 18, 12, 14, 24, respectively. Therefore  $T$  has one even and two odd elements and  $13 \notin T$  since  $2 \cdot 13 = 0$ . The automorphisms of  $C(26)$  defined by  $11 \rightarrow 1, 9 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 1, 7 \rightarrow 1$ , respectively, show that we may assume that  $1 \in T$ . The possibilities for the second element of  $T$  are 11, 9, 5, 3, 7 but we can neglect 9 and 3 because  $9 - 1 = -2 \cdot 9$  and  $3 - 1 = 2 \cdot 1$ . Figures 6, 7 and 8 show that the remaining cases are impossible as well. Thus there is no packing set of  $C(26)$ . This completes the proof.

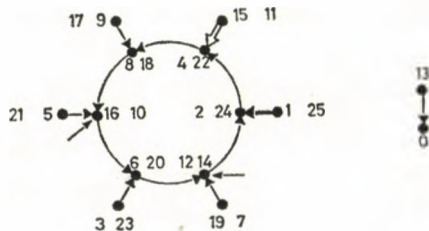


Fig. 6

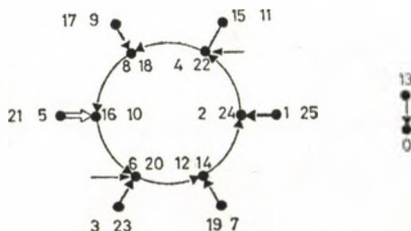


Fig. 7



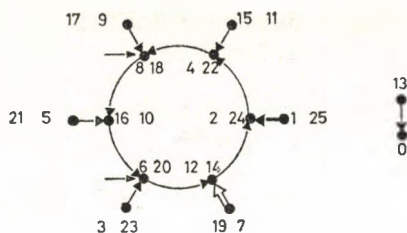


Fig. 8

THEOREM 5.  $c(2, 3) = 21$ .

PROOF. Since  $\{1, 4, 6\}$  is a  $(2, 3)$ -covering set of  $C(21)$  and  $21 \leq c(2, 3) \leq |S(2, 3)| = 25$  we must prove that  $c(2, 3)$  is not equal to 22, 23, 24, and 25.

Assume first that an abelian group  $G$  of order 22 has a  $(2, 3)$ -covering set  $T$ . Obviously,  $G = C(22)$ . Consider the corresponding graph. If the number of even numbers in  $T$  is 0, 1, 2, 3, then the number of odd numbers among the elements (1) is 6, 12, 10, 0, respectively.  $C(22)$  has 11 odds. Therefore  $T$  has two odd numbers and one even number. The system (1) has 24 elements and  $C(22) \setminus \{0\}$  has 21 elements so there are at most three duplications. Even if  $11 \in T$   $T$  has an odd element from the other component of the graph. We may assume that  $1 \in T$ . Then the elements 0, 10, 11, 12 are covered two times since  $2 \cdot 11 = 0$ ,  $-2 \cdot 11 = 0$ ,  $-(11 + 1) = 10$ ,  $11 - 1 = 10$ ,  $1 \cdot 11 = 11$ ,  $-1 \cdot 11 = 11$ ,  $11 + 1 = 12$ ,  $-(11 - 1) = 12$ . So  $11 \notin T$ . The second odd element of  $T$  may be 9, 7, 3, 5. We may neglect 7 and 3 because the pairs  $\pm 8$  and  $\pm 2$  are covered by  $\pm 2 \cdot 7$ ,  $\pm 7 \pm 1$  and  $\pm 2 \cdot 1$ ,  $\pm 3 \pm 1$ , respectively. Figures 9 and 10 show that the remaining cases are impossible as well because there is no room for the third element of  $T$ . Thus  $c(2, 3) \neq 22$ .

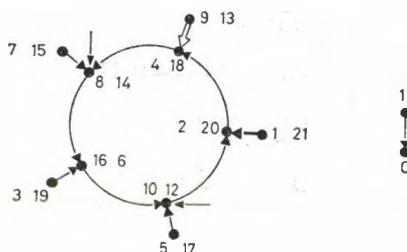


Fig. 9

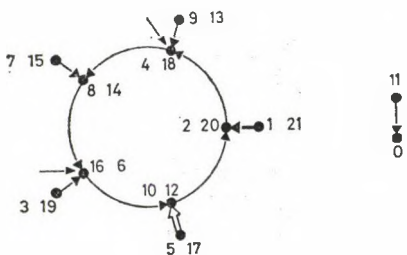


Fig. 10



Assume that an abelian group  $G$  of order 23 has a covering set  $T$ . Now  $G$  must be  $C(23)$ . Obviously, only one element-inverse pair may be covered two times by the elements of system (1). Consider the corresponding graph. We may assume that  $1 \in T$  and the distance between the first two elements of  $T$  is minimal.

$1, 2 \in T$  is impossible because  $\pm 1$  and  $\pm 2$  are covered by  $\pm 1 \cdot 1, \pm(2-1)$  and  $\pm 2 \cdot 1, \pm 1 \cdot 2$ , respectively.

If  $1, 4 \in T$ , then 7, 9, 5, 10, 3, 6, may be the third element of  $T$ . We can neglect 7, 9, 10, 6 because in order for  $\pm 3, \pm 5, \pm 9, \pm 5$  are covered by  $\pm(7-4), \pm(4-1); \pm 2 \cdot 9, \pm(9-4); \pm(10+4), \pm(10-1); \pm(6-1), \pm(1+4)$ , respectively.

When  $T = \{1, 4, 5\}$ , then  $\pm 5$  is covered by  $\pm(1+4)$  and  $\pm 1 \cdot 5$  and  $\pm 4$  is covered by  $\pm(5-1)$  and  $\pm 1 \cdot 4$ , a contradiction.

The case  $T = \{1, 4, 3\}$  is analogous.

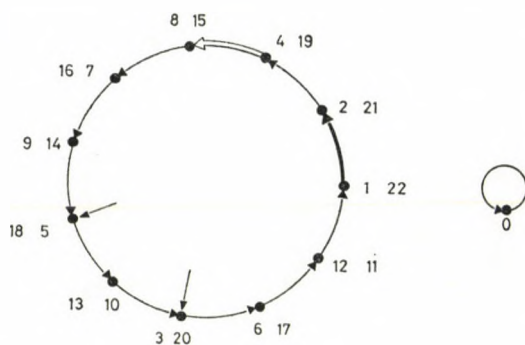


Fig. 11

If  $1, 8 \in T$ , then either 5 or 10 is the third element of  $T$ . Since  $\pm 2 \cdot 8 = \pm(8-1)$  there are two elements covered two times. If  $T = \{1, 8, 5\}$  or  $\{1, 8, 10\}$  then  $2 \cdot 5 = -(8 \pm 5)$  and  $1 \cdot 2 = 10 - 8$  a contradiction. Thus  $c(2, 3) \neq 23$ .

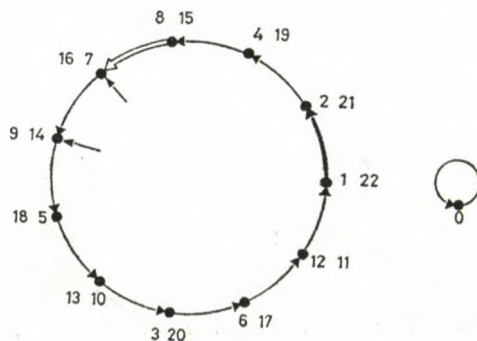


Fig. 12

Assume that an abelian group  $G$  of order 24 has a  $(2, 3)$ -covering set  $T$ .  $G$  may be  $C(24)$ ,  $C(2)+C(12)$  and  $C(2)+C(2)+C(6)$  in which in order 1, 3, and 7 is the number of the elements of order two. The system (1) has 24 elements and  $G \setminus \{0\}$  has 23 elements, so there is only one duplication in (1). Let  $g \in G$  have order two. First of all  $g \notin T$  because  $1 \cdot g = g$ ,  $-1 \cdot g = g$ ,  $2g = 0$  and  $-2g = 0$ . If  $g = g_i + g_j$  or  $g_i - g_j$ , then  $g = -g_i - g_j$  or  $-g_i + g_j$ , respectively. If  $g = 2g_i$ , then  $g = -2g_i$ . Therefore  $G$  has only one element of order two and so  $G = C(24)$ . Moreover, no element in  $T$  has order two. We have already known that the number of odd numbers of system (1) is 6, 12, 10, 0 depending on whether  $T$  has 0, 1, 2, or 3 even numbers.  $C(24)$  has 12 odd numbers so  $T$  has one even and two odds. Consider the corresponding graph. The greater component has to have an odd element from  $T$ . So we may assume that  $1 \in T$  since there are unique automorphisms of  $C(24)$  such that  $5 \rightarrow 1$ ,  $7 \rightarrow 1$ ,  $11 \rightarrow 1$ , respectively. The other odd element of  $T$  may be 5, 7, 9, 3 but Figures 13, 14, 15 and 16 show that there is no room for an even element in  $T$ . Thus  $c(2, 3) \neq 24$ .

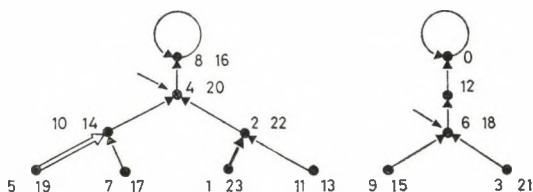


Fig. 13

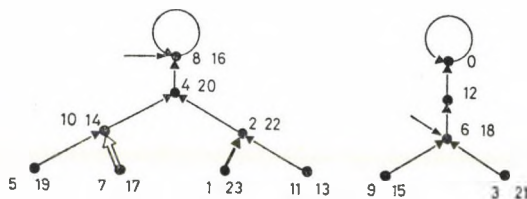


Fig. 14

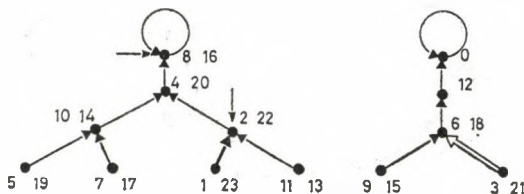


Fig. 15

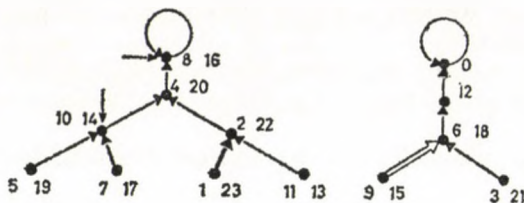


Fig. 16

Finally, assume that an abelian group  $G$  of order 25 has a  $(2, 3)$ -covering set. Then this system is a packing set as well, but we have already proved that this is impossible. This completes the proof.

The next result gives information on the density of densest sphere packings in higher dimensions.

**THEOREM 6.** For positive integers  $k, m, n$   $p(k, m+n) \leq p(k, m) \cdot p(k, n)$ .

**PROOF.** Suppose  $T = \{g_1, \dots, g_m\}$  and  $T' = \{g_{m+1}, \dots, g_{m+n}\}$  are  $(k, m)$ - and  $(k, n)$ -packing sets of abelian groups  $G$  and  $G'$  of orders  $p(k, m)$  and  $p(k, n)$ , respectively. Then  $\{(g_1, 0), \dots, (g_m, 0), (0, g_{m+1}), \dots, (0, g_{m+n})\}$  is a  $(k, m+n)$ -packing set of the direct sum  $G + G'$ . Indeed, if  $\sum_{i=1}^{m+n} |a_i| \leq k$  and  $\sum_{i=1}^{m+n} |b_i| \leq k$ , then from

$$\sum_{i=1}^m a_i(g_i, 0) + \sum_{i=m+1}^{m+n} a_i(0, g_i) = \sum_{i=1}^m b_i(g_i, 0) + \sum_{i=m+1}^{m+n} b_i(0, g_i)$$

it follows that

$$\sum_{i=1}^m a_i g_i = \sum_{i=1}^m b_i g_i \quad \text{and} \quad \sum_{i=m+1}^{m+n} a_i g_i = \sum_{i=m+1}^{m+n} b_i g_i.$$

Since  $T$  and  $T'$  are packing sets and  $\sum_{i=1}^m |a_i| \leq k$ ,  $\sum_{i=1}^m |b_i| \leq k$ ,  $\sum_{i=m+1}^{m+n} |a_i| \leq k$ ,  $\sum_{i=m+1}^{m+n} |b_i| \leq k$ , we have  $a_i = b_i$  for  $1 \leq i \leq m+n$ , which completes the proof.

#### 4. Examples. This section illustrates the theorems.

We have seen that  $\{1, 2k+1\}$  is a  $(k, 2)$ -packing set of  $C(2k^2+2k+1)$ . Theorem 6 shows that  $\{(1, 0), (2k+1, 0), (0, 1), (0, 2k+1)\}$  is a  $(k, 4)$ -packing set of  $C(2k^2+2k+1) + C(2k^2+2k+1)$ . According to Theorem 2, translates of a  $(k, 4)$ -sphere by linear combinations of vectors  $(2k^2+2k+1, 0, 0, 0)$ ,  $(2k+1, 0, -1, 0)$ ,  $(0, 2k^2+2k+1, 0, 0)$  and  $(0, 2k+1, 0, -1)$  form a packing in 4-dimensional space.

Observe next that  $\{(1, 0), (0, 2), (1, 1), (3, 5)\}$  is  $(2, 4)$ -packing set of  $C(7) + C(7)$ . The density of the corresponding packing is  $41/7^2 \doteq .83$  and the density of the previous one in case  $k=2$  is  $41/13^2 \doteq .24$ .

According to Theorem 3,  $\{1, 4, 10\}$  is a  $(2, 3)$ -packing set of  $C(27)$  so  $\{(1, 0), (4, 0), (10, 0), (0, 1), (0, 4), (0, 10)\}$  is a  $(2, 6)$ -packing set of  $C(27) + C(27)$ . This packing set is not optimal because  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 2), (1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 4, 3)\}$  is a  $(2, 6)$ -packing set of  $C(5) + C(5) + C(5)$ . The densities of the two latter packings are  $85/3^6 \doteq .12$  and  $85/5^3 \doteq .68$ .

**5. Open problems.** We may interpret the results of this paper as packings and coverings of the standard cube lattice by integer lattice translates of certain cubistic cross polytopes and this raise questions. We close with some of them.

(1) What are the integer lattice packing and covering constants in higher dimensional cases?

(2) What are the real lattice packing and covering constants? Are they always rationals?

(3) If a group has a  $(k, n)$ -packing (covering) set, then are there any cyclic group whose order is not greater (not smaller) than the order of the group and which has a  $(k, n)$ -packing (covering) set as well?

(4) What is the connection between the lattice and nonlattice packing and covering constants?

#### REFERENCES

- [1] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Zweite Auflage, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 65, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1972. MR 50 # 5603.
- [2] FEJES TÓTH, L., Punktverteilungen in einem Quadrat, *Studia Sci. Math. Hungar.* 6 (1971), 439—442. MR 45 # 5874.
- [3] GOLOMB, S., A general formulation of error metrics, *IEEE Trans. Information Theory* IT—15 (1969), 425—426. MR 39 # 5220.
- [4] HAJÓS, G., Über einfache und mehrfache Bedeckung des  $n$ -dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, *Math. Z.* 47 (1941), 427—467. MR 3—302.
- [5] HICKERSON, D. and STEIN, S. K., Abelian groups and packing by semicrosses, *Pacific J. Math.* 122 (1986), 95—109.
- [6] LOOMIS, P., The covering constant of a certain symmetric star body, *Österr. Akad. Wiss.* 192 (1983), 295—308.
- [7] MOLNÁR, E., Sui mosaici dello spazio di dimensione  $n$ , *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8) 51 (1971), 177—185. MR 46 # 8022.
- [8] NEMETZ, T., On a problem in coding theory, *Mat. Lapok* 29 (1977—1981), 61—69 (in Hungarian).
- [9] POST, K. A., On the existence of periodic tilings with cubistic cross-polytopes, Technological Univ. of Eindhoven, 1979.
- [10] RACSMÁNY, A., A packing problem in the space of points with integer coordinates, *Mat. Lapok* 31 (1978—1983), 169—174 (in Hungarian).
- [11] ROGERS, C. A., *Packing and covering*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 54, Cambridge University Press, New York, 1964. MR 30 # 2405.
- [12] STEIN, S. K., Algebraic tiling, *Amer. Math. Monthly* 81 (1974), 445—462. MR 49 # 4819.

(Received August 27, 1984)

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM  
ÉPÍTŐMÉRNÖKI KAR  
MATEMATIKA TANSZÉK  
SZTOCZEK U. 4. H. ÉP.  
H—1521 BUDAPEST  
HUNGARY

# THE TAMMES PROBLEM FOR $n=10$

L. HÁRS

*To Professor L. Fejes Tóth*

## Introduction

Let  $n$  points be situated on the unit sphere such that the least distance spanned by them attains its maximum. Let  $a_n$  denote this maximum value.

The problem to find  $a_n$  with the corresponding extremal point configurations was raised by the Dutch biologist Tammes [1] who examined the distribution of the openings on pollen grains of some plants. Dealing with this problem L. Fejes Tóth proved

$$(1) \quad a_n \leq \arccos \frac{\cot^2 \frac{n}{6n-12} \pi - 1}{2}$$

for all  $n$ , where equality holds for  $n=3, 4, 6$  and  $12$  ([2]). The corresponding extremal configurations of points are the vertices of a regular triangle, tetrahedron, octahedron and icosahedron, respectively, inscribed in the unit sphere.

For  $n=5, 7, 8, 9$  the Tammes problem was solved by Schütte and van der Waerden [3], for  $n=10$  and  $11$  by Danzer [4] and for  $n=24$  by Robinson [5]. For other values of  $n$  the extremum is not known, although many good configurations have been published (for example Székely [6]). We expect the extremal point arrangements to be highly irregular, and proofs must be very long.

Since Danzer's work [4] is hardly available we offer a short alternative proof for the case  $n=10$ , like it is done for  $n=11$  by Böröczky [7]. The case  $n=10$  is the most difficult one since the optimal arrangement has very few symmetry.

I have to express my gratitude to K. Böröczky for his useful suggestions.

## The Tammes problem for $n=10$

We consider 10 points on the unit sphere. We draw a graph on them such that the edges are spherical segments connecting pairs of points having the smallest distance  $a$ , spanned by the vertices. Such a graph is called minimal distance graph. If the points form an extremal configuration the graph is called extremal graph. It must have properties which reduce the number of graphs to be investigated. As follows we describe this kind of properties. A graph cannot be a minimal distance graph with arbitrary edge lengths and this also gives informations on  $a_{10}$ .



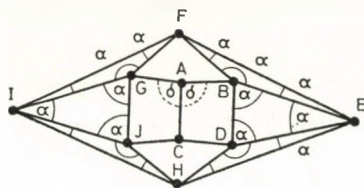


Fig. 1

An example where the graph is represented in the plane is shown by Fig. 1. The vertices connected by an edge make distance  $a$ , and other vertices are in larger distance from each other. We will prove that *this is the unique extremal graph*.

1. Let  $\alpha$  denote the angle of a regular spherical triangle of sides  $a$ . From the cosine theorem one can derive

$$(2) \quad \cos \alpha = \frac{\cos a}{1 + \cos a} \quad \text{or} \quad \cos a = \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Another useful equality holds for spherical rhombs of sidelength  $a$  and angles  $\beta$  and  $\gamma$ :

$$(3) \quad \cos a = \operatorname{ctg} \beta/2 \cdot \operatorname{ctg} \gamma/2 \quad \text{or} \\ f_a(\beta) := \gamma = 2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} (\cos a \cdot \operatorname{tg} \beta/2).$$

Formulae (3) are well-known for rectangular spherical triangles with angles  $\beta/2$  and  $\gamma/2$  and hypotenuse  $a$ . Since the diagonals cut the rhomb into 4 such triangles (3) immediately follows.

If  $\delta := \beta = \gamma$  is the angle of a square of side  $a$ , (3) implies

$$(4) \quad \cos a = \frac{1 + \cos \delta}{1 - \cos \delta} \quad \text{or} \quad \cos \delta = \frac{\cos a - 1}{\cos a + 1} = 2 \cos \alpha - 1.$$

In Fig. 1 the rhombs  $FGAB$  and  $HDCJ$  are isometric since their angles are equal (as it is easily seen at the vertices  $F$  and  $H$  of the rhomb  $EFIH$ ). This implies that the innermost rhombs  $ABDC$  and  $ACJG$  are squares, which gives an equality for the angles of the rhomb  $FGAB$  at  $F$  and  $A$

$$360^\circ - 2\alpha - f_a(360^\circ - 3\alpha) = 360^\circ - 2\delta$$

or

$$(5) \quad H(\alpha) := f_a(360^\circ - 3\alpha) - 2(\delta - \alpha) = 0.$$

We transform  $H(\alpha)$  preserving its sign. Since the tangent is an increasing function in  $(0, 90^\circ)$   $\tan(f_a(360^\circ - 3\alpha)/2) - \tan(\delta - \alpha)$  has the same sign as  $H(\alpha)$ . Substituting

$f_a$  from (3) yields

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \cot 3/2 \alpha - \frac{\tan \delta - \tan \alpha}{1 + \tan \delta \tan \alpha}.$$

Now since  $72^\circ = \alpha_{12} < \alpha < \alpha_6 = 90^\circ$  we have

$$\cot 3/2 \alpha = - \frac{\sin 3\alpha}{1 - \cos 3\alpha} = \frac{\sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)}{(\cos \alpha - 1)(2 \cos \alpha + 1)}.$$

According to (4)

$$\tan \delta = \frac{2\sqrt{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}}{2 \cos \alpha - 1}.$$

Substituting these formulas into  $H(\alpha)$ , we get

$$\tan \alpha \cdot \frac{1 - 2 \cos \alpha}{1 + 2 \cos \alpha} - \frac{2\sqrt{\cos \alpha - \cos^3 \alpha} - \tan \alpha (2 \cos \alpha - 1)}{2 \cos \alpha - 1 + 2 \tan \alpha \sqrt{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}}.$$

Here both denominators are positive:

$$\tan \alpha \sqrt{\cos \alpha - \cos^3 \alpha} = \sin \alpha \sqrt{1/\cos \alpha - 1} > \sin 72^\circ \sqrt{1/\cos 72^\circ - 1} = 1,42\dots$$

Multiplying by them we obtain:

$$2 \tan \alpha (2 \cos \alpha - 1) - 2((2 \cos \alpha - 1) \tan^2 \alpha + 2 \cos \alpha + 1) \sqrt{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}.$$

Expressing the tangent with cosine and multiplying by the positive factor

$$\frac{\cos^2 \alpha}{2\sqrt{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}} \text{ the function}$$

$$\sqrt{\cos \alpha (\cos \alpha + 1)} (2 \cos \alpha - 1) - (2 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 1)$$

still has the same sign. We have the difference of two negative terms therefore multiplying by their sum and  $-1$  gives the expression

$$H_1(\alpha) := 8 \cos^3 \alpha + 3 \cos^2 \alpha - 5 \cos \alpha + 1$$

having the same sign as  $H(\alpha)$ . In particular,  $H_1(\alpha) = 0$  is equivalent to (5). Since the polynomial  $8x^3 + 3x^2 - 5x + 1$  is a decreasing function for  $0 \leq x \leq 0.31 < \cos 72^\circ$ ,  $H_1$  is an increasing function of  $\alpha$ , and its unique root in  $(72^\circ, 90^\circ)$  is  $\cos \alpha^* = 0.287949273\dots$ . This gives

$$(6) \quad \alpha^* = 73.26477823\dots^\circ \quad a^* = 66.14682196\dots^\circ \approx 66^\circ 8' 49''$$

$$\delta^* = 115.0938015\dots^\circ$$

where  $a^*$  and  $\delta^*$  are the corresponding distance and angle, respectively. Now one can check that all the angles of the graph in Fig. 1 lie in  $[\alpha, 180^\circ)$ , therefore this graph corresponds to an arrangement of 10 points. Of course, the values computed above provide lower bounds for the corresponding extremal counterparts. On the

other hand, upper bounds can be derived from (1):

$$(7) \quad \begin{aligned} \alpha^* &\equiv \alpha_{10} \equiv 69.56171955...^\circ = 69^\circ 33' 42''... \\ \alpha^* &\equiv \alpha_{10} \equiv 75^\circ \quad \delta^* \equiv \delta_{10} < 118^\circ 50' < 120^\circ. \end{aligned}$$

2. Suppose that a vertex  $P$  of an extremal graph lies on a great circle  $C$  and no edge goes from  $P$  into one of the open hemispheres of  $C$ . It is easy to see that a graph consisting of a star and some isolated points cannot be an extremal one. Therefore if we move  $P$  into the empty hemisphere perpendicularly to  $C$  and by a sufficiently small distance, then in the resulting new graph  $P$  becomes isolated. Repeat this procedure until it is possible. By this we have only to deal with graphs having vertices of valencies 0 or at least 3, and the angles between neighbouring edges are in  $[\alpha, 180^\circ)$ . Since  $\alpha_{10} > 72^\circ$ , the possible valencies are 0, 3 or 4.

The triangle inequality implies that edges of a minimal distance graph cannot cross each other therefore the edges divide the sphere into convex polygonal domains, called faces.

Since a convex polygon cannot be longer than a great circle, and  $\alpha_{10} > 60^\circ$ , an extremal graph must have faces of 3, 4 or 5 vertices.

Triangles and rhombs can be covered by circular discs of radius  $a$  centered at the vertices, therefore only pentagons can contain isolated points. But a pentagon can contain at most one isolated point, otherwise we take the great circle through 2 isolated points. One of its hemisphere must contain at least 3 vertices of the pentagon, which together with the two isolated points form another convex pentagon covered by the original one, but having longer circumference, a contradiction.

In what follows we consider graphs derived from minimal distance graphs by deleting some edges, but we require all above described properties on angles, valencies, faces and isolated points to hold.

3. From (3) we get

$$\frac{d\gamma/2}{d\beta/2} = \frac{-\cos a}{(1 - \cos^2 a) \cos^2 \beta/2 + \cos^2 a}.$$

This is a decreasing function of  $\beta/2$ , hence  $\gamma$  is a concave function of  $\beta$ , and  $\beta + \gamma$  in a rhomb attains its minimum when  $\beta$  or  $\gamma$  takes its minimum, and the maximum is attained when  $\beta = \gamma = \delta$ . The distance of the opposite vertices are at least  $a$ , therefore

$$(8) \quad \alpha \equiv \beta, \gamma \equiv 2\alpha \quad 3\alpha \equiv \beta + \gamma \equiv 2\delta.$$

4. If a pentagonal face contains an isolated vertex, then

(a) any two neighbouring angles of the pentagon make a sum at least  $4\alpha$ ;

(b) any angle of the pentagon is at least  $360^\circ - 3\alpha$  and the pentagon is uniquely determined if one of its angles is of this minimum value.

*Proof* of (a). If the angles at  $A$  and  $B$  are greater than  $2\alpha$ , we are done. Suppose  $A \leq 2\alpha$ . We draw circles of radius  $a$  around  $B$  and  $E$ . They intersect at  $F$ . Since  $BE$  is at least  $a$  hence  $\alpha \leq A \leq 2\alpha$ , and the rhomb  $ABFE$  is of the type considered at § 3 having  $ABF \leq \alpha$ ,  $AEF \leq \alpha$ .  $FC, FD \equiv a$ , otherwise a circle of radius  $a$  around  $C$  or  $D$  leaves no room for the isolated point. Therefore  $FBC \leq \alpha$ ,  $FED \leq \alpha$ . By (8) we have  $A \leq \alpha + ABF \leq 3\alpha$ , and the proposition (a) is proved.

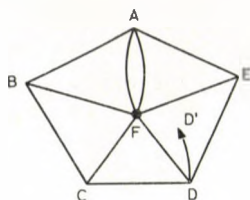


Fig. 2

*Proof of (b).* On Fig. 2 we move  $D$  keeping  $CD' = a$ , until  $FD' = a$ .  $CFD' \angle > \angle CFD \angle$  and  $\alpha \cong \angle CBF \angle < 2\alpha$ , ( $\angle ABC \angle < 180^\circ < 3\alpha$ ,  $\angle ABF \angle \cong \alpha$ ) show that  $BCD'F$  is a rhomb considered under § 3. For the angles at the point  $F$  we have

$$360^\circ - A \angle = 2\angle BFC - \angle DFD' + \angle DFE \angle,$$

$$\angle BFC \angle \text{ and } \angle DFE \angle \cong \alpha \text{ gives } A \angle \cong 360^\circ - 3\alpha.$$

Equality holds only if  $CF = FD = a$ . In this case  $C \angle = D \angle = 2\alpha$  and this determines the pentagon  $ABCDE$ .

5. (a) We show now that the maximum angle of a pentagonal face is strictly greater than  $2\alpha$ . Indeed, put five regular triangles together so as to form a regular pentagon. None of them can contain the centrum because  $5\alpha > 360^\circ$ . The statement is true for regular pentagons since the five triangles do not overlap.

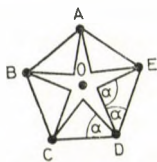


Fig. 3

If the angles of our pentagon at  $A$  and  $B$  are both at most  $2\alpha$  then we deform the regular pentagon keeping the length  $a$  of its sides until it takes the shape of our pentagon. First we decrease  $BE$  such that the pentagon remains symmetric. The angles at  $B$  and  $E$  increase. Now we fix the points  $A$ ,  $B$  and  $E$ , and decrease the angle at  $B$ . Since  $BD$  must increase,  $E \angle$  further increase, and will be greater than  $2\alpha$ .

(b) Let  $A \angle > 2\alpha$  be the maximum angle of the pentagonal face. Reflecting  $A$  in the line  $EB$  we get  $A'$ .

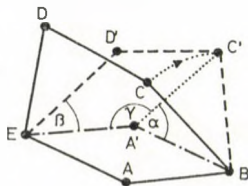


Fig. 4

Now  $DA', CA' > a$ . Otherwise, if e.g.  $CA' \leq a$  then, keeping  $BC' = a$ , we move  $C$  until  $C'A' = a$ .  $D$  moves also, keeping  $ED' = D'C' = a$ . Now  $D'A' > a$ , otherwise  $EA'C' \cong 2\alpha$  and summing the angles around  $A'$  we get  $5\alpha > 360^\circ$ .  $C \angle > C' \angle$  because  $DB > D'B$ , and  $A \angle$  was maximum, so

$$A \angle = 360^\circ - \gamma - \alpha > C \angle > C' \angle = \alpha + \beta$$

$$360^\circ - 2\alpha > \beta + \gamma.$$

This is impossible, since (8) assures  $\beta + \gamma \cong 3\alpha$  and  $5\alpha > 360^\circ$ .

(c) If an extremal graph had a pentagon not containing an isolated vertex, the reflection described in (b) would give a graph, where the point  $A'$  is isolable. It lies in a new face having more than five vertices, therefore other vertices become isolable. This shows that the original graph could not be extremal (Fig. 5).



Fig. 5

We conclude that if an extremal graph has a pentagonal face, this face must contain an isolated point.

6. We discard some graphs from considerations, which are special cases of other graphs:

(a) If two triangles have a common side, we substitute them by the rhomb of their vertices. This rhomb has angles  $\alpha$  and  $2\alpha$ .

(b) If at the vertex  $P$  a triangle and two rhombs meet, we substitute them by a pentagon formed by the vertices of the triangle and the rhombs and make  $P$  be isolated in the new pentagon. This pentagon is convex since its largest angle  $D \angle$  is convex (Fig. 6).

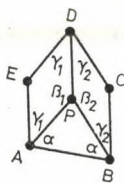


Fig. 6

Indeed, we know from § 3 that  $\gamma$  is a concave function of  $\beta$ .  $\beta_2 = (360^\circ - \alpha) - \beta_1$  determines  $\gamma_2$  and hence  $D \angle = \gamma_1 + \gamma_2$  is also a concave function of  $\beta_1$ . It is a symmetric function, thus it takes maximum at the midpoint  $\beta_1 = (360^\circ - \alpha)/2$ . By (3) the inequality

$$\cos \alpha \cdot \tan \frac{360^\circ - \alpha}{4} > \cot 180^\circ/4 = 1$$



is to be verified. Substituting the upper bounds from (7) we get  $1.0287... > 1$ , thus the angle  $D \angle$  is convex.

Repeating the operations of (a) and (b) the result is a graph having all the properties stated earlier but no two triangles have a side in common and two rhombs cannot meet a triangle around a vertex.

7. If an extremal graph has two pentagonal faces both containing an isolated point, then the pentagons must have 2 vertices in common and they are neighbours on both faces. Faces are convex polygons. In each pentagons the angles on the common side make a sum at least  $4\alpha$  (see §4 (a)), and the angles at the common vertices outside the pentagons are also  $\cong \alpha$ . Altogether  $10\alpha > 2 \cdot 360^\circ$ , a contradiction.

It means that the graph has at most one pentagonal face with one isolated point in it.

8. (a) Suppose that a graph reduced as in §6 has no pentagonal face, i.e. its faces are triangles and quadrangles. If there is a triangular face, according to §6 (a), each side is common with a rhomb. By §6 (b), these rhombs do not have common sides, thus at the vertices of the triangle there are at least  $\alpha$  angles between the rhombs. We add the angles around the vertices of the triangle. By (8), each rhomb gives at least  $3\alpha$ . With the inner angles of the triangle, the sum is  $15\alpha > 3 \cdot 360^\circ$ , what is impossible. Therefore the faces are rhombs.

(b) Let  $V$  denote the number of vertices with valency 3, then  $10 - V$  vertices have valency 4 (see §2). Let  $E$  denote the number of edges and  $F$  the number of faces. Euler's theorem implies  $10 + F = E + 2$ . Each face is a quadrangle, hence  $4F = 2E$ .

By counting the edges at the vertices we get  $3V + 4(10 - V) = 2E$ . The solution of this system of equation is  $F = 8$ ,  $E = 16$ ,  $V = 8$ .

(c) Thus, our graph has two vertices of valency 4. They do not belong to the same edge, otherwise let us consider the angles around them: the two rhombs on this side give  $2 \cdot 3\alpha$  ((8)). The other four angles give at least  $\alpha$  each, altogether  $10\alpha$ . However,  $10\alpha > 2 \cdot 360^\circ$ , a contradiction.

(d) We consider the four rhombs meeting at vertex  $C$  of valency 4. The distinctly drawn vertices of Fig. 7 are all different. Indeed, two faces have common vertices only at their common side.

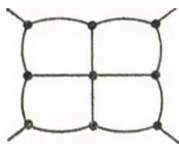


Fig. 7

Four edges remained, and at the four corner points there must exist more edges. These edges cannot go to the neighbouring corner points, because they would form triangles. Two opposite corner points cannot be connected either, because they would form two pentagons with ingoing edges. One of this edges cannot have other endpoint.

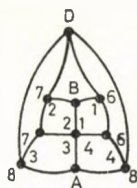


Fig. 8

(e) These show that the missing vertex  $D$  is of valency 4, and the corner points are connected to it. See Fig. 8. Considering the angles around some vertices we have

$$\text{I: } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^\circ$$

$$\text{II: } \alpha_1 + \alpha_5 + \alpha_6 = 360^\circ$$

$$\text{III: } \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_7 = 360^\circ$$

$$\text{IV: } \alpha_3 + \alpha_7 + \alpha_8 = 360^\circ$$

$$\text{V: } \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 = 360^\circ.$$

(In Fig. 8 the indices of these angles are shown only.) By the combination  $\text{I} + \text{II} - \text{III} + \text{IV} - \text{V}$  we obtain  $2\alpha_1 + 2\alpha_3 = 360^\circ$ . The graph looks the same from  $C$  and  $D$ , thus at a vertex of valency 4 the two opposite angles make a sum of  $180^\circ$ .

(f) Now we show that for  $a \geq a^*$  this graph cannot exist. Sum up the angles around all the vertices. Each angle at the vertices of valency 4 occurs once more, at the opposite vertices of the corresponding rhombs. These angles give  $4 \cdot 360^\circ$ . Using (3) the remaining angles can be expressed with them. (The angles  $\beta_i$  are defined analogously to  $\alpha_i$ , changing the role of  $C$  by  $D$ .)

$$6 \cdot 360^\circ = \sum_{i=1 \dots 8} (f_a(\alpha_i) + f_a(\beta_i)).$$

We choose the notation (having in mind (c)) such that

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_4 = 180^\circ - \alpha_2 \leq \alpha_3 = 180^\circ - \alpha_1.$$

Since  $f_a(x)$  is a concave function of  $x$  (§ 3),  $f_a(x) + f_a(180^\circ - x)$  attains its minimum ( $x < 180^\circ - x$ ) when  $x$  is the smallest possible. The smallest value for  $\alpha_1$  is  $\alpha$  ( $f_a(\alpha) = 2\alpha$ ).

For  $\alpha_2$  a stronger lower bound is needed. At the point  $B$  in Fig. 8 we have  $360^\circ - f_a(\alpha_1) - f_a(\alpha_2) \geq \alpha$ . This gives  $f_a(\alpha_2) \leq 180^\circ - \alpha/2$  or  $\alpha_2 \geq f_a(180^\circ - \alpha/2)$ . The same applies to the angles  $\beta_i$ , too, thus

$$6 \cdot 360^\circ \geq 4[2\alpha + f_a(180^\circ - \alpha) + 180^\circ - \alpha/2 + f_a(180^\circ - f_a(180^\circ - \alpha/2))]$$

or

$$360^\circ \geq 3/2\alpha + f_a(180^\circ - \alpha) + f_a(180^\circ - f_a(180^\circ - \alpha/2)).$$

Here each term is increasing function of  $a$  therefore this inequality must hold at least with the smallest value of  $a$ , i.e. with  $a^*$ . But the right-hand side is  $360.2357^\circ \dots$ , a contradiction.

Therefore an extremal graph has one pentagonal face with one isolated point in it.

9. In this section, we put back the deleted edges.

Suppose a vertex on the pentagonal face has valency 4. According to § 4 (b), the angles outside of the pentagon must all be  $\alpha$ , and we have the subgraph which is shown in Fig. 9.  $A, B, G$  and  $E, D, H$  are 3 vertices of two rhombs, respectively.

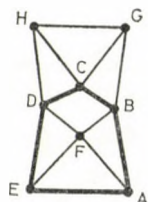


Fig. 9

( $CBA \triangleleft$  and  $CDE \triangleleft > 360^\circ - 3\alpha$ .) If the fourth vertices  $I$  and  $J$  are identical, no room is left for the tenth vertex. Thus we get a hexagon  $IHGJAE$  with concave angles at  $I$  and  $J$ . They must be connected by an edge. The resulting graph is isomorphic with the graph of Fig. 1.

Therefore, from now on, we have to consider graphs, as possible extremal graphs, which have one pentagonal face, and the vertices of this face are of valency 3.

10. (a) At most one triangle has common side with the pentagonal face. Indeed, if two triangles are attached to the pentagon, they cannot lie on neighbouring sides, since their common vertex would have valency 4. Thus we have the subgraph in Fig. 10, and no room is left for the tenth vertex.

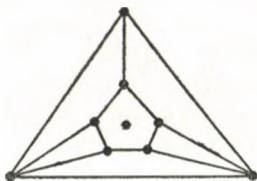


Fig. 10

(b) If all the adjacent faces of the pentagon are rhombs, then we sum the angles around the vertices of the pentagon. The angles of the rhombs make at least  $5 \cdot 3\alpha$ . One angle of the pentagon is larger than  $2\alpha$  (§ 5 (a)) and the two pairs of the other angles each contribute  $4\alpha$  to the sum (§ 4 (a)). Altogether, the sum is  $25\alpha > 5 \cdot 360^\circ$ , which is absurd.

11. We have to consider graphs where there is one adjacent triangle to the pentagonal face. The graph is shown on Fig. 11 (it may have some more edges).

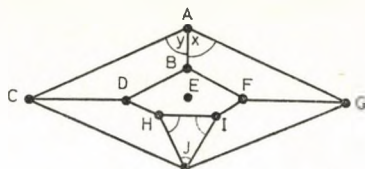


Fig. 11

This graph does not determine uniquely its angles, i.e. the point arrangement. The angles  $x$  and  $y$  in Fig. 11 can be used to express other ones as follows.

$$\begin{aligned}
 AGF \angle &= f_a(x), \quad ACD \angle = f_a(y), \quad CAG \angle = CJG \angle = 360^\circ - x - y, \\
 AGJ \angle &= ACJ \angle = f_a(360^\circ - x - y) \\
 (9) \quad FGJ \angle &= 360^\circ - f_a(x) - f_a(360^\circ - x - y) \\
 DCJ \angle &= 360^\circ - f_a(y) - f_a(360^\circ - x - y).
 \end{aligned}$$

The sum of the angles around vertex  $J$  is  $360^\circ$ . This is expressed by

$$(10) \quad F(a, x, y) := f_a(FGJ \angle) + f_a(DCJ \angle) + \alpha - x - y = 0.$$

We have to maximize  $a$  such that  $x$  and  $y$  exist satisfying (10) and also the following constraints:

“the angles are at least  $\alpha$ ”

and

“there is room in the pentagonal face for the isolated point”

are not violated. There are two cases:

(a) There exists a maximum  $a'$  for  $a$  such that (10) is true with some  $x'$ ,  $y'$  and the constraints are strictly satisfied, i.e. the angles other than those of the triangle are greater than  $\alpha$ , and there is a domain of positive area in the pentagon for the isolated point. In this case:  $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$  at  $(a', x', y')$ .

(b) If such an  $a'$  does not exist then some constraint is not strictly satisfied at the maximum value of  $a$  while (10) is true. If an angle equals  $\alpha$ , then at least one more edge exists in the graph. If the admissible area for the isolated point is 0, then it means, that the isolated point is of distance  $a$  from three non neighbouring vertices of the pentagon.

12. The case of § 11 (a). Now  $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ . Calculating the derivatives of (10) and making use of (9) some terms cancel each other. We get

$$\begin{aligned}
 f'_a(x) \cdot f'_a([360^\circ - f_a(360^\circ - x - y)] - f_a(x)) &= \\
 = f'_a(y) \cdot f'_a([360^\circ - f_a(360^\circ - x - y)] - f_a(y)).
 \end{aligned}$$

This can only be true if  $x=y$ , because at § 3 we have seen that  $f_a$  is a decreasing function of  $x$ , and  $f'_a$  is negative and decreasing, too.

Putting  $x=y$ , in Fig. 11 we obtain  $CAG \sphericalangle = CJG \sphericalangle = 360^\circ - 2x$ ,  $IJG \sphericalangle = x - \alpha/2$ . Considering the angles around vertex  $G$  we get

$$(11) \quad \varphi_a(x) := f_a(x - \alpha/2) + f_a(x) + f_a(360^\circ - 2x) = 360^\circ.$$

This is equivalent to (10) because  $f_a(f_a(x)) = x$ . It is easily seen from (3) and § 3 that  $\varphi_a(x)$  is an increasing continuous function of  $a$  and a concave continuous function of  $x$ . Therefore, if the equation (11) can be solved for some  $a = a_0$  then it can also be solved for all  $a > a_0$  until the graph violates some of the constraints of § 11, in the contrary to the assumption having all the constraints strictly satisfied.

13. Therefore we have to consider the graph of Fig. 11 with at least one more edge outside of the pentagon, or three more edges adjacent to the isolated point, going to non-neighbouring vertices of the pentagon (§ 11 (b)).

If in the rhomb  $ACJG$  there were one more edge, say  $CG$ , then  $DBF$  would be concave (§ 6 (b)), impossible.

If an other rhomb has one more edge then the pentagon has a vertex of valency 4, and this was discussed in § 9.

Thus we have to consider three edges from the isolated point  $E$ . The symmetry leaves three cases discussed in the next 3 paragraphs.

14. If the edges  $EB$ ,  $EH$  and  $EI$  exist, delete edge  $IH$ . This gives the graph of § 8, already considered.

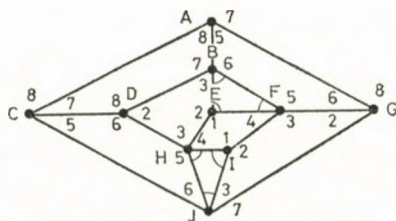


Fig. 12

15. Suppose that the edges  $EH$ ,  $EB$  and  $EF$  exist (Fig. 12). The rhombs  $IJGF$  and  $EBDH$  are isometric, since their angles at  $I$  and  $E$  are equal. Also the rhombs  $HDCJ$  and  $FGAB$  are isometric having equal angles at  $H$  and  $F$ . These imply that  $ABDC$  and  $GACJ$  are isometric rhombs, as well. Therefore the angles indexed by the same numbers in Fig. 12 are equal to each other.

In the rhomb  $ABDC$  we have  $\alpha_7 + \alpha_8 \leq 2\delta$  by (8). Since at vertex  $A$ ,  $\alpha_7 + \alpha_8 = 360^\circ - \alpha_6$  and at vertex  $F$ ,  $360^\circ - \alpha_5 = \alpha + \alpha_3 + \alpha_4$

$$(12) \quad \alpha_3 + \alpha_4 \leq 2\delta - \alpha.$$

In the rhomb  $EFIH$   $\alpha_4 = f_a(\alpha_1)$ , at vertex  $E$ :  $\alpha_2 = 360^\circ - \alpha - \alpha_1$  and in the rhomb  $BDHE$   $\alpha_3 = f_a(360^\circ - \alpha - \alpha_1)$ . Thus from (12) we get

$$(13) \quad f_a(\alpha_1) + f_a(360^\circ - \alpha - \alpha_1) \leq 2\delta - \alpha.$$



The left-hand side is a concave function of  $\alpha_1$  and symmetric to the value  $180^\circ - \alpha/2$ , thus it takes a minimum when  $\alpha_1$  is the smallest or largest possible, i.e.  $2\alpha$  or  $360^\circ - 3\alpha$ . With these values (13) must be true, and it takes the form  $H(\alpha) < 0$ . ( $H(\alpha)$  was defined in (5).) In § 1 we saw that the maximum  $a$  satisfying (13) is  $a^*$ . The graph becomes the same as in Fig. 1. ( $\alpha_7 = \alpha_8 = \delta$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 + \alpha$  and thus  $\alpha_2 = 2\alpha$ ,  $\alpha_3 = \alpha$ .)

16. The last case is with edges  $EF$ ,  $ED$  and  $EH$  (Fig. 13).

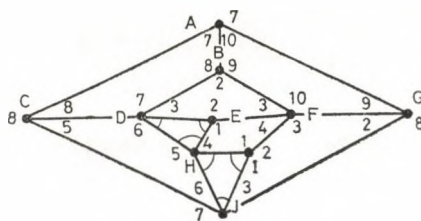


Fig. 13

At the nodes

$$H: \alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha = 360^\circ$$

$$C: \alpha_5 + 2\alpha_8 = 360^\circ$$

$$F: 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_{10} = 360^\circ$$

$$A: 2\alpha_7 + \alpha_{10} = 360^\circ$$

$$H - C + F - A: 2\alpha + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = 2\alpha_8 + 2\alpha_7.$$

Again we have  $\alpha_7 + \alpha_8 \leq 2\delta$  in the rhomb  $ABDC$ , and  $f_a(\alpha_2) = \alpha_3$  in the rhomb  $BDEF$ , and at the node  $E$ :  $\alpha_1 = 360^\circ - \alpha - \alpha_2$ , and in the rhomb  $EHIF$   $\alpha_4 = f_a(\alpha_1)$ . Putting these together:

$$f_a(\alpha_2) + f_a(360^\circ - \alpha - \alpha_2) \leq 2\delta - \alpha$$

which is the same inequality as in (13) for  $\alpha_2$ . Similar reasoning like in § 15 gives  $\alpha_2 = 2\alpha$ ,  $\alpha_3 = \alpha$ ,  $\alpha_7 = \alpha_8 = \delta$  and the graph has to be the same as the one in Fig. 1.

#### REFERENCES

- [1] TAMMES, P. M. L., On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen grains, *Rec. Trav. Bot. Neerl.* **27** (1930), 1—84.
- [2] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und in Raum*, Springer-Verlag, Berlin, 1953. *MR* **15**—248.
- [3] SCHÜTTE, K. and WAERDEN, B. L. VAN DER, Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz?, *Math. Ann.* **123** (1951), 96—124. *MR* **13**—61.
- [4] DANZER, L., Endliche Punktmengen auf der 2-Sphäre mit möglichst grossen Minimalabstand, Habilitationsschrift, Universität Göttingen, 1966.

- [5] ROBINSON, R. M., Arrangements of 24 points on a sphere, *Math. Ann.* **144** (1961), 17—48.  
MR 24 # A3565.
- [6] SZÉKELY, J., Sur le problème de Tammes, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **17** (1974), 157—175. MR 52 # 4141.
- [7] BÖRÖCZKY, K., The problem of Tammes for  $n=11$ , *Studia Sci. Math. Hungar.* **18** (1983), 165—171.

(Received August 27, 1984)

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR  
SZÁMÍTÓGÉPTUDOMÁNYI TANSZÉK  
MÚZEUM KRT. 6—8  
H—1088 BUDAPEST  
HUNGARY



# ÜBER EINE FORMEL BLASCHKES ZUR AFFINOBERFLÄCHE

KURT LEICHTWEISS

Herrn László Fejes Tóth zum 70. Geburtstag gewidmet

1. In jüngster Zeit hat der Begriff des Affinumfangs einer Eilinie und analog dazu derjenige der Affinoberfläche einer Eifläche bzw. Eihyperfläche bei Fragen der Lagerungsgeometrie und speziell bei Fragen der Güte der Approximation durch konvexe Polygone und konvexe Polytope an Bedeutung gewonnen<sup>1</sup>. Dieser Begriff wird analytisch durch das Integral

$$(1) \quad O_{\text{aff}}(F) := \int \left| \det \left( \left( \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial x}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u^{n-1}} \right) \right) \right|^{1/(n+1)} du^1 \dots du^{n-1}$$

für eine durch  $x = x(u^1, \dots, u^{n-1})$  dargestellte (positiv gekrümmte) Eihyperfläche  $F: S_{n-1} \rightarrow A_n$  ( $S_{n-1} = (n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre,  $A_n = n$ -dimensionaler affiner Raum mit euklidischer Hilfsmetrik) der Differenzierbarkeitsklasse  $C_2$  definiert ( $n \geq 2$ ).

Von W. Blaschke stammt im Fall  $n=3$  die folgende Darstellung von  $O_{\text{aff}}(F)$  für eine analytische Eifläche  $F$ :

$$(2) \quad O_{\text{aff}}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sqrt{\pi} \frac{V(K) - V(K_{[\delta]})}{\sqrt{\delta}};$$

hierbei bedeutet  $V(K)$  bzw.  $V(K_{[\delta]})$  das Volumen des von  $F$  umschlossenen konvexen Körpers  $K$  bzw. (für hinreichend kleines  $\delta$ ) das Volumen desjenigen in  $K$  gelegenen konvexen Körpers  $K_{[\delta]}$ , dessen sämtliche Stützhyperebenen von  $K$  Segmente vom konstanten Volumen  $\delta > 0$  abschneiden<sup>2</sup> (vgl. Fig. 1). Diese Darstellung (2) ist insofern bemerkenswert, als mit ihrer Hilfe die Invarianz des Integrals in (1) im Fall  $n=3$  gegen Parametertransformationen und gegen äquiaffine Abbildungen (volumtreue Affinitäten) des  $A_n$  unmittelbar einsichtig wird, und sie wurde von Blaschke auch zu diesem Zweck hergeleitet.

Es ist nun zu vermuten, daß die Voraussetzung der Analytizität von  $F$  für die Gültigkeit von (2), welche von Blaschke aus beweistechnischen Gründen (Potenzreihenentwicklung!) gemacht wurde, wesentlich abgeschwächt werden kann. Desgleichen ist zu erwarten, daß die Formel (2) auch für eine beliebige Dimension  $n$  (mit geeignetem dimensionsabhängigem Faktor und geeignetem Exponenten für das

<sup>1</sup> Siehe hierzu [4], S. 43 und S. 151—153 sowie [5], S. 131—162, und [11].

<sup>2</sup> Siehe [2], S. 127 Formel (145).

1980 Mathematics Subject Classification. Primary 53A15.

Key words and phrases. Affine surface area, floating body, „Rollungssatz“.

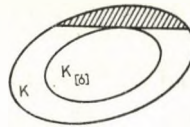


Fig. 1

im Nenner auftretende  $\delta$ ) ihre Gültigkeit behält. Diese Vermutungen stellen sich als richtig heraus, wenn  $F$  wie in (1) als (positiv gekrümmte) Eihyperfläche in  $A_n$  der Differenzierbarkeitsklasse  $C_2$  vorausgesetzt wird. Es gilt nämlich in diesem Fall als Verallgemeinerung von (2) für beliebiges  $n$ :

$$(3) \quad O_{\text{aff}}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} c_n \frac{V(K) - V(K_{[\delta]})}{\delta^{2/(n+1)}}$$

mit

$$(4) \quad c_n := 2 \left( \frac{\omega_{n-1}}{n+1} \right)^{2/(n+1)}$$

( $\omega_n$  = Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel)

(Satz 2). Übrigens zeigt sich weiter, daß die durch (3) und (4) gegebene Darstellung für die Affinoberfläche auch eine „lokale Version“ besitzt (Satz 3), welche für sich von Interesse sein dürfte.

Nach diesen Ergebnissen mag es naheliegen, den in (3) auftretenden, äquiaffin-invarianten Limes auch für die Ränder allgemeinerer konvexer Körper — im Falle seiner Existenz — als „Affinoberfläche“ zu definieren. Es zeigt sich aber, daß dafür der gleichfalls äquiaffin-invariante Limes

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} c_n \frac{V(K) - V(K_{[\delta]}, K, \dots, K)}{\delta^{2/(n+1)}}$$

( $V(K_{[\delta]}, K, \dots, K)$  = gemischtes Volumen von  $K_{[\delta]}$  und  $K, \dots, K$ )

geeigneter ist, wie in einer späteren Arbeit ausgeführt werden soll.

2. Ziel dieses Abschnitts ist es, zunächst einige Eigenschaften des in 1. erwähnten „Restkörpers“  $K_{[\delta]}$  von  $K$  herzuleiten. Wir beginnen mit der

DEFINITION 1. Es sei  $K$  ein beliebiger kompakter konvexer Körper des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raums  $R_n$ . Dann heißt ein in  $K$  gelegener kompakter konvexer Körper  $K_{[\delta]}$  „Restkörper“ von  $K$  zum Parameter  $\delta > 0$ , wenn alle Stützhyperebenen von  $K_{[\delta]}$  von dem konvexen Körper  $K$  Segmente abschneiden, deren Volumen den konstanten Wert  $\delta$  besitzt (vgl. Fig. 1).

BEMERKUNG. Der schon 1814 von C. Dupin eingeführte Körper  $K_{[\delta]}$  wird auch Schwimmkörper genannt. Er ist offensichtlich der Teil von  $K$ , der beim Herumwälzen des mit einem homogenen Material des spezifischen Gewichts  $\frac{\delta}{V(K)}$  ausgefüllten und auf dem Wasser schwimmenden Körpers  $K$  nicht unter die Wasseroberfläche zu liegen kommt (Archimedische Schwimmregel!).



Wie Blaschke in [2], S. 126 oben ausführt, existiert  $K_{[\delta]}$  im Fall  $n=3$  und eines analytischen Rands von  $K$  für hinreichend kleines  $\delta$ . Wir können allgemeiner zeigen:

**SATZ 1.** *Es sei  $F: S_{n-1} \rightarrow R_n$  eine zweimal stetig differenzierbare, überall (im Sinne der Gauß-Kronecker Krümmung) positiv gekrümmte Hyperfläche mit injektiver sphärischer Abbildung im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum  $R_n$  ( $S_{n-1} = (n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre), d. h. nach einem Satz von Hadamard<sup>3</sup> der Rand eines kompakten konvexen Körpers  $K$ . Weiter sei*

$$(5) \quad R_0 := \min_{x \in F, 1 \leq i \leq n-1} R_i(x) > 0$$

der minimale Wert der  $n-1$  Hauptkrümmungsradien  $R_1(x), \dots, R_{n-1}(x)$  von  $F$  und

$$(6) \quad \delta_0 := \frac{1}{2} \omega_n (R_0)^n > 0.$$

Dann existiert für jedes  $\delta$  mit  $0 < \delta < \delta_0$  der Restkörper  $K_{[\delta]}$  von  $K$  zum Parameter  $\delta$  im Sinne von Definition 1, und  $K_{[\delta]}$  wird wiederum von einer zweimal stetig differenzierbaren, überall positiv gekrümmten Hyperfläche  $F_{[\delta]}: S_{n-1} \rightarrow R_n$  mit injektiver sphärischer Abbildung berandet.

**BEWEIS.** Wir gehen von der 1814 von Dupin bewiesenen Tatsache aus, daß die Stützhyperebenen des Restkörpers  $K_{[\delta]}$  — im Falle seiner Existenz —  $K_{[\delta]}$  genau im Schwerpunkt ihres jeweiligen Durchschnitts mit  $K$  berühren<sup>4</sup>. Wir machen daher zunächst die

**DEFINITION 2a.** Es sei  $K$  ein beliebiger kompakter konvexer Körper des  $R_n$  und  $A(\xi)$  eine Hyperebene des  $R_n$ , die von  $K$  ein Segment vom gegebenen Volumen  $\delta > 0$  abschneidet ( $\xi =$  „nach innen“ weisender Normaleneinheitsvektor von  $A(\xi)$ !). Dann heißt diejenige Abbildung  $F_{[\delta]}: S_{n-1} \rightarrow R_n$ , bei welcher jedem Punkt  $\xi \in S_{n-1}$  der Schwerpunkt  $s(\xi)$  des Querschnitts  $A(\xi) \cap K$  zugeordnet wird, „Schwerpunktsabbildung von  $K$  zum Parameter  $\delta$ “.

Unser Ziel ist zu zeigen, daß die Schwerpunktsabbildung  $F_{[\delta]}$  im Falle der Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz 1 eine zweimal stetig differenzierbare, überall positiv gekrümmte Hyperfläche des  $R_n$  mit injektiver sphärischer Abbildung darstellt.  $F_{[\delta]}$  berandet daher nach dem schon erwähnten Satz von Hadamard<sup>5</sup> einen kompakten konvexen Körper des  $R_n$ , nämlich gerade den gesuchten Restkörper  $K_{[\delta]}$  von  $K$  zum Parameter  $\delta$ . Zu diesem Zweck greifen wir einen beliebigen festen Punkt  $\xi^{(0)}$  aus  $S_{n-1}$  heraus und beweisen zunächst, daß  $F_{[\delta]}$  an der Stelle  $\xi^{(0)}$  partiell differenzierbar und regulär ist mit  $A(\xi^{(0)})$  als Tangentialhyperebene. Es erweist sich hierbei als zweckmäßig, diesen Sachverhalt anstelle für die Abbildung  $F_{[\delta]}$  für eine etwas anders definierte Schwerpunktsabbildung  $F'_{[\delta]}(\xi^{(0)})$  zu verifizieren, welche gegeben ist durch die

<sup>3</sup> Vgl. [7], S. 21 bzw. S. 100—101 im Fall  $n=2$  bzw.  $n=3$  und einer  $C_\infty$ -Abbildung  $F$  sowie [6], S. 241 im Fall eines beliebigen  $n \geq 3$  und einer  $C_2$ -Abbildung  $F$ .

<sup>4</sup> Siehe dazu [1], S. 547—549.

<sup>5</sup> Vgl. Fußn. <sup>3</sup>.

DEFINITION 2b. Es sei  $K$  ein beliebiger kompakter konvexer Körper des  $R_n$  und  $A'(\xi)$  eine Hyperebene des  $R_n$ , welche den Punkt  $s(\xi^{(0)})$  (vgl. Definition 2a!) enthält ( $\xi =$  „nach innen“ weisender Normaleinheitsvektor von  $A'(\xi)$  aus einer Umgebung  $U(\xi^{(0)})$  von  $\xi^{(0)}$ ). Dann heißt diejenige Abbildung  $F'_{s(\xi^{(0)})}: U(\xi^{(0)}) \rightarrow R_n$ , bei welcher jedem Punkt  $\xi \in U(\xi^{(0)})$  der Schwerpunkt  $s'(\xi)$  des Querschnitts  $A'(\xi) \cap K$  zugeordnet wird, „Schwerpunktsabbildung von  $K$  zum Punkt  $s(\xi^{(0)})$ “.

Wir wählen nun im  $R_n$  ein kartesisches Koordinatensystem  $(x_1, \dots, x_n)$  so, daß

$$(7) \quad s(\xi^{(0)}) = s'(\xi^{(0)}) = (0, \dots, 0) \quad \text{und} \quad \xi^{(0)} = (0, \dots, 0, 1)$$

gilt, und verwenden im folgenden  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  als lokale Parameter von  $U(\xi^{(0)})$ . Dann folgt aus (7) unmittelbar

$$\begin{aligned} V_{(n-1)}(A'(\xi^{(0)}) \cap K) s'_i(0, \dots, 0) &= \int_{A'(\xi^{(0)}) \cap K} x_i dx_1 \dots dx_{n-1} = \\ (8a) \quad &= \int_{S_{n-2}} \left( \int_0^{r(\eta_1, \dots, \eta_{n-1})} (\varrho \eta_i) \varrho^{n-2} d\varrho \right) d\sigma_{(n-2)} = \\ &= \int_{S_{n-2}} \frac{1}{n} (r(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}))^n \eta_i d\sigma_{(n-2)} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

sowie

$$(8b) \quad \begin{aligned} V_{(n-1)}(A'(\xi^{(0)}) \cap K) s'_n(0, \dots, 0) &= 0 \\ (V_{(n-1)} = (n-1)\text{-dimensionales Volumen}). \end{aligned}$$

Hierbei wird  $A'(\xi^{(0)}) \cap K$  durch Polarkoordinaten mit dem Zentrum  $s'(\xi^{(0)}) = (0, \dots, 0)$  dargestellt ( $S_{n-2} = (n-2)$ -dimensionale Einheitssphäre um den Ursprung mit den Punkten  $(\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$  und dem Flächenelement  $d\sigma_{(n-2)}$ ). Unter Verwendung von (8a, b) errechnet sich weiter

$$\begin{aligned} V_{(n-1)}(A'(\xi^{(0)}) \cap K) \frac{\partial s'_i}{\partial \xi_j}(0, \dots, 0) &= \\ &= \int_{S_{n-2}} (r(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}))^{n-1} \frac{\partial r}{\partial \xi_j}(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) \eta_i d\sigma_{(n-2)} \quad (i, j = 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

sowie

$$V_{(n-1)}(A'(\xi^{(0)}) \cap K) \frac{\partial s'_n}{\partial \xi_j}(0, \dots, 0) = 0 \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_j}(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) := -r(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) \eta_j \cot \beta(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

( $\beta(\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$  = Neigungswinkel der Tangente an  $F$  mit der Projektionsrichtung  $(\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$  bei Orthogonalprojektion auf  $A'(\xi^{(0)})$  gegen  $A'(\xi^{(0)})$  im betreffenden

Punkt von  $A'(\xi^{(0)}) \cap \partial K$  ergibt dies

$$(9a) \quad V_{(n-1)}(A'(\xi^{(0)}) \cap K) \frac{\partial s'_i}{\partial \xi_j}(0, \dots, 0) = \\ = - \int_{S_{n-1}} \eta_i \eta_j (r(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}))^n \cot \beta(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) d\sigma_{(n-2)}$$

sowie

$$(9b) \quad V_{(n-1)}(A'(\xi^{(0)}) \cap K) \frac{\partial s'_n}{\partial \xi_j}(0, \dots, 0) = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n-1).$$

Aufgrund der Voraussetzung (6) von Satz 1 ist das Volumen  $\delta$  des von  $A'(\xi^{(0)}) = A(\xi^{(0)})$  begrenzten Segments von  $K$  kleiner als die Hälfte des Volumens einer Kugel vom Radius  $R_0$ . Letztere kann aber wegen (5) nach dem sogenannten „Rollungssatz“ von Blaschke auf dem Rand  $\partial K$  innerhalb von  $K$  frei rollen<sup>6</sup>. Dies hat offensichtlich zur Folge, daß  $F$  die Hyperebene  $A'(\xi^{(0)})$  spitzwinklig schneidet, so daß für den in (9a) vorkommenden Winkel  $\beta(\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$

$$0 < \beta(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) < \frac{\pi}{2}$$

gilt. Damit ist nach (9a) die (symmetrische) Matrix

$$(10) \quad \left( -\frac{\partial s'_i}{\partial \xi_j}(0, \dots, 0) \right)_{i,j=1, \dots, n-1}$$

positiv definit; für ihre Determinante gilt daher

$$(11) \quad \det \left( -\frac{\partial s'_i}{\partial \xi_j}(0, \dots, 0) \right) > 0.$$

Dies liefert zusammen mit (9b) die Tatsache, daß die Abbildung  $F'_{A(\xi^{(0)})}$  an der Stelle  $\xi^{(0)}$  partiell differenzierbar und regulär ist mit  $A'(\xi^{(0)})$  als Tangentialhyperebene.

Um nun dieses Ergebnis auch auf die Schwerpunktsabbildung  $F_{[\delta]}$  übertragen zu können, beachten wir, daß nach Dupin (vgl. Fußn.<sup>4</sup>) für das Volumen  $V'(\xi)$  des von  $A'(\xi)$  begrenzten „kleineren“ Segments von  $K$  gilt:

$$(12) \quad \frac{\partial V'}{\partial \xi_i}(\xi^{(0)}) = - \int_{A'(\xi^{(0)}) \cap K} x_i dx_1 \dots dx_{n-1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

(vgl. (8a)). Dies hat allgemeiner die stetige partielle Differenzierbarkeit von  $V'$  in  $U(\xi^{(0)})$  zur Folge. Durch Taylorentwicklung findet man daher aufgrund von (12)

$$(13) \quad V'(\xi) = \delta + o(\|\xi - \xi^{(0)}\|).$$

<sup>6</sup> Siehe dazu [3], S. 118 im Fall  $n=3$ .

Die Beziehung (13) zieht wegen  $V(\xi) = \delta$  (vgl. Definition 2a)!) für den Abstand  $d(A(\xi), A'(\xi))$  der Hyperebenen  $A(\xi)$  und  $A'(\xi)$  die gleichartige Beziehung

$$d(A(\xi), A'(\xi)) = o(\|\xi - \xi^{(0)}\|)$$

nach sich, aus welcher sich für die Schwerpunkte  $s(\xi)$  und  $s'(\xi)$  von  $A(\xi) \cap K$  und  $A'(\xi) \cap K$  ähnlich wie beim Beweis von (9a, b) auf

$$(14) \quad \|s'(\xi) - s(\xi)\| = o(\|\xi - \xi^{(0)}\|)$$

schließen läßt. (14) hat speziell

$$(15) \quad \frac{\partial s_i}{\partial \xi_j}(0, \dots, 0) = \frac{\partial s'_i}{\partial \xi_j}(0, \dots, 0), \quad \frac{\partial s_n}{\partial \xi_j}(0, \dots, 0) = \frac{\partial s'_n}{\partial \xi_j}(0, \dots, 0)$$

$$(i, j = 1, \dots, n-1)$$

zur Folge; d. h. auch die Schwerpunktsabbildung  $F_{[\delta]}$  ist an der Stelle  $\xi^{(0)}$  partiell differenzierbar und regulär mit  $A(\xi^{(0)})$  als Tangentialhyperebene. Aufgrund von (9a, b) und (15) ist  $F_{[\delta]}$  sogar stetig partiell differenzierbar.

Wir haben jetzt insgesamt gezeigt, daß  $F_{[\delta]}$  eine Immersion von  $S_{n-1}$  in den  $R_n$  der Differenzierbarkeitsklasse  $C_1$  darstellt. Es gilt aber noch mehr: Aufgrund von (11) und (15) können auch die Koordinaten  $x_1, \dots, x_{n-1}$  unseres Koordinatensystems im  $R_n$  als lokale Parameter von  $F_{[\delta]}$  in einer Umgebung des Ursprungs benutzt werden.  $F_{[\delta]}$  besitzt also dort die Darstellung

$$(16) \quad x_1 = x_1, \dots, x_{n-1} = x_{n-1}, \quad x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$$

( $f$ =stetig partiell differenzierbar mit  $f(0, \dots, 0)=0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \dots, 0)=0$  für  $i=1, \dots, n-1$ ). Für die Einheitsnormalenvektoren  $\xi$  gilt wegen (16)

$$(17) \quad \xi_i = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right)^2\right)^{1/2}}, \quad \xi_n = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right)^2\right)^{1/2}}$$

( $i=1, \dots, n-1$ )<sup>7</sup>, woraus sich umgekehrt

$$(18) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{-\xi_i}{(1 - (\xi_1)^2 - \dots - (\xi_{n-1})^2)^{1/2}} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

errechnet. Da die ursprünglichen lokalen Parameter  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  von  $F_{[\delta]}$  umgekehrt stetig differenzierbar von den lokalen Parametern  $x_1, \dots, x_{n-1}$  von  $F_{[\delta]}$  abhängen, gilt nach (18) Gleiches für die partiellen Ableitungen von  $f$ .  $F_{[\delta]}$  ist also wegen (16) sogar eine Immersion von  $S_{n-1}$  in den  $R_n$  der Differenzierbarkeitsklasse  $C_2$  und

<sup>7</sup> Aus der positiven Definitheit der Weingartenschen Umkehrmatrix  $\left(-\frac{\partial s_i}{\partial \xi_j}(0, \dots, 0)\right)$  (vgl. (10) und (15)) folgt, daß  $\xi$  die richtige Orientierung mit  $\xi(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, 1)$  besitzt!



besitzt daher eine Gauß-Kronecker-Krümmung  $H_{n-1}^{[\delta]}$  mit dem (an der beliebigen Stelle  $s(\xi^{(0)})$  gültigen) Wert

$$(19) \quad H_{n-1}^{[\delta]}(0, \dots, 0) = \det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (0, \dots, 0) \right) = \det \left( -\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} (0, \dots, 0) \right) = \\ = \left[ \det \left( -\frac{\partial s_i}{\partial \xi_j} (0, \dots, 0) \right) \right]^{-1} = \left[ \det \left( -\frac{\partial s'_i}{\partial \xi_j} (0, \dots, 0) \right) \right]^{-1} > 0$$

(vgl. (17), (15) und (11)). Schließlich ist die sphärische Abbildung von  $F_{[\delta]}$  als identische Abbildung von  $S_{n-1}$  sicher injektiv. Damit erfüllt  $F_{[\delta]}$  alle Voraussetzungen des Hadamardschen Satzes für eine Dimension  $n \geq 2$  (vgl. Fußn. 3)!) und berandet daher einen in  $K$  gelegenen kompakten konvexen Körper  $K_{[\delta]}$ . Da die Stützhyperebenen von  $K_{[\delta]}$  gleichzeitig Tangentialhyperebenen von  $F_{[\delta]}$  sind und damit nach Konstruktion von  $F_{[\delta]}$  von  $K$  Segmente vom konstanten Volumen  $\delta > 0$  abschneiden, ist  $K_{[\delta]}$  in der Tat der gesuchte Restkörper von  $K$  zum Parameter  $\delta$ . Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.  $\square$

**BEMERKUNG.** Die Voraussetzungen über  $F$  in Satz 1 werden beim Beweis von Satz 1 nur in der Weise ausgenützt, als daß  $F$  einen kompakten konvexen Körper  $K$  berandet und daß es ein  $\delta_0 > 0$  so gibt, daß für alle  $\delta$  mit  $0 < \delta < \delta_0$  die (die Segmente von  $K$  vom Volumen  $\delta$  begrenzenden) Hyperebenen  $A(\xi)$  die Hyperfläche  $F$  spitzwinklig schneiden.

3. Wir kommen nun zu dem schon in 1. erwähnten Hauptresultat dieser Arbeit, welches in dem folgenden Satz formuliert wird:

**SATZ 2.** *Es sei  $F$  eine „Eihyperfläche“ im  $n$ -dimensionalen affinen Raum  $A_n$  mit euklidischer Hilfsmetrik, d. h. genauer gesagt eine Hyperfläche, die den Voraussetzungen in Satz 1 genügt ( $n \geq 2$ ).  $F$  berande den kompakten konvexen Körper  $K$  mit den zu  $\delta > 0$  gehörenden Restkörpern  $K_{[\delta]}$  (vgl. Satz 1!). Dann gilt für die durch (1) definierte Affinoberfläche von  $F$  unter Benutzung der Volumenfunktion  $V$ :*

$$(20) \quad O_{\text{aff}}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} c_n \frac{V(K) - V(K_{[\delta]})}{\delta^{2/(n+1)}},$$

wobei die lediglich dimensionsabhängige Konstante  $c_n$  den Wert

$$(21) \quad c_n = 2 \left( \frac{\omega_{n-1}}{n+1} \right)^{2/(n+1)} \quad (\omega_n = \text{Volumen der } n\text{-dimensionalen Einheitskugel})$$

besitzt.

Dem Beweis von Satz 2 schicken wir einige Hilfssätze voraus:

**HILFSSATZ 1.** *Es sei  $\Delta_R(\delta)$  die Dicke eines ebenen Segments vom Volumen  $\delta$  einer Kugel  $K_R$  des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raums  $R_n$  mit dem Radius  $R > 0$ . Dann gibt es eine auf dem Intervall  $[0, x_0]$  mit*

$$(22) \quad x_0 := \left( \frac{(n+1)\omega_n}{2\omega_{n-1}} \right)^{2/(n+1)}$$



definierte, von  $\delta$  und  $R$  unabhängige stetige reellwertige Funktion  $g$  mit den Eigenschaften

$$(23) \quad g(0) = 1$$

und

$$(24) \quad c_n \frac{\Delta_R(\delta)}{\delta^{2/(n+1)}} = R^{-(n-1)/(n+1)} g \left( R^{(-2n)/(n+1)} \left( \frac{n+1}{\omega_{n-1}} \delta \right)^{2/(n+1)} \right) \\ \left( \text{vgl. (21), } 0 < \delta < \frac{1}{2} \omega_n R^n \right).$$

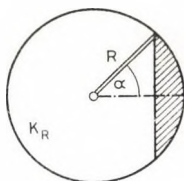


Fig. 2

BEWEIS. Es sei  $\alpha$  der halbe Öffnungswinkel eines ebenen Segments von  $K_R$  mit dem Volumen  $\delta_R(\alpha)$  und der Dicke  $\Delta_R(\alpha)$  (vgl. Fig. 2). Jetzt berechnet sich einerseits

$$\delta_R(\alpha) = \int_{R \cos \alpha}^R \omega_{n-1} (R^2 - x^2)^{(n-1)/2} dx = \int_0^\alpha \omega_{n-1} R^n \sin^n \varphi d\varphi = \\ = \frac{\omega_{n-1}}{n+1} R^n \alpha^{n+1} g_1(\alpha^2) \quad \left( 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

mit einer analytischen Funktion  $g_1$  von  $y$ , wobei  $g_1(0)=1$  ist. Damit wird dann

$$(25) \quad (\delta_R(\alpha))^{2/(n+1)} = \left( \frac{\omega_{n-1}}{n+1} \right)^{2/(n+1)} R^{(2n)/(n+1)} g_2(\alpha^2) \quad \left( 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

Hierin stellt  $g_2$  eine im Intervall  $\left[ 0, \frac{\pi^2}{4} \right]$  stetige und streng monoton wachsende Funktion von  $y$  dar, welche in einer Umgebung von 0 analytisch, d. h. umso mehr stetig differenzierbar mit  $g_2(0)=0$ ,  $\frac{dg_2}{dy}(0)=1$  ist. Die auf  $[0, x_0]$  (vgl. (22)) definierte Umkehrfunktion  $g_2^{-1}$  von  $g_2$  der Veränderlichen  $x$  ist dort ebenfalls stetig und streng monoton wachsend, sowie in einer Umgebung von 0 stetig differenzierbar mit

$$(26) \quad g_2^{-1}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dg_2^{-1}}{dx}(0) = 1.$$

Mit Hilfe von  $g_2^{-1}$  läßt sich wegen (25) der halbe Öffnungswinkel  $\alpha_R(\delta)$  eines ebenen Segments von  $K_R$  vom Volumen  $\delta$  folgendermaßen ausdrücken:

$$(27) \quad (\alpha_R(\delta))^2 = g_2^{-1} \left( R^{(-2n)/(n+1)} \left( \frac{n+1}{\omega_{n-1}} \delta \right)^{2/(n+1)} \right) \quad \left( 0 < \delta < \frac{1}{2} \omega_n R^n \right).$$

Andererseits gilt für die Dicke  $\Delta_R(\delta)$  dieses Segments offensichtlich

$$(28) \quad \Delta_R(\delta) = R - R \cos \alpha_R(\delta) = \frac{R}{2} g_3((\alpha_R(\delta))^2) \quad \left( 0 < \delta < \frac{1}{2} \omega_n R^n \right)$$

mit einer auf dem Intervall  $\left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]$  stetigen und streng monoton wachsenden, analytischen (d. h. umso mehr in einer Umgebung von 0 stetig differenzierbaren) Funktion  $g_3$  von  $y$ , für welche die Beziehungen

$$(29) \quad g_3(0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dg_3}{dy}(0) = 1$$

bestehen.

Die Einsetzung von (27) in (28) liefert nun für den Ausdruck  $c_n \frac{\Delta_R(\delta)}{\delta^{2/(n+1)}}$  unter Berücksichtigung von (21) die Darstellung

$$(30) \quad \begin{aligned} c_n \frac{\Delta_R(\delta)}{\delta^{2/(n+1)}} &= c_n \frac{R}{2} \frac{g_3 \left( g_2^{-1} \left( R^{(-2n)/(n+1)} \left( \frac{n+1}{\omega_{n-1}} \delta \right)^{2/(n+1)} \right) \right)}{\delta^{2/(n+1)}} = \\ &= c_n \frac{R}{2} R^{(-2n)/(n+1)} \left( \frac{n+1}{\omega_{n-1}} \right)^{2/(n+1)} g \left( R^{(-2n)/(n+1)} \left( \frac{n+1}{\omega_{n-1}} \delta \right)^{2/(n+1)} \right) = \\ &= R^{-(n-1)/(n+1)} g \left( R^{(-2n)/(n+1)} \left( \frac{n+1}{\omega_{n-1}} \delta \right)^{2/(n+1)} \right) \quad \left( 0 < \delta < \frac{1}{2} \omega_n R^n \right). \end{aligned}$$

Dabei wurde die Funktion  $g$  von  $x$  durch

$$(31) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{g_3(g_2^{-1}(x))}{x}, & \text{falls } x \in (0, x_0] \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

definiert. Sie ist von  $\delta$  und  $R$  unabhängig, da Gleiches für die Funktionen  $g_2$  und  $g_3$  zutrifft. Außerdem ist sie auf dem ganzen Definitionsintervall  $[0, x_0]$  stetig, da  $g_2^{-1}$  und  $g_3$  stetig sind und da nach der Regel von de l'Hôpital gilt:

$$(32) \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_3(g_2^{-1}(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{dg_3}{dy}(g_2^{-1}(x)) \frac{dg_2^{-1}}{dx}(x)}{1} = 1 = g(0)$$

(vgl. (26) und (29)!). Hiermit ist Hilfssatz 1 bewiesen.  $\square$

FOLGERUNGEN. a) Für alle  $\delta$  mit  $0 < \delta < \delta_0$  und alle  $R$  mit  $R_0 \leq R$  (vgl. (5) und (6)) gilt die Abschätzung

$$(33) \quad c_n \frac{\Delta_R(\delta)}{\delta^{2/(n+1)}} \leq M$$

mit einem von  $\delta$  und  $R$  unabhängigen  $M > 0$ ;

b)  $c_n \frac{\Delta_R(\delta)}{\delta^{2/(n+1)}}$  ist eine in Bezug auf alle  $\delta$  mit  $0 < \delta < \delta_0$  gleichgradig stetige Funktion von  $R$  ( $R \geq R_0$ );

$$(34) \quad c) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} c_n \frac{\Delta_R(\delta)}{\delta^{2/(n+1)}} = R^{-(n-1)/(n+1)}.$$

BEWEIS. a) ist eine unmittelbare Folgerung von (24) mit  $M := (R_0)^{\frac{n-1}{n+1}} \max_{x \in [0, x_0]} g(x)$ ; b) kann wegen (24) leicht aus der Tatsache geschlossen werden, daß  $g$  als eine auf der kompakten Menge  $[0, x_0]$  stetige Funktion daselbst gleichmäßig stetig ist; c) ergibt sich aus (24) und (32).  $\square$

HILFSSATZ 2. Es sei  $h$  bzw.  $h_{[\delta]}$  die auf die Einheitssphäre  $S_{n-1}$  eingeschränkte Stützfunktion von  $K$  bzw.  $K_{[\delta]}$  ( $0 < \delta < \delta_0$ ). Dann ist die vom Parameter  $\delta$  abhängende Schar der auf  $S_{n-1}$  definierten stetigen Funktionen

$$(35) \quad c_n \frac{h - h_{[\delta]}}{\delta^{2/(n+1)}} \quad (0 < \delta < \delta_0)$$

in Bezug auf  $\delta$  gleichmäßig beschränkt.

BEWEIS. Nach dem Blaschkeschen Rollungssatz (vgl. Fußn. <sup>6)</sup>) kann eine Kugel vom Radius  $R_0$  auf  $\partial K$  innerhalb von  $K$  frei rollen. Die Dicke eines beliebigen ebenen Segments von  $K$  vom Volumen  $\delta$  — aufgrund von Definition 1 gegeben durch die Differenz der Werte der auf  $S_{n-1}$  eingeschränkten Stützfunktion von  $K$  und  $K_{[\delta]}$  für den (nach innen weisenden) Normaleinheitsvektor  $\xi$  der das Segment begrenzenden Hyperebene — ist daher sicher nicht größer als die Dicke des entsprechenden Segments der  $\partial K$  in dem Punkt  $x(\xi)$  mit dem Normalenvektor  $\xi$  von innen berührenden Kugel  $K_{R_0}$  vom Radius  $R_0$ :

$$(36) \quad h(\xi) - h_{[\delta]}(\xi) \leq \Delta_{R_0}(\delta) \quad (\xi = \text{beliebig} \in S_{n-1}, 0 < \delta < \delta_0).$$

Die Behauptung von Hilfssatz 2 folgt jetzt unmittelbar aus (36) und (33).  $\square$

HILFSSATZ 3. Die in Hilfssatz 2 definierte Schar der stetigen Funktionen

$$(37) \quad g_\delta := c_n \frac{h - h_{[\delta]}}{\delta^{2/(n+1)}} \quad (0 < \delta < \delta_0)$$

ist an jeder Stelle  $\xi^{(0)} \in S_{n-1}$  in Bezug auf den Parameter  $\delta$  gleichgradig stetig.

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, daß es genügt, Hilfssatz 3 im Spezialfall eines Nabelpunkts von  $F$  an der Stelle  $x(\xi^{(0)})$  zu beweisen:

$$(38) \quad R_1(x(\xi^{(0)})) = \dots = R_{n-1}(x(\xi^{(0)})) =: R^{(0)} \geq R_0 \quad (\text{vgl. (5)}).$$

Es sei nämlich  $(x_1, \dots, x_n)$  ein kartesisches Koordinatensystem des  $R_n$  derart, daß  $\xi^{(0)} = (0, \dots, 0, 1)$  und  $\mathbf{x}(\xi^{(0)}) = (0, \dots, 0)$  gilt und daß  $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, 0)$  in die Hauptkrümmungsrichtungen von  $F$  im Punkt  $\mathbf{x}(\xi^{(0)})$  fallen. Dann wird  $F$  durch die äquiaffine Abbildung des  $R_n$  in sich mit der Darstellung

$$(39) \quad x'_i = \frac{R_i(\mathbf{x}(\xi^{(0)}))^{-1/2}}{H_{n-1}(\mathbf{x}(\xi^{(0)}))^{1/(2(n-1))}} x_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad x'_n = x_n^8$$

in eine Eihyperfläche  $F'$  des  $R_n$  übergeführt, welche an der Stelle  $\mathbf{x}(\xi^{(0)})$  einen Nabelpunkt besitzt und einen konvexen Körper  $K'$  berandet.

Wir nehmen nun an, Hilfssatz 3 treffe für  $F'$  zu. Dies bedeutet, daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung  $U'(\xi^{(0)})$  von  $\xi^{(0)}$  auf  $S_{n-1}$  so gibt, daß für alle  $\xi' \in U'(\xi^{(0)})$  und alle  $\delta$  mit  $0 < \delta < \delta_0$

$$(40) \quad |g'_\delta(\xi') - g'_\delta(\xi^{(0)})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Hierbei bezieht sich die Bezeichnung  $g'_\delta$  auf die für die Hyperfläche  $F'$  durch (37) definierte Schar von Funktionen, welche von dem Parameter  $\delta$  abhängen. Da jetzt die Affinität (39) jedes ebene Segment von  $K$  in ein volumgleiches ebenes Segment von  $K'$  überführt und sich bei der Abbildung (39) der Abstand paralleler Hyper Ebenen mit einem Faktor multipliziert, der nur von der Richtung derselben abhängt, besteht zwischen den Funktionen  $g_\delta$  und  $g'_\delta$  die folgende Relation:

$$(41) \quad g_\delta(\xi) = \tau(\xi') g'_\delta(\xi') \quad (0 < \delta < \delta_0).$$

Hierbei ist  $\xi'$  der  $\xi$  bei (39) entsprechende Normaleneinheitsvektor, und der besagte Faktor  $\tau(\xi')$  genügt noch der Bedingung

$$(42) \quad \lim_{\xi' \rightarrow \xi^{(0)}} \tau(\xi') = \tau(\xi^{(0)}) = 1.$$

Wegen (42) gibt es eine Umgebung  $V'(\xi^{(0)})$  von  $\xi^{(0)}$  auf  $S_{n-1}$  derart, daß

$$(43) \quad |\tau(\xi') - \tau(\xi^{(0)})| < \frac{\varepsilon}{2M'}$$

ist. Dabei sei  $M'$  die nach Hilfssatz 2 (angewandt auf  $F'$ ) existierende Konstante mit der Eigenschaft

$$(44) \quad |g'_\delta(\xi')| \leq M' \quad (\xi' = \text{beliebig} \in S_{n-1}, 0 < \delta < \delta_0).$$

Aus (41), (43), (44), (42) und (40) resultiert schließlich für alle  $\xi$  aus der, der Umgebung  $U'(\xi^{(0)}) \cap V'(\xi^{(0)})$  bei der Umkehrung von (39) entsprechenden Umgebung  $U(\xi^{(0)}) \cap V(\xi^{(0)})$  von  $\xi^{(0)}$  auf  $S_{n-1}$ :

$$(45) \quad \begin{aligned} |g_\delta(\xi) - g_\delta(\xi^{(0)})| &= |\tau(\xi') g'_\delta(\xi') - \tau(\xi^{(0)}) g'_\delta(\xi^{(0)})| \leq \\ &\leq |\tau(\xi') - \tau(\xi^{(0)})| |g'_\delta(\xi')| + |\tau(\xi^{(0)})| |g'_\delta(\xi') - g'_\delta(\xi^{(0)})| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (0 < \delta < \delta_0). \end{aligned}$$

<sup>8</sup>  $H_{n-1}(\mathbf{x}) := \prod_{i=1}^{n-1} (R_i(\mathbf{x}))^{-1} = \text{Gauß-Kronecker-Krümmung von } F \text{ in } \mathbf{x}!$

Dies bedeutet, daß — wie eingangs des Beweises von Hilfssatz 3 behauptet — mit  $g'_\delta$  auch die Funktionenschar  $g_\delta$  an der Stelle  $\xi^{(0)}$  gleichgradig stetig ist. Wir können daher im folgenden zum Beweis von Hilfssatz 3 für  $F$  o. B. d. A. die Gültigkeit von (38) voraussetzen.

Von jetzt ab werde der Beweis von Hilfssatz 3 indirekt geführt: Wir machen die Annahme, die Funktionenschar  $g_\delta$  sei an einer Stelle  $\xi^{(0)} \in S_{n-1}$  in Bezug auf  $\delta$  nicht gleichgradig stetig. Dann existiert eine Folge  $\{\xi^{(v)}\}_{v \in \mathbb{N}}$  mit  $\xi^{(v)} \in S_{n-1}$  und eine Folge  $\{\delta_v\}_{v \in \mathbb{N}}$  mit  $0 < \delta < \delta_0$  so, daß gilt

$$(46) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \xi^{(v)} = \xi^{(0)}$$

und für ein gewisses  $\varepsilon_0 > 0$

$$(47) \quad |g_{\delta_v}(\xi^{(v)}) - g_{\delta_v}(\xi^{(0)})| \geq \varepsilon_0 \quad (v = \text{beliebig} \in \mathbb{N}).$$

Hierbei ist notwendig

$$(48) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \delta_v = 0,$$

denn sonst wäre für eine Teilfolge  $\{\delta_{v_\mu}\}_{\mu \in \mathbb{N}}$  von  $\{\delta_v\}_{v \in \mathbb{N}}$

$$(49) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \delta_{v_\mu} =: \delta^{(0)} > 0 \quad (\delta^{(0)} \leq \delta_0).$$

Aufgrund der Definition der Funktionen  $g_\delta$  und der stetigen Abhängigkeit des Volumens eines ebenen Segments von  $K$  von seiner Begrenzung folgte dann aus (49) wegen (46) sowohl

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} g_{\delta_{v_\mu}}(\xi^{(v_\mu)}) = g_{\delta^{(0)}}(\xi^{(0)})$$

als auch

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} g_{\delta_{v_\mu}}(\xi^{(0)}) = g_{\delta^{(0)}}(\xi^{(0)}),$$

wegen (47) eine Unmöglichkeit.

Wir wenden nun die Folgerung b) von Hilfssatz 1 an. Hiernach gibt es ein  $\eta > 0$  derart, daß für alle  $R$  mit  $|R - R^{(0)}| < \eta$  und  $R \geq R_0$  sowie für alle  $\delta$  mit  $0 < \delta < \delta_0$  gilt

$$(50) \quad \left| c_n \frac{A_R(\delta)}{\delta^{2/(n+1)}} - c_n \frac{A_{R^{(0)}}(\delta)}{\delta^{2/(n+1)}} \right| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Weiter gibt es wegen (38) und der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von  $F$  und damit wegen der stetigen Abhängigkeit der Hauptkrümmungsradien  $R_i(\mathbf{x}(\xi))$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) vom Normaleneinheitsvektor  $\xi$  ein  $\zeta$  mit  $0 < \zeta < \frac{\pi}{2}$  und der Eigenschaft, daß für alle  $\xi$  aus der durch

$$(51) \quad U_\zeta(\xi^{(0)}) := \{\xi \in S_{n-1}; \angle(\xi, \xi^{(0)}) \leq \zeta\}$$

gegebenen Umgebung  $U_\zeta(\xi^{(0)})$  von  $\xi^{(0)}$  auf  $S_{n-1}$  die Beziehung

$$(52) \quad \text{Max} \{R^{(0)} - \eta, R_0\} \leq \underline{R}^{(\zeta)} \leq \bar{R}^{(\zeta)} \leq R^{(0)} + \eta$$

mit den durch

$$(53) \quad \underline{R}^{(\zeta)} := \min_{i=1, \dots, n-1; \xi \in U_\zeta(\xi^{(0)})} R_i(\mathbf{x}(\xi)), \quad \bar{R}^{(\zeta)} := \max_{i=1, \dots, n-1; \xi \in U_\zeta(\xi^{(0)})} R_i(\mathbf{x}(\xi))$$



definierten Größen  $\underline{R}^{(\zeta)}$  und  $\bar{R}^{(\zeta)}$  besteht. Schließlich wählen wir noch ein  $v_1 \in \mathbb{N}$  so groß, daß für alle  $v \equiv v_1$

$$(54) \quad \xi^{(v)} \in U_{\zeta/2}(\xi^{(0)})$$

ist (vgl. (46) und (51)!), und ein  $v_2 \in \mathbb{N}$  so groß, daß für alle  $v \equiv v_2$

$$(55) \quad \alpha_{R_0}(\delta_v) \leq \frac{\zeta}{2}$$

gilt (vgl. (48) und (27)!), und setzen  $v_0 := \text{Max} \{v_1, v_2\}$ .

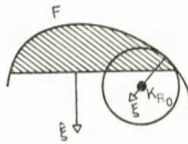


Fig. 3

Damit haben wir folgendes erreicht: Nach (55) gilt im Fall  $v \equiv v_0$  für die Normaleneinheitsvektoren  $\xi$  des zu dem ebenen Segment von  $K$  vom Volumen  $\delta_v$  mit einer Begrenzungshyperebene mit dem Normaleneinheitsvektor  $\hat{\xi}$  gehörenden Stücks  $F_{\delta_v}(\hat{\xi})$  von  $\partial K = F(S_{n-1})$  die Beziehung

$$\angle(\hat{\xi}, \xi) \leq \alpha_{R_0}(\delta_v) \leq \frac{\zeta}{2}$$

(vgl. Fig. 3!). Diese läßt sich auch in der Form

$$(56) \quad F_{\delta_v}(\hat{\xi}) \subseteq x(U_{\zeta/2}(\hat{\xi})) \quad (v \equiv v_0)$$

ausdrücken. Die Spezialisierung von (56) für  $\hat{\xi} = \xi^{(v)}$  und  $\hat{\xi} = \xi^{(0)}$  liefert insbesondere in Verbindung mit (54)

$$(57) \quad F_{\delta_v}(\xi^{(v)}) \subseteq x(U_{\zeta/2}(\xi^{(v)})) \subseteq x(U_{\zeta}(\xi^{(0)}))$$

und  $(v \equiv v_0)$ .

$$(58) \quad F_{\delta_v}(\xi^{(0)}) \subseteq x(U_{\zeta/2}(\xi^{(0)})) \subseteq x(U_{\zeta}(\xi^{(0)}))$$

Wir wenden nun den Blaschkeschen Rollungssatz (vgl. Fußn. <sup>6)</sup>) in einer leicht einzusehenden lokalen Version auf den Teil  $x(U_{\zeta}(\xi^{(0)}))$  von  $\partial K$  an. Hiernach kann wegen (53) eine Kugel  $K_{\underline{R}^{(\zeta)}}$  vom Radius  $\underline{R}^{(\zeta)}$  „innerhalb“ von  $x(U_{\zeta}(\xi^{(0)}))$  frei rollen, und umgekehrt kann das Hyperflächenstück  $x(U_{\zeta}(\xi^{(0)}))$  „innerhalb“ einer Kugel  $K_{\bar{R}^{(\zeta)}}$  vom Radius  $\bar{R}^{(\zeta)}$  frei rollen. Dies hat nach (57) und (58) die Abschätzungen

$$(59) \quad c_n \frac{\Delta_{\bar{R}^{(\zeta)}}(\delta_v)}{\delta_v^{2/(n+1)}} \leq g_{\delta_v}(\xi^{(v)}) \leq c_n \frac{\Delta_{\bar{R}^{(\zeta)}}(\delta_v)}{\delta_v^{2/(n+1)}} \quad (v \equiv v_0)$$

und

$$(60) \quad c_n \frac{\Delta_{\bar{R}^{(\zeta)}}(\delta_v)}{\delta_v^{2/(n+1)}} \leq g_{\delta_v}(\xi^{(0)}) \leq c_n \frac{\Delta_{\bar{R}^{(\zeta)}}(\delta_v)}{\delta_v^{2/(n+1)}}$$

zur Folge. Andererseits finden wir durch Addition der nach (52) für  $R = \underline{R}^{(\zeta)}$  und  $R = \bar{R}^{(\zeta)}$  sowie für  $\delta = \delta_v$  gültigen Relation (50):

$$(61) \quad 0 \leq c_n \frac{\Delta_{\bar{R}^{(\zeta)}}(\delta_v)}{\delta_v^{2/(n+1)}} - c_n \frac{\Delta_{\underline{R}^{(\zeta)}}(\delta_v)}{\delta_v^{2/(n+1)}} < \varepsilon_0.$$

(61) ergibt schließlich zusammen mit (59) und (60)

$$|g_{\delta_v}(\zeta^{(v)}) - g_{\delta_v}(\zeta^{(0)})| < \varepsilon_0 \quad (v \geq v_0)$$

im Widerspruch zu (47). Dieser Widerspruch zeigt die Richtigkeit von Hilfssatz 3.  $\square$

**HILFSSATZ 4.** Für die in Hilfssatz 3 betrachtete Schar der stetigen Funktionen  $g_\delta$  auf  $S_{n-1}$  ( $0 < \delta < \delta_0$ ) gilt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} g_\delta(\xi) = (H_{n-1}(\mathbf{x}(\xi)))^{1/(n+1)} \quad (\xi = \text{beliebig} \in S_{n-1});$$

hierbei bedeutet  $H_{n-1}(\mathbf{x})$  die Gauß-Kronecker-Krümmung von  $F$  im Punkt  $\mathbf{x}$  (vgl. Fußn. <sup>8</sup>!).

**BEWEIS.** Durch Anwendung einer äquiaffinen Abbildung des  $R_n$  in sich wie zu Beginn des Beweises von Hilfssatz 3 (vgl. (39)) kann die Gültigkeit von (38) erreicht werden, ohne daß sich hierbei die Werte von  $g_\delta(\xi^{(0)})$  für beliebiges  $\delta$  mit  $0 < \delta < \delta_0$  und von  $H_{n-1}(\mathbf{x}(\xi^{(0)}))$  ändern. Daher kann zum Beweis von Hilfssatz 4 o. B. d. A. wiederum (38) vorausgesetzt werden. Wir verwenden jetzt die für eine beliebige Nullfolge  $\{\delta_v\}_{v \in \mathbb{N}}$  gültige Gleichung (60) und finden durch Grenzübergang  $v \rightarrow \infty$  in ihr unter Berücksichtigung von (34):

$$(\bar{R}^{(\zeta)})^{-(n-1)/(n+1)} \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} g_\delta(\xi^{(0)}) \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} g_\delta(\xi^{(0)}) \leq (\underline{R}^{(\zeta)})^{-(n-1)/(n+1)}.$$

Zusammen mit (52) ergibt dies

(62)

$$(R^{(0)} + \eta)^{-(n-1)/(n+1)} \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} g_\delta(\xi^{(0)}) \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} g_\delta(\xi^{(0)}) \leq (R^{(0)} - \eta)^{-(n-1)/(n+1)}.$$

Da in (62)  $\eta > 0$  beliebig klein gewählt werden kann, resultiert für das beliebige  $\xi^{(0)} \in S_{n-1}$  wegen (38) in der Tat:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} g_\delta(\xi^{(0)}) = (R^{(0)})^{-(n-1)/(n+1)} = (H_{n-1}(\mathbf{x}(\xi^{(0)})))^{1/(n+1)}$$

(vgl. Fußn. <sup>8</sup>).  $\square$

**BEWEIS von Satz 2.** Wir schreiben die in der zu beweisenden Gleichung (20) vorkommende Volumendifferenz zunächst in der Form

$$(63) \quad V(K) - V(K_{[\delta]}) = V(K, \dots, K) - V(K_{[\delta]}, \dots, K_{[\delta]}) = \\ = \sum_{k=1}^n (V(K, \underbrace{\dots}_k, K, \underbrace{K_{[\delta]}, \dots}_{n-k}, K_{[\delta]}) - V(K_{[\delta]}, K, \underbrace{\dots}_{k-1}, K, \underbrace{K_{[\delta]}, \dots}_{n-k}, K_{[\delta]}))$$

und verwenden für die Minkowskischen gemischten Volumina  $V(K_1, \dots, K_n)$  von  $n$  kompakten konvexen Mengen  $K_1, \dots, K_n$  des  $R_n$  die Darstellung

$$(64) \quad V(K_1, \dots, K_n) = \frac{1}{n} \int_{S_{n-1}} h_{K_1}(\xi) dO_{K_2 \dots K_n}(\xi).$$

Hierin bedeuten  $h_{K_1}$  die (auf  $S_{n-1}$  eingeschränkte) Stützfunktion von  $K_1$  und  $O_{K_2 \dots K_n}$  ein von  $K_2, \dots, K_n$  abhängendes endliches Maß auf den Borelschen Untermengen der Einheitssphäre  $S_{n-1}$ , die sogenannte „gemischte Oberflächenfunktion“ von A. D. Aleksandrow. Dieses Maß ist durch die (für alle „Testmengen“  $K_1$  gültige) Beziehung (64) eindeutig bestimmt; es stimmt im Spezialfall  $K_2 = \dots = K_n = K$  mit dem Bild des gewöhnlichen euklidischen Oberflächenmaßes  $O$  auf  $\partial K$  bei der sphärischen Abbildung von  $F$  überein<sup>9</sup>, so daß wir

$$(65) \quad dO_{K \dots K}(\xi) = dO(x(\xi))$$

schreiben können.

Durch Einsetzung von (64) in (63) ergibt sich nun unter Benutzung der Abkürzung (37)

$$(66) \quad c_n \frac{V(K) - V(K_{[\delta]})}{\delta^{2/(n+1)}} = \frac{1}{n} \int_{S_{n-1}} g_\delta(\xi) \left( \sum_{k=1}^n dO_{K_{k-1} \dots K_{k-1} K_{[\delta]} \dots K_{[\delta]}}(\xi) \right).$$

Um darin für  $\delta \rightarrow 0$  zur Grenze übergehen zu können, benötigen wir neben Hilfssatz 4 die Tatsache, daß die Aleksandrowsche gemischte Oberflächenfunktion  $O_{K_2 \dots K_n}$  von  $K_2, \dots, K_n$  „schwach stetig“ abhängt<sup>10</sup>. Darunter ist folgendes zu verstehen: Man bezeichnet bekanntlich eine Folge  $\{\mu_v\}_{v \in \mathbb{N}}$  von endlichen Maßen auf den Borelschen Untermengen eines separablen metrischen Raums  $X$  als gegen ein ebensolches Maß  $\mu$  „schwach konvergent“ (geschrieben  $\mu_v \Rightarrow \mu$ ), wenn für jede stetige und beschränkte reellwertige Funktion  $\psi$  auf  $X$

$$(67) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \int_X \psi d\mu_v = \int_X \psi d\mu$$

gilt<sup>11</sup>. Die schwache Stetigkeit von  $O_{K_2 \dots K_n}$  heißt jetzt: Sind  $\{K_2^{(v)}\}_{v \in \mathbb{N}}, \dots, \{K_n^{(v)}\}_{v \in \mathbb{N}}$  beliebige Folgen kompakter konvexer Mengen des  $R_n$  mit

$$\lim_{v \rightarrow \infty} K_2^{(v)} = K_2, \dots, \lim_{v \rightarrow \infty} K_n^{(v)} = K_n$$

im Sinne der Hausdorff-Metrik, so folgt

$$(68) \quad O_{K_2^{(v)} \dots K_n^{(v)}} \Rightarrow O_{K_2 \dots K_n}.$$

Speziell haben wir also für eine beliebige Folge  $\{\delta_v\}_{v \in \mathbb{N}}$  mit  $\delta_v > 0$  und

$$(69) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \delta_v = 0$$

<sup>9</sup> Vgl. [10], S. 30–31.

<sup>10</sup> Siehe [10], Theorem (5.4)(b) und S. 31, Z. 11 v. o. in Verbindung mit [8], Lemma.

<sup>11</sup> Vgl. etwa [9], S. 661.

wegen Hilfssatz 2 und damit

$$\lim_{v \rightarrow \infty} K_{[\delta_v]} = K$$

die Beziehung

$$(70) \quad \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n O_{K \underset{k-1}{\rightsquigarrow} KK_{[\delta_v]} \underset{n-k}{\rightsquigarrow} K_{[\delta_v]}} \right) \Rightarrow O_{K \dots K}.$$

Zum Beweis von (20) ist nun die Tatsache von entscheidender Bedeutung, daß nach einem Satz von Ranga Rao die *Konvergenzrelation* (67) in Bezug auf  $\psi$  *gleichmäßig* ist, wenn  $\psi$  aus einer Familie  $\mathcal{F}$  von *gleichmäßig beschränkten* und (an jeder Stelle) *gleichgradig stetigen Funktionen* auf  $X$  stammt:

$$(71) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \left( \sup_{\psi \in \mathcal{F}} \left| \int_X \psi d\mu_v - \int_X \psi d\mu \right| \right) = 0 \quad ^{12}.$$

Diese Voraussetzungen für (71) sind nämlich für

$$(71a) \quad X = S_{n-1}, \quad \mu_v = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n O_{K \underset{k-1}{\rightsquigarrow} KK_{[\delta_v]} \underset{n-k}{\rightsquigarrow} K_{[\delta_v]}} \right) \quad (v = 1, 2, \dots), \quad \mu = O_{K \dots K}$$

und  $\mathcal{F} = \{g_\delta\}_{0 < \delta < \delta_0}$  wegen (70), Hilfssatz 2 und Hilfssatz 3 erfüllt. Damit ergibt sich aus (71) speziell

$$(72) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \int_{S_{n-1}} g_{\delta_v}(\xi) \left( \sum_{k=1}^n dO_{K \underset{k-1}{\rightsquigarrow} KK_{[\delta_v]} \underset{n-k}{\rightsquigarrow} K_{[\delta_v]}}(\xi) \right) - \int_{S_{n-1}} g_{\delta_v}(\xi) dO_{K \dots K}(\xi) \right) = 0.$$

Andererseits folgt aus Hilfssatz 4 aufgrund des wegen Hilfssatz 2 und (65) anwendbaren Konvergenzsatzes von Lebesgue:

$$(73) \quad \begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{S_{n-1}} g_{\delta_v}(\xi) dO_{K \dots K}(\xi) &= \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{S_{n-1}} g_{\delta_v}(\xi) dO(\mathbf{x}(\xi)) = \\ &= \int_{S_{n-1}} \left( \lim_{v \rightarrow \infty} g_{\delta_v}(\xi) \right) dO(\mathbf{x}(\xi)) = \int_{S_{n-1}} (H_{n-1}(\mathbf{x}(\xi)))^{1/(n+1)} dO(\mathbf{x}(\xi)) = \\ &= \int_{\partial K} (H_{n-1}(\mathbf{x}))^{1/(n+1)} dO(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (66), (72) und (73) ergeben zusammengekommen

$$(74) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} c_n \frac{V(K) - V(K_{[\delta_v]})}{(\delta_v)^{2/(n+1)}} = \int_{\partial K} (H_{n-1}(\mathbf{x}))^{1/(n+1)} dO(\mathbf{x}),$$

<sup>12</sup> Siehe [9], Theorem 3.1.

woraus wegen

$$(75) \quad H_{n-1} = \frac{\left| \det \left( \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}, \xi \right\rangle \right) \right|}{\left| \det \left( \left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle \right) \right|} =$$

$$= \frac{\left| \det \left( \left( \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial x}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u^{n-1}} \right) \right) \right| \cdot \left| \left( \frac{\partial x}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u^{n-1}}, \xi \right) \right|^{-(n-1)}}{\left| \left( \frac{\partial x}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u^{n-1}}, \xi \right) \right|^2}$$

und

$$(76) \quad dO(x) = \left| \left( \frac{\partial x}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u^{n-1}}, \xi \right) \right| du^1 \dots du^{n-1} \quad {}^{13}$$

aufgrund der Definitionsgleichung (1) der Affinoberfläche schließlich die Behauptung (20) von Satz 2 folgt, da die Folge  $\{\delta_v\}_{v \in \mathbb{N}}$  mit den Eigenschaften  $\delta_v > 0$  und (69) beliebig gewählt worden war.  $\square$

4. Es ist bemerkenswert, daß sich das Hauptresultat (20) unserer Arbeit in der durch den nachfolgenden Satz angegebenen Weise „lokalisieren“ läßt. Zuvor benötigen wir die

**DEFINITION 3.** Es sei  $B$  eine beliebige Borelsche Untermenge der Einheitssphäre  $S_{n-1}$ . Es seien weiter  $x(B)$  bzw.  $x_{[\delta]}(B)$  diejenigen Teile von  $F$  bzw.  $F_{[\delta]}$ , deren sphärisches Bild gerade  $B$  darstellt. Dann heißt die, aus allen Verbindungsstrecken mit durch parallele Tangentialhyperebenen aufeinander bezogenen Endpunkten aus  $x(B)$  bzw.  $x_{[\delta]}(B)$  bestehende Punktmenge  $S_\delta(B)$  des  $R_n$ , „zu  $B$  gehörender Sektor“ der „ $\delta$ -Schicht“  $K \setminus (K_{[\delta]})^0$  von  $K$ .

**BEMERKUNG.** Keine zwei der in Definition 3 vorkommenden Verbindungsstrecken haben einen Punkt gemeinsam.

**BEWEIS.** Anderenfalls würde die, durch sich treffende Verbindungsstrecken aufgespannte Ebene  $\partial K$  und  $\partial K_{[\delta]}$  jeweils in einer Eilinie schneiden, aufgrund der Zuordnung der Endpunkte dieser Verbindungsstrecken eine Unmöglichkeit (siehe Fig. 4!).  $\square$

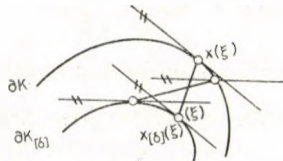


Fig. 4

<sup>13</sup> In (75) und (76) sind Absolutstriche gesetzt worden, um die Unabhängigkeit dieser Formeln von der Orientierung der lokalen Parametersysteme  $(u^1, \dots, u^{n-1})$  von  $F$  zu gewährleisten!



Hiermit gilt nun als lokale Version von (20):

SATZ 3. Es sei das sogenannte „affine Oberflächenelement“ von  $F$  gegeben durch

$$(77) \quad dO_{\text{aff}}(\mathbf{x}) := \left| \det \left( \left( \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial x}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u^{n-1}} \right) \right) \right|^{1/(n+1)} du^1 \dots du^{n-1}$$

(vgl. (1)). Dann gilt für jede Borelsche Untermenge  $B$  von  $S_{n-1}$  mit der Eigenschaft

$$(78) \quad O_{K \dots K}(\partial B) = 0 \quad (\partial B = \text{Rand von } B)$$

(vgl. (65)) die Beziehung

$$(79) \quad \int_{\mathbf{x}(B)} dO_{\text{aff}}(\mathbf{x}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} c_n \frac{V(S_\delta(B))}{\delta^{2/(n+1)}},$$

worin  $V(S_\delta(B))$  das Volumen des zu  $B$  gehörenden Sektors  $S_\delta(B)$  der  $\delta$ -Schicht von  $K$  bedeutet (vgl. Definition 3!).

BEWEIS. Um das Volumen von  $S_\delta(B)$  zu berechnen, beachten wir zunächst, daß  $S_\delta(B)$  gerade das Bild des Produkts  $B \times [0, 1]$  bei der durch

$$(80) \quad \Phi_\delta(\xi, \lambda) := (1 - \lambda) \mathbf{x}_{[\delta]}(\xi) + \lambda \mathbf{x}(\xi) \quad (\xi \in S_{n-1}, \lambda \in [0, 1])^{14}$$

gegebenen und nach der letzten Bemerkung injektiven Abbildung  $\Phi_\delta: S_{n-1} \times [0, 1] \rightarrow K \setminus (K_{[\delta]})^0$  darstellt. Durch Anwendung der Tatsache, daß die Umlaufzahl von  $\Phi_\delta(\xi, \lambda)$  bei festgehaltenem  $\lambda$  bezüglich eines beliebigen Punkts aus  $K^0 \setminus K_{[\delta]}$  für  $\lambda=0$  den Wert 0 und für  $\lambda=1$  einen Wert  $\neq 0$  besitzt, findet man, daß  $\Phi_\delta$  auch surjektiv sein muß. Als offensichtlich stetige Abbildung auf dem kompakten Raum  $S_{n-1} \times [0, 1]$  ist sie daher topologisch.

$\Phi_\delta$  ist sogar diffeomorph, wie man folgendermaßen einsieht: Die Funktionaldeterminante  $\Delta \Phi_\delta$  der stetig differenzierbaren Abbildung  $\Phi_\delta$  besitzt an einer beliebigen Stelle  $(\xi^{(0)}, \lambda_0)$  (mit o. B. d. A.  $\xi^{(0)} = (0, \dots, 0, 1)$ ) den Wert

$$(81) \quad \Delta \Phi_\delta(\xi^{(0)}, \lambda_0) = \left( (1 - \lambda_0) \frac{\partial \mathbf{x}_{[\delta]}}{\partial \xi_1}(\xi^{(0)}) + \lambda_0 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1}(\xi^{(0)}), \dots, (1 - \lambda_0) \frac{\partial \mathbf{x}_{[\delta]}}{\partial \xi_{n-1}}(\xi^{(0)}) + \lambda_0 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_{n-1}}(\xi^{(0)}), \mathbf{x}(\xi^{(0)}) - \mathbf{x}_{[\delta]}(\xi^{(0)}) \right) =$$

$$= (-1)^n (k(\xi^{(0)}) - h_{[\delta]}(\xi^{(0)})) \det \left( (1 - \lambda_0) \left( -\frac{\partial s_i}{\partial \xi_j}(0, \dots, 0) \right) + \lambda_0 \left( -\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(0, \dots, 0) \right) \right)$$

( $i, j = 1, \dots, n-1$ , vgl. Fußnote <sup>14</sup>!). Dieser ist wegen  $h(\xi^{(0)}) - h_{[\delta]}(\xi^{(0)}) > 0$  sowie wegen der positiven Definitheit der (symmetrischen) Matrizen  $\left( -\frac{\partial s_i}{\partial \xi_j}(0, \dots, 0) \right)_{i,j=1, \dots, n-1}$

(siehe (10) und (15)) und  $\left( -\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(0, \dots, 0) \right)_{i,j=1, \dots, n-1}$  (die Eigenwerte dieser Matrix

<sup>14</sup> Hierbei ist mit  $\mathbf{x}_{[\delta]}(\xi)$  der Randpunkt von  $K_{[\delta]}$  mit dem (nach innen weisenden) Normaleneinheitsvektor  $\xi$ , d. h. genau der frühere Punkt  $s(\xi)$  bezeichnet worden (vgl. Def. 2a!).

sind als die Hauptkrümmungsradien  $R_1(\mathbf{x}(\xi^{(0)})), \dots, R_{n-1}(\mathbf{x}(\xi^{(0)}))$  von  $F$  sämtlich positiv) und damit auch der positiven Definitheit der in (81) vorkommenden Linearkombination von Null verschieden. Somit ist nach dem Satz über implizite Funktionen auch die Umkehrabbildung  $\Phi_\delta^{-1}$  stetig differenzierbar, d. h.  $\Phi_\delta$  ist in der Tat ein Diffeomorphismus.

Wir stellen weiter fest, daß durch (80) mit konstantem  $\lambda = \lambda_0$  eine Hyperfläche  $F^{(\lambda_0)}$  gegeben wird, welche an der beliebigen Stelle  $\xi^{(0)}$  partiell differenzierbar und regulär ist mit  $\xi^{(0)}$  als Einheitsnormalenvektor ( $0 \leq \lambda_0 \leq 1$ ). Die partiellen Ableitungen ihres Darstellungsvektors  $(1 - \lambda_0)\mathbf{x}_{[\delta]} + \lambda_0\mathbf{x}$  nach  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  sind dort nämlich aufgrund von (81) und  $\Delta\Phi_\delta(\xi^{(0)}, \lambda_0) \neq 0$  linear unabhängig und alle außerdem zu  $\xi^{(0)}$  orthogonal. Die Hyperfläche ist in einer Umgebung der Stelle  $\xi^{(0)}$  sogar zweimal stetig differenzierbar und besitzt dort eine positive Gauß—Kronecker—Krümmung wegen

$$\det \left( (1 - \lambda_0) \left( -\frac{\partial s_i}{\partial \xi_j} (0, \dots, 0) \right) + \lambda_0 \left( -\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} (0, \dots, 0) \right) \right) > 0$$

(vgl. (19)). Sie berandet als Hyperfläche mit injektiver sphärischer Abbildung daher nach dem Satz von Hadamard (vgl. Fußn. 3) einen kompakten konvexen Körper  $K^{(\lambda_0)}$ . Dieser besitzt die auf  $S_{n-1}$  eingeschränkte Stützfunktion  $h^{(\lambda_0)}$  mit

$$h^{(\lambda_0)}(\xi) = -\langle (1 - \lambda_0)\mathbf{x}_{[\delta]}(\xi) + \lambda_0\mathbf{x}(\xi), \xi \rangle = (1 - \lambda_0)h_{[\delta]}(\xi) + \lambda_0h(\xi)$$

( $\xi = \text{beliebig} \in S_{n-1}$ ). Dies bedeutet aber, daß  $K^{(\lambda_0)}$  mit der Minkowskischen Linearkombination  $(1 - \lambda_0)K_{[\delta]} + \lambda_0K$  identisch ist.

Wird sind jetzt in der Lage, das in der zu beweisenden Gleichung (79) vorkommende Volumen von  $S_\delta(B)$  geeignet auszudrücken. Es gilt zunächst:

$$\begin{aligned} V(S_\delta(B)) &= \int_{B \times [0,1]} |\Delta\Phi_\delta| d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} d\lambda = \\ (82) \quad &= \int_{B \times [0,1]} (h - h_{[\delta]}) \left| \left( (1 - \lambda) \frac{\partial \mathbf{x}_{[\delta]}}{\partial \xi_1} + \lambda \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1}, \dots, (1 - \lambda) \frac{\partial \mathbf{x}_{[\delta]}}{\partial \xi_{n-1}} + \lambda \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_{n-1}}, \xi \right) \right| d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} d\lambda \\ & \text{(vgl. (81)). In (82) kommt das Oberflächenelement} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \left( (1 - \lambda) \frac{\partial \mathbf{x}_{[\delta]}}{\partial \xi_1} + \lambda \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1}, \dots, (1 - \lambda) \frac{\partial \mathbf{x}_{[\delta]}}{\partial \xi_{n-1}} + \lambda \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_{n-1}}, \xi \right) \right| d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} = \\ (83) \quad & = dO_{(1-\lambda)K_{[\delta]} + \lambda K \dots (1-\lambda)K_{[\delta]} + \lambda K}(\xi) \end{aligned}$$

von  $F^{(\lambda)}$  vor (siehe (65)). Letzteres läßt sich bekanntlich in der Form

$$\begin{aligned} & dO_{(1-\lambda)K_{[\delta]} + \lambda K \dots (1-\lambda)K_{[\delta]} + \lambda K}(\xi) = \\ (84) \quad & = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (1-\lambda)^{n-k} \lambda^{k-1} dO_{K \overset{\circ}{\circ} \dots \overset{\circ}{\circ} K_{[\delta]} \overset{\circ}{\circ} \dots \overset{\circ}{\circ} K_{[\delta]}}(\xi) \end{aligned}$$

ausdrücken<sup>15</sup> (was man auch aufgrund einer entsprechenden Eigenschaft des gemischten Volumens direkt aus (64) entnehmen kann).

<sup>15</sup> Siehe [10], S. 31.

Die Anwendung des Satzes von Fubini auf das Integral in (82) liefert nun unter Berücksichtigung von (83) und (84):

$$\begin{aligned} V(S_\delta(B)) &= \int_0^1 \left( \int_B (h - h_{[\delta]}) (\xi) dO_{(1-\lambda)K_{[\delta]} + \lambda K \dots (1-\lambda)K_{[\delta]} + \lambda K}(\xi) \right) d\lambda = \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \int_0^1 (1-\lambda)^{n-k} \lambda^{k-1} d\lambda \int_B (h - h_{[\delta]}) (\xi) dO_{K_{k-1} \dots K_{K_{[\delta]}} \dots K_{n-k} K_{[\delta]}}(\xi) = \\ &= \frac{1}{n!} \int_B (h - h_{[\delta]}) (\xi) \left( \sum_{k=1}^n dO_{K_{k-1} \dots K_{K_{[\delta]}} \dots K_{n-k} K_{[\delta]}}(\xi) \right). \end{aligned}$$

Damit haben wir endlich wegen (37) die zu (66) adäquate Gleichung

$$(85) \quad c_n \frac{V(S_\delta(B))}{\delta^{2/(n+1)}} = \frac{1}{n} \int_B g_\delta(\xi) \left( \sum_{k=1}^n dO_{K_{k-1} \dots K_{K_{[\delta]}} \dots K_{n-k} K_{[\delta]}}(\xi) \right).$$

Um in (85) den Grenzübergang  $\delta \rightarrow 0$  vollziehen zu können, wählen wir wie in Abschnitt 3 eine beliebige Folge  $\{\delta_v\}_{v \in \mathbb{N}}$  mit  $\delta_v > 0$  und

$$(86) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \delta_v = 0$$

und verwenden wie dort die Abkürzungen

$$(87) \quad \mu_v := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n O_{K_{k-1} \dots K_{K_{[\delta_v]}} \dots K_{n-k} K_{[\delta_v]}} \quad (v = 1, 2, \dots), \quad \mu := O_{K \dots K}$$

(vgl. (71a)). Dann schreibt sich (85) mit  $\delta = \delta_v$  in der Form

$$(88) \quad c_n \frac{V(S_{\delta_v}(B))}{\delta_v^{2/(n+1)}} = \int_{S_{n-1}} g_{\delta_v}(\xi) \chi_B(\xi) d\mu_v(\xi) \quad (v = 1, 2, \dots),$$

wenn wie üblich mit  $\chi_B$  die durch

$$\chi_B(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \xi \in B \\ 0, & \text{falls } \xi \in S_{n-1} \setminus B \end{cases}$$

gegebene „charakteristische Funktion“ der Untermenge  $B$  von  $S_{n-1}$  bezeichnet wird.

Es seien nun

$$(89) \quad \mu_v^{(B)} := \chi_B \mu_v \quad (v = 1, 2, \dots) \quad \text{bzw.} \quad \mu^{(B)} := \chi_B \mu$$

die Maße auf den Borelschen Untermengen  $A$  von  $S_{n-1}$  mit der Dichte  $\chi_B$  über den durch (87) gegebenen Maßen  $\mu_v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) bzw.  $\mu$ . Diese Maße haben die charakteristische Eigenschaft

$$\begin{aligned} (90a) \quad \mu_v^{(B)}(A) &= \int_A \chi_B(\xi) d\mu_v(\xi) = \int_{S_{n-1}} \chi_A(\xi) \chi_B(\xi) d\mu_v(\xi) = \\ &= \int_{S_{n-1}} \chi_{A \cap B}(\xi) d\mu_v(\xi) = \mu_v(A \cap B) \quad (v = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

bzw. analog

$$(90b) \quad \mu^{(B)}(A) = \mu(A \cap B).$$

Sie stellen daher nichts anderes als die Einschränkung von  $\mu_v$  bzw.  $\mu$  auf die Untermenge  $\mathcal{A} \cap B$  der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  aller Borelschen Untermengen  $A$  von  $S_{n-1}$  dar. Mit ihrer Hilfe geben wir (88) die Form

$$(91) \quad c_n \frac{V(S_{\delta_v}(B))}{\delta_v^{2/(n+1)}} = \int_{S_{n-1}} g_{\delta_v}(\xi) d\mu_v^{(B)}(\xi) \quad (v = 1, 2, \dots)$$

und versuchen, auf (91) den Konvergenzsatz von Ranga Rao anzuwenden (vgl. (71)).

Damit dies möglich ist, müssen wir aber erst noch die schwache Konvergenz  $\mu_v^{(B)} \Rightarrow \mu^{(B)}$  aus der schon bekannten schwachen Konvergenz

$$(92) \quad \mu_v \Rightarrow \mu$$

(siehe (87) und (70)) folgern. Zu diesem Zweck beachten wir, daß (92) mit

$$(93) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \mu_v(A) = \mu(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(\partial A) = 0$$

äquivalent ist (siehe [9], Theorem 2.1). Aus (93) folgt spezieller unter Berücksichtigung von (90a, b)

$$(94) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \mu_v^{(B)}(A) = \mu^{(B)}(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A} \text{ mit}$$

$$(95) \quad \mu(\partial(A \cap B)) = 0.$$

Aufgrund der einfach einzusehenden Beziehung

$$\partial(A \cap B) \subseteq (\partial A \cap B^o) \cup (\partial B \cap A^o) \cup (\partial A \cap \partial B) \subseteq (\partial A \cap B) \cup \partial B$$

sowie von (78) in Verbindung mit (87) ist aber (95) immer dann erfüllt, wenn

$$(96) \quad \mu(\partial A \cap B) = \mu^{(B)}(\partial A) = 0$$

ist. Somit gilt also (94) für alle  $A \in \mathcal{A}$  mit (96). Wegen der Äquivalenz von (92) und (93) für alle Folgen endlicher Maße auf  $\mathcal{A}$  bedeutet dies aber in der Tat die schwache Konvergenz von  $\mu_v^{(B)}$  gegen  $\mu^{(B)}$ :

$$(97) \quad \mu_v^{(B)} \Rightarrow \mu^{(B)}.$$

Der Rest des Beweises von Satz 3 verläuft nun folgendermaßen: Wegen (97) folgt aus dem schon früher verwandten Satz von Ranga Rao (vgl. Fußn. <sup>12)</sup>) in Analogie zu (72)

$$(98) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \left( \int_{S_{n-1}} g_{\delta_v}(\xi) d\mu_v^{(B)}(\xi) - \int_{S_{n-1}} g_{\delta_v}(\xi) d\mu^{(B)}(\xi) \right) = 0.$$

Außerdem ergibt sich nach (89) durch Anwendung des Konvergenzsatzes von Lebesgue in Analogie zu (73)

$$(99) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{S_{n-1}} g_{\delta_v}(\xi) d\mu^{(B)}(\xi) = \int_{S_{n-1}} \left( \lim_{v \rightarrow \infty} g_{\delta_v}(\xi) \right) \chi_B(\xi) dO(\mathbf{x}(\xi)) = \\ = \int_{x(B)} (H_{n-1}(\mathbf{x}))^{1/(n+1)} dO(\mathbf{x}) = \int_{x(B)} dO_{\text{aff}}(\mathbf{x}).$$

Damit erhalten wir schließlich durch Zusammenfassung von (99), (98) und (91):

$$(100) \quad \int_{x(B)} dO_{\text{aff}}(\mathbf{x}) = \lim_{v \rightarrow \infty} c_n \frac{V(S_{\delta_v}(B))}{\delta_v^{2/(n+1)}}.$$

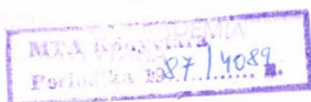
Die Beziehung (100) ist aber mit der Behauptung (79) von Satz 3 gleichbedeutend, da die Folge  $\{\delta_v\}_{v \in \mathbb{N}}$  mit den Eigenschaften  $\delta_v > 0$  und (86) beliebig gewählt worden war, womit alles bewiesen ist.  $\square$

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] APPELL, P., *Précis de mécanique rationnelle*, 6 éd., Gauthier-Villars, Paris, 1952.
- [2] BLASCHKE, W., *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Band II, Springer-Verlag, Berlin, 1923.
- [3] BLASCHKE, W., *Kreis und Kugel*, 2. Aufl., Walter de Gruyter, Berlin, 1956. *MR* 17—1123.
- [4] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, 2. Aufl., Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Band 65, Springer, Berlin, 1972. *MR* 50 # 5603.
- [5] GRUBER, P., Approximation of convex bodies, *Convexity and its applications*, Birkhäuser, Basel, 1983. *MR* 85d: 52001.
- [6] HEIJENOORT, J. VAN, On locally convex manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.* 5 (1952), 223—242. *MR* 14—577.
- [7] KLINGENBERG, W., *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*, Heidelberger Taschenbücher, Band 107, Springer-Verlag, Berlin, 1973. *MR* 54 # 3598.
- [8] LEICHTWEISS, K., Ein Lemma über Polynome und seine Anwendungen, *Beiträge Algebra Geom.* 18 (1984), 87—100.
- [9] RANGA RAO, R., Relations between weak and uniform convergence of measures with applications, *Ann. Math. Statist.* 33 (1962), 659—680. *MR* 25 # 1258.
- [10] SCHNEIDER, R., Boundary structures and curvature of convex bodies, *Contributions to geometry* (Proc. Geom. Sympos., Siegen, 1978), Birkhäuser, Basel, 1979, 13—59. *MR* 81i: 52001.
- [11] SCHNEIDER, R., Affine-invariant approximation by convex polytopes, Preprint, Freiburg, 1984.

(Eingegangen am 3. Oktober 1984)

MATHEMATISCHES INSTITUT B  
UNIVERSITÄT STUTTGART  
POSTFACH 560  
D—7000 STUTTGART 1  
FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY





PRINTED IN HUNGARY  
Szegedi Nyomda- Szeged



## RECENTLY ACCEPTED PAPERS

- DEÁK, J., Application of the theory of directional structures II. An embedding theorem
- FAWZY, Th., Lacunary interpolation by  $g$ -splines (0, 2, 3)-case
- POYATOS, F., Archimedean decomposition of commutative semigroups with operators
- ZAHAROV, V. K., Lebesguean cover and Lebesguean extension
- HÉTHELYI, L., On linear  $p$ -groups of degree  $p$
- BOGMÉR, A., An equiconvergence theorem with exact order for functions from the class  $W_1^1(0,1)$
- STAVRE, P. and KLEPP, F. C., Special classes of projective Finsler connection transformations
- KRISTÓF, J., Special theorem for normal elements of  $GW^*$ -algebras
- ABU-KHUZAM, H. and YAQUB, A., Commutativity of certain semiprime rings
- GRACZYŃSKA—WRONSKA, E., On a problem of basis for the regular extension of varieties
- KHAN, L. A., On seminorm separability for vector-valued function spaces
- DEÁK, J., Preproximities and internal characterizations of complete regularity
- JUHÁSZ, I., Variations on tightness
- DITZIAN, Z., Determining smoothness by block data
- FELDMAN, D. and ÖSTERREICHER, F., A note on  $f$ -divergences
- FENEYROL—PERRIN, Y., Transformations conformes dans le corps hédériques
- MLITZ, R. and OSWALD, A., Hypersolvable and supernilpotent radicals of near-rings
- BECK, J., On a lattice-point problem of H. Steinhaus
- FEIGIN, B. and FIALOWSKI, A., Cohomology of the nilpotent subalgebras of current Lie algebras
- SINGH, K., On quasilinear elliptic systems in  $R^n$
- HORVÁTH, Á., On a polynomial algorithm for selecting a lattice-basis containing a given primitive system
- HORVÁTH, Á., Algebraic characterization of primitive systems
- BOLLE, U., On the density of multiple packings and coverings of convex discs
- ŠEŠELJA, B. and VOJVODIČ, G., On the complementedness of the lattice of weak congruences

## CONTENTS

MÜLLER, H. R., Eine Kennzeichnung der Schraubenbewegungen des euklidischen Raumes . . .	329
BEZDEK, A. and BEZDEK, K., When is it possible to translate a convex polyhedron in an other one? .....	337
BEZDEK, A., BEZDEK, K. and BÖRÖCZKY, K., On compact packings .....	343
JUCOVIC, E. and ŠEVEC, S., On generalized neighbour packings of domains in the euclidean plane .....	347
BLIND, R., Die minimale Anzahl der $j$ -Seiten ( $d-3 \leq j \leq d-1$ ) von $d$ -Polytopen ohne dreieckige 2-Seiten .....	359
WERNICKE, B., Möbiusebenen in spiegelungsgeometrischer Darstellung .....	363
MANI—LEVITSKA, P., Random Steiner symmetrizations .....	373
HERTEL, E., Disjunkte Pflasterungen konvexer Körper .....	379
BLIND, G., Optimale Zerlegungen eines konvexen Bereichs in konvexe Bereiche .....	387
SCHNEIDER, R., Affine-invariant approximation by convex polytopes .....	401
BEZDEK, A. and BEZDEK, K., Enclosing a set by sets .....	409
KLEE, V., Do infinite-dimensional Banach spaces admit nice tilings? .....	415
SZABÓ, S., Packing and covering of discrete space by certain spheres .....	429
HÁRS, L., The Tammes problem for $n=10$ .....	439
LEICHTWEISS, K., Über eine Formel Blaschkes zur Affinoberfläche .....	453